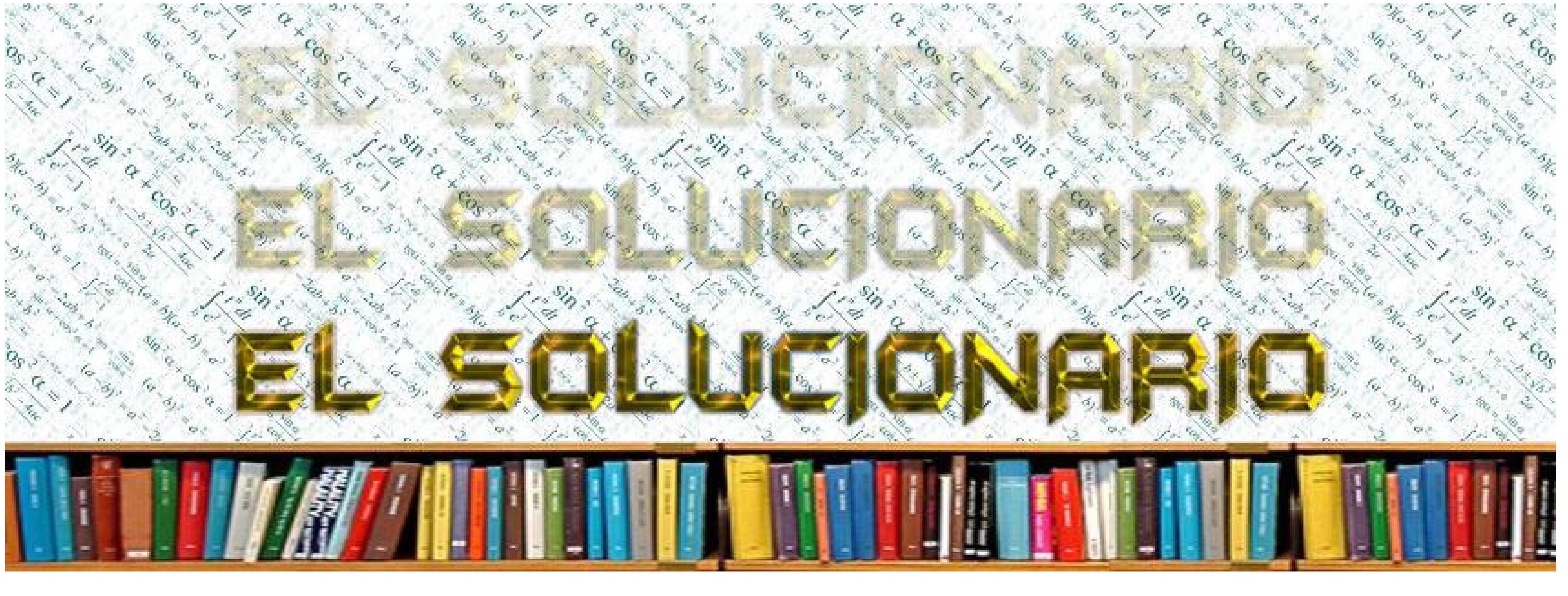
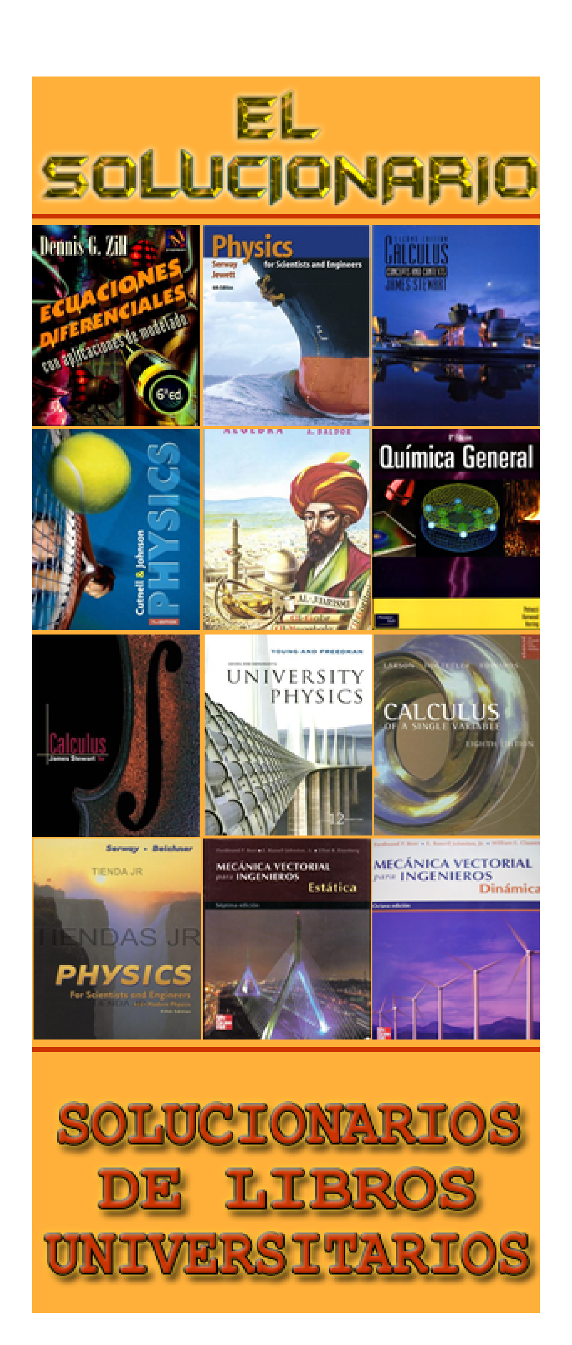



*http://www.elsolucionario.blogspot.com*










LIBROS UNIVERISTARIOS Y SOLUCIONARIOS DE MUCHOS DE ESTOS LIBROS

LOS SOLUCIONARIOS CONTIENEN TODOS LOS EJERCICIOS DEL LIBRO RESUELTOS Y EXPLICADOS DE FORMA CLARA

VISITANOS PARA DESARGALOS GRATIS.

Datos de catalogación bibliográfica

**HIBBELER, R. C.**
**Mécanica vectorial para ingenieros. Dinámica**
**Décima edición**

PEARSON EDUCACIÓN, México, 2004

ISBN: 970-26-0500-8
Área: Universitarios

Formato: 20 × 25.5 cm Páginas: 712



ISBN 0-13-141678-2



**Edición en español**
Editor: Guillermo Trujano Mendoza
e-mail: guillermo.trujano@pearsoned.com
Supervisora de desarrollo: Diana Karen Montaño
Supervisor de producción: José D. Hernández Garduño

**Edición en inglés**
Vice President and Editorial Director, ECS: *Marcia Horton*
Vice President and Director of Production and Manufacturing, ESM: *David W. Riccardi*
Associate Editor: *Dee Bernhard*
Editorial Assistant: *Brian Hoehl*
Executive Managing Editor: *Vince O'Brien*
Managing Editor: *David A. George*
Director of Creative Services: *Paul Belfanti*
Manager of Electronic Composition and Digital Content: *Jim Sullivan*
Assistant Manager of Electronic Composition and Digital Content: *Allyson Graesser*
Creative Director: *Carole Anson*
Art Director: *Jonathan Boylan*
Electronic Composition: *Clara Bartunek, Beth Gschwind, Julita Nazario, and Judith R. Wilkens*
Art Editor: *Xiaohong Zhu*
Manufacturing Manager: *Trudy Pisciotti*
Manufacturing Buyer: *Lisa McDowell*
Senior Marketing Manager: *Holly Stark*

DÉCIMA EDICIÓN, 2004

D.R. © 2004 por Pearson Educación de México, S.A. de C.V.
Atlacomulco 500-5to. piso
Industrial Atoto
53519 Naucalpan de Juárez, Edo. de México
E-mail: editorial.universidades@pearsoned.com

Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana Reg. Núm. 1031



ISBN 970-26-0500-8

Impreso en México. *Printed in Mexico.*

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 - 07 06 05 04

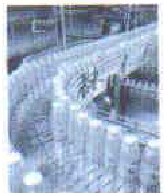
# CONTENIDO

## Dinámica



## 12 Cinemática de una partícula 3


Objetivos del capítulo 3
12.1 Introducción 3
12.2 Cinemática rectilínea: Movimiento continuo 5
12.3 Cinemática rectilínea: Movimiento errático 18
12.4 Movimiento curvilíneo general 31
12.5 Movimiento curvilíneo: Componentes rectangulares 33
12.6 Movimiento de un proyectil 38
12.7 Movimiento curvilíneo: Componentes normal y tangencial 49
12.8 Movimiento curvilíneo: Componentes cilíndricas 62
12.9 Análisis del movimiento absoluto dependiente de dos partículas 77
12.10 Análisis del movimiento relativo de dos partículas usando ejes en traslación 83


## 13 Cinética de una partícula: Fuerza y aceleración 97


Objetivos del capítulo 97
13.1 Leyes del movimiento de Newton 97
13.2 La ecuación de movimiento 101
13.3 Ecuación de movimiento para un sistema de partículas 104
13.4 Ecuaciones de movimiento: Coordenadas rectangulares 106
13.5 Ecuaciones de movimiento: Coordenadas normal y tangencial 123
13.6 Ecuaciones de movimiento: Coordenadas cilíndricas 135
★13.7 Movimiento bajo fuerza central y mecánica del espacio 146




## 14 Cinética de una partícula: Trabajo y energía 159


Objetivos del capítulo 159
14.1 El trabajo de una fuerza 159
14.2 Principio del trabajo y la energía 164
14.3 Principio del trabajo y la energía para un sistema de partículass 166
14.4 Potencia y eficiencia 182
14.5 Fuerzas conservativas y energía potencial 190
14.6 Conservación de la energía 194


## 15 Cinética de una partícula: Impulso y momentum 207


Objetivos del capítulo 207
15.1 Principio del impulso y momentum lineal 207
15.2 Principio del impulso y momentum lineal para un sistema de partículas 214

15.3 Conservación del momentum lineal para un sistema de partículas 222
15.4 Impacto 233
15.5 Momentum angular 246
15.6 Relación entre el momento de una fuerza y el momentum angular 247
15.7 Principios del impulso angular y del momentum angular 250
★15.8 Corrientes de fluido estacionarias 260
★15.9 Propulsión con masa variable 265

**Repaso 1: Cinemática y cinética de una partícula 278**

## 16

## Cinemática plana de un cuerpo rígido 293

Objetivos del capítulo 293
16.1 Movimiento de un cuerpo rígido 293
16.2 Traslación 295
16.3 Rotación con respecto a un eje fijo 296
16.4 Análisis del movimiento absoluto 311
16.5 Análisis de movimiento relativo: Velocidad 319
16.6 Centro instantáneo de velocidad cero 333
16.7 Análisis de movimiento relativo: Aceleración 343
16.8 Análisis de movimiento relativo usando ejes en rotación 358

## 17

## Cinética plana de un cuerpo rígido: Fuerza y aceleración 377

Objetivos del capítulo 377
17.1 Momento de inercia 377
17.2 Ecuaciones cinéticas de movimiento plano 391
17.3 Ecuaciones de movimiento: Traslación 394
17.4 Ecuaciones de movimiento: Rotación con respecto a un eje fijo 406
17.5 Ecuaciones de movimiento: Movimiento plano general 422



## 18

## Cinética plana de un cuerpo rígido: Trabajo y energía 437

Objetivos del capítulo 437
18.1 Energía cinética 437
18.2 El trabajo de una fuerza 441
18.3 El trabajo de un par 443
18.4 Principio del trabajo y la energía 445
18.5 Conservación de la energía 459



## 19

## Cinética plana de un cuerpo rígido: Impulso y momentum 471

Objetivos del capítulo 471
19.1 Momentum lineal y momentum angular 471
19.2 Principio del impulso y momentum lineal 477
19.3 Conservación del momentum 492
19.4 Impacto excéntrico 496

**Repaso 2: Cinemática y cinética planas de un cuerpo rígido 506**



## 20

## Cinemática tridimensional de un cuerpo rígido 523


Objetivos del capítulo 523

20.1 Rotación con respecto a un punto fijo 523

★20.2 La derivada con respecto al tiempo de un vector medido desde un sistema fijo o rotatorio en traslación 526

20.3 Movimiento general 531

★20.4 Análisis de movimiento relativo usando ejes en traslación y en rotación 540




## 21

## Cinética tridimensional de un cuerpo rígido 553


Objetivos del capítulo 553

★21.1 Momentos y productos de inercia 553

★21.2 Momentum angular 563

★21.3 Energía cinética 566

★21.4 Ecuaciones de movimiento 574

★21.5 Movimiento giroscópico 588

★21.6 Movimiento libre de par 594




## 22

## Vibraciones 605


Objetivos del capítulo 605

★22.1 Vibración libre sin amortiguamiento 605

★22.2 Métodos de energía 618

★22.3 Vibración forzada sin amortiguamiento 624

★22.4 Vibración libre con amortiguamiento viscoso 628

★22.5 Vibración forzada con amortiguamiento viscoso 631

★22.6 Analogías con el circuito eléctrico 634


## Apéndices


**A.** Expresiones matemáticas 640

**B.** Análisis numérico y por computadora 642

**C.** Análisis de vectores 651

**D.** Repaso de los fundamentos para un examen de ingeniería 655

Respuestas a problemas seleccionados 671

Índice 681

CAPÍTULO 12

# Cinemática de una partícula

## OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Presentar los conceptos de posición, desplazamiento, velocidad y aceleración.
- Estudiar el movimiento de una partícula a lo largo de una línea recta y representar gráficamente este movimiento.
- Investigar el movimiento de una partícula que recorre una trayectoria curva usando diferentes sistemas coordenados.
- Presentar un análisis del movimiento dependiente de dos partículas.
- Examinar los principios del movimiento relativo de dos partículas usando ejes en traslación.

## 12.1 Introducción

La *mecánica* es una rama de la física que se ocupa del estado de reposo o movimiento de cuerpos sometidos a la acción de fuerzas. La mecánica de cuerpos rígidos se divide en dos áreas: estática y dinámica. La *estática* tiene que ver con el equilibrio de un cuerpo que permanece en reposo o que se mueve con velocidad constante. El tratamiento previo estuvo relacionado con la *dinámica* que se ocupa del movimiento acelerado de un cuerpo. Aquí el tema de la dinámica será presentado en dos partes: la *cinemática*, que trata sólo con los aspectos geométricos del movimiento, y la *cinética*, la cual analiza las fuerzas que causan el movimiento. Para desarrollar esos principios, primero será analizada la dinámica de una partícula, seguida por temas de dinámica del cuerpo rígido en dos y luego en tres dimensiones.

Históricamente, los principios de la dinámica se desarrollaron cuando fue posible efectuar mediciones exactas del tiempo. Galileo Galilei (1564-1642) fue uno de los principales pioneros en contribuir a este campo. Su trabajo consistió en experimentos usando péndulos y cuerpos en caída libre. Sin embargo, las contribuciones más importantes en dinámica fueron hechas por Isaac Newton (1642-1727), quien es famoso por su formulación de las tres leyes del movimiento y la ley de la atracción gravitatoria universal. Poco después que esas leyes fueron postuladas, Euler, D'Alembert, Lagrange y otros desarrollaron importantes procedimientos para su aplicación.

Hay muchos problemas en ingeniería cuyas soluciones requieren aplicar los principios de la dinámica. Típicamente, el diseño estructural de cualquier vehículo, como un automóvil o un aeroplano, requiere la consideración del movimiento al que está sometido. Esto también es cierto para muchos dispositivos mecánicos, como motores, bombas, herramientas móviles, operadores industriales y maquinaria. Además, las predicciones de los movimientos de satélites artificiales, proyectiles y vehículos espaciales están basadas en la teoría de la dinámica. Con mayores avances en la tecnología, habrá una necesidad aún más grande de aprender a aplicar los principios de este tema.

**Resolución de problemas.** La dinámica es considerada más compleja que la estática ya que tanto las fuerzas aplicadas a un cuerpo como su movimiento deben ser tomados en cuenta. Además, muchas aplicaciones requieren el uso del cálculo, en vez de sólo álgebra y trigonometría. En todo caso, la manera más efectiva de aprender los principios de dinámica es *resolviendo problemas*. Para tener éxito en esto es necesario presentar el trabajo de manera lógica y ordenada, como lo sugiere la siguiente secuencia de pasos:

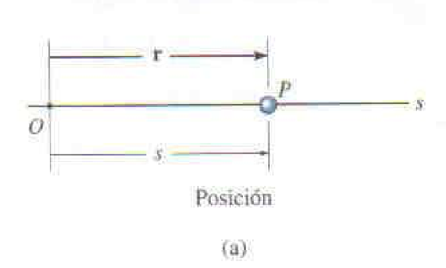
1. Lea el problema cuidadosamente y trate de correlacionar la situación física real con la teoría estudiada.
2. Trace todos los diagramas necesarios y tabule los datos del problema.
3. Establezca un sistema coordenado y aplique los principios pertinentes, generalmente en forma matemática.
4. Resuelva algebraicamente las ecuaciones necesarias en tanto sea práctico; luego use un conjunto consistente de unidades y complete la solución en forma numérica. Reporte la respuesta con no más cifras significativas que las dadas por los datos.
5. Estudie la respuesta usando juicio técnico y sentido común para determinar si parece o no razonable.
6. Una vez que la solución haya sido completada, revise el problema. Trate de pensar en otras maneras de obtener la misma solución.

Al aplicar este procedimiento general, efectúe el trabajo tan cuidadosamente como le sea posible. Esto a menudo estimula un pensamiento claro y ordenado, y viceversa.

## 12.2 Cinemática rectilínea: Movimiento continuo

Comenzaremos nuestro estudio de la dinámica analizando la cinemática de una partícula que se mueve a lo largo de una trayectoria rectilínea o en línea recta. Recuerde que una *partícula* tiene masa pero tamaño y forma insignificantes. Por tanto, debemos limitar la aplicación a aquellos objetos cuyas dimensiones no son de consecuencia en el análisis del movimiento. En la mayoría de los problemas el interés se centra en cuerpos de tamaño finito, como cohetes, proyectiles o vehículos. Tales objetos se pueden considerar como partículas, siempre que el movimiento del cuerpo esté caracterizado por el movimiento de su centro de masa y que cualquier rotación del cuerpo sea ignorada.

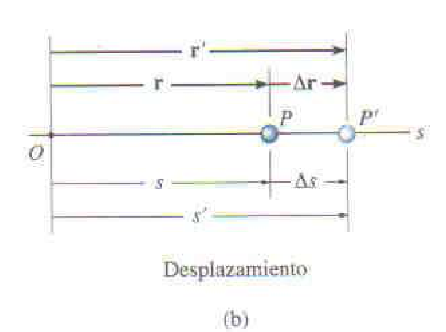
**Cinemática rectilínea.** La cinemática de una partícula es caracterizada al especificar, en cualquier momento, la posición, velocidad y aceleración de la partícula.




Posición

(a)

**Posición.** La trayectoria en línea recta de una partícula será definida usando un solo eje coordenado $s$, figura 12-1$a$. El origen $O$ sobre la trayectoria es un punto fijo, y desde este punto el *vector de posición* $\mathbf{r}$ se usa para especificar la localización de la partícula $P$ en cualquier momento dado. Advierta que $\mathbf{r}$ está *siempre* dirigido a lo largo del eje $s$, y entonces su dirección nunca cambia. Lo que cambiará serán su magnitud y su sentido o dirección de la cabeza de la flecha $\mathbf{r}$. Por tanto, para el análisis de movimiento, es conveniente representar $\mathbf{r}$ mediante un *escalar s-algebraico*, el cual representa la *coordenada de posición* de la partícula, figura 12-1$a$. La magnitud de $s$ (y $\mathbf{r}$) es la distancia desde $O$ hasta $P$, usualmente medida en metros (m) o pies (pies), y el sentido (o dirección de la cabeza de la flecha de $\mathbf{r}$) es definido mediante el signo algebraico colocado sobre $s$. Aunque la selección es arbitraria, en este caso $s$ es positiva ya que el eje coordenado es positivo hacia la derecha del origen. Igualmente, el sentido es negativo si la partícula está localizada a la izquierda de $O$.




Desplazamiento

(b)

Fig. 12-1

**Desplazamiento.** El *desplazamiento* de la partícula es definido como el *cambio* en su *posición*. Por ejemplo, si la partícula se mueve desde $P$ hasta $P'$, figura 12-1$b$, el desplazamiento es $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$. Usando escalares algebraicos para representar $\Delta\mathbf{r}$, tenemos también

$$\Delta s = s' - s$$

Aquí $\Delta s$ es *positiva* ya que la posición final de la partícula está a la *derecha* de su posición inicial, es decir, $s' > s$. De la misma manera, si la posición final estuviese a la *izquierda* de su posición inicial, $\Delta s$ sería *negativa*.

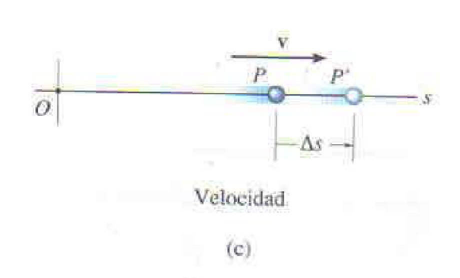
Como el desplazamiento de una partícula es una *cantidad vectorial*, debe ser identificado a partir de la distancia que la partícula recorre. Específicamente, la *distancia recorrida* es un *escalar positivo* que representa la longitud total de trayectoria sobre la cual viaja la partícula.

**Velocidad.** Si la partícula se mueve a través de un desplazamiento $\Delta\mathbf{r}$ desde $P$ hasta $P'$ durante el intervalo de tiempo $\Delta t$, figura 12-1*b*, la *velocidad promedio* de la partícula durante este intervalo de tiempo es

$$\mathbf{v}_{\text{prom}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$$

Si tomamos valores cada vez más pequeños de $\Delta t$, la magnitud de $\Delta\mathbf{r}$ se vuelve cada vez más pequeña. En consecuencia, la *velocidad instantánea* es definida como $\mathbf{v} = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta\mathbf{r}/\Delta t)$, o

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$




Velocidad

(c)

Representando $\mathbf{v}$ como un escalar algebraico, figura 12-1*c*, también podemos escribir

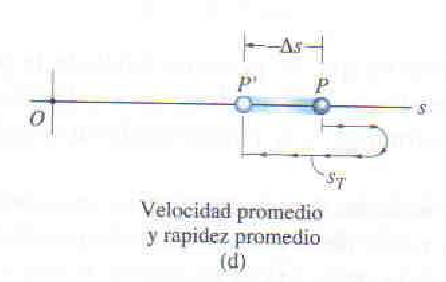
$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad v = \frac{ds}{dt} \qquad (12\text{–}1)$$

Como $\Delta t$ o $dt$ es siempre positivo, el signo usado para definir el *sentido* de la velocidad es el mismo que para $\Delta s$ o $ds$. Por ejemplo, si la partícula se está moviendo hacia la *derecha*, figura 12-1*c*, la velocidad es *positiva*; mientras que si se está moviendo hacia la *izquierda* la velocidad es *negativa*. (Esto es enfatizado aquí mediante la flecha escrita a la izquierda de la ecuación 12-1.) La *magnitud* de la velocidad se denomina *rapidez*, y generalmente es expresada en unidades de m/s o pies/s.

Ocasionalmente se usa el término "rapidez promedio". La *rapidez promedio* es siempre un escalar positivo, y se define como la distancia total recorrida por una partícula, $s_T$, dividida entre el tiempo transcurrido $\Delta t$; es decir,

$$(v_{\text{rap}})_{\text{prom}} = \frac{s_T}{\Delta t}$$

Por ejemplo, la partícula mostrada en la figura 12-1*d* viaja a lo largo de la trayectoria de longitud $s_T$ en el tiempo $\Delta t$, por lo que su rapidez promedio es $(v_{\text{rap}})_{\text{prom}} = s_T/\Delta t$, pero su velocidad promedio es $v_{\text{prom}} = -\Delta s/\Delta t$.



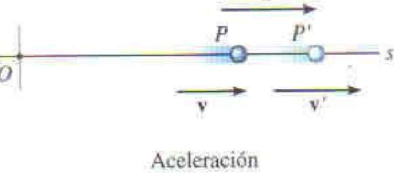

Velocidad promedio
y rapidez promedio

(d)

**Fig. 12–1**

**Aceleración.** Si la velocidad de la partícula se conoce en los dos puntos $P$ y $P'$, la *aceleración promedio* de la partícula durante el intervalo de tiempo $\Delta t$ se define como

$$\mathbf{a}_{\text{prom}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$



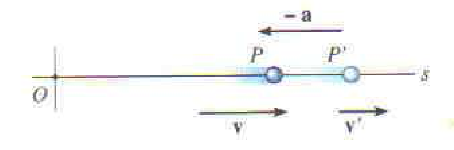
Aceleración

(e)

Aquí $\Delta\mathbf{v}$ representa la diferencia en la velocidad durante el intervalo de tiempo $\Delta t$, es decir, $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$, figura 12-1*e*.

La *aceleración instantánea* en el tiempo $t$ se encuentra tomando valores cada vez más pequeños de $\Delta t$ y los valores correspondientes cada vez más pequeños de $\Delta\mathbf{v}$, de manera que $\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta\mathbf{v}/\Delta t)$ o, usando escalares algebraicos,

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad a = \frac{dv}{dt} \qquad (12\text{–}2)$$



Desaceleración

(f)

Sustituyendo la ecuación 12-1 en este resultado, también podemos escribir

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad a = \frac{d^2 s}{dt^2}$$

Tanto la aceleración promedio como la instantánea pueden ser positivas o negativas. En particular, cuando la partícula está *reduciendo* su rapidez, se dice que está *desacelerando*. En este caso, $v'$ en la figura 12-1*f* es menor que $v$, por lo que $\Delta v = v' - v$ será negativa. En consecuencia, $a$ será también negativa y actuará hacia la *izquierda* en el *sentido* opuesto a $v$. También advierta que cuando la *velocidad* es *constante*, la *aceleración es cero* ya que $\Delta v = v - v = 0$. Las unidades usadas comúnmente para expresar la magnitud de la aceleración son $\text{m/s}^2$ o $\text{pies/s}^2$.

Una relación diferencial que implica el desplazamiento, la velocidad y la aceleración a lo largo de la trayectoria puede ser obtenida eliminando la diferencial de tiempo $dt$ entre las ecuaciones 12-1 y 12-2. Observe que aunque podemos establecer entonces otra ecuación, ésta *no* será independiente de las ecuaciones 12-1 y 12-2. Demuestre que

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad a\,ds = v\,dv \qquad (12\text{–}3)$$

**Aceleración constante, $a = a_c$.** Cuando la aceleración es constante, cada una de las tres ecuaciones cinemáticas $a_c = dv/dt$, $v = ds/dt$, y $a_c ds = v\,dv$, pueden ser integradas para obtener fórmulas que relacionen $a_c$, $v$, $s$ y $t$.

**Velocidad como función del tiempo.** Integre $a_c = dv/dt$, suponiendo que inicialmente $v = v_0$ cuando $t = 0$.

$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t a_c\,dt$$

$(\overset{+}{\rightarrow})$
$$v = v_0 + a_c t \qquad (12\text{–}4)$$
Aceleración constante

**Posición como función del tiempo.** Integre $v = ds/dt = v_0 + a_c t$, suponiendo que inicialmente $s = s_0$ cuando $t = 0$.

$$\int_{s_0}^{s} ds = \int_0^t (v_0 + a_c t)\,dt$$

$(\overset{+}{\rightarrow})$
$$s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}a_c t^2 \qquad (12\text{–}5)$$
Aceleración constante

**Velocidad como función de la posición.** Despeje $t$ en la ecuación 12-4 y sustitúyalo en la ecuación 12-5, o integre $v\,dv = a_c\,ds$, suponiendo que inicialmente $v = v_0$ en $s = s_0$.

$$\int_{v_0}^{v} v\,dv = \int_{s_0}^{s} a_c\,ds$$

$(\overset{+}{\rightarrow})$
$$v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0) \qquad (12\text{–}6)$$
Aceleración constante

Esta ecuación no es independiente de las ecuaciones 12-4 y 12-5 ya que puede obtenerse eliminando $t$ entre esas ecuaciones.

Las magnitudes y los signos de $s_0$, $v_0$ y $a_c$, usados en las tres ecuaciones anteriores son determinados a partir del origen elegido y de la dirección positiva del eje $s$ como se indica mediante la flecha escrita a la izquierda de cada ecuación. También, es importante recordar que esas ecuaciones son útiles *sólo cuando la aceleración es constante y cuando* $t = 0$, $s = s_0$, $v = v_0$. Un ejemplo común de movimiento acelerado constante ocurre cuando un cuerpo cae libremente hacia la Tierra. Si se ignora la resistencia del aire y la distancia de caída es corta, entonces la aceleración del cuerpo *hacia abajo* cuando está cerca de la Tierra es constante y aproximadamente igual a 9.81 $m/s^2$ o 32.2 $pies/s^2$. La prueba de esto está dada en el ejemplo 13.2.

## PUNTOS IMPORTANTES

- La dinámica se ocupa de cuerpos que tienen movimiento acelerado.
- La cinemática es el estudio de la geometría del movimiento.
- La cinética es el estudio de las fuerzas que causan el movimiento.
- La cinemática rectilínea se refiere al movimiento en línea recta.
- La rapidez se refiere a la magnitud de la velocidad.
- La rapidez promedio es la distancia total recorrida dividida entre el tiempo total empleado para ello. Esto es diferente de la velocidad promedio, la cual es el desplazamiento dividido entre el tiempo.
- La aceleración, $a = dv/dt$, es negativa cuando la partícula está desacelerando.
- Una partícula puede tener aceleración y aún tener velocidad cero.
- La relación $a\,ds = v\,dv$ se deriva de $a = dv/dt$ y $v = ds/dt$, al eliminar $dt$.

## PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

Las ecuaciones de la cinemática rectilínea deben aplicarse usando el siguiente procedimiento.

*Sistema coordenado*

- Establezca una coordenada $s$ de posición a lo largo de la trayectoria y especifique su *origen fijo* y dirección positiva.
- Como el movimiento es a lo largo de una línea recta, la posición, la velocidad y la aceleración de la partícula pueden ser representadas como escalares algebraicos. Para el trabajo analítico, el sentido de $s$, $v$ y $a$ es determinado entonces a partir de sus *signos algebraicos*.
- El sentido positivo de cada escalar puede ser indicado mediante una flecha mostrada al lado de cada ecuación cinemática que es aplicada.

*Ecuaciones cinemáticas*

- Si se conoce una relación entre *dos* cualesquiera de las cuatro variables $a$, $v$, $s$ y $t$, entonces puede obtenerse una tercera variable usando una de las ecuaciones cinemáticas, $a = dv/dt$, $v = ds/dt$ o $a\,ds = v\,dv$, lo que relaciona a las tres variables.*
- Siempre que sea efectuada una integración, es importante que se conozcan la posición y la velocidad en un instante dado para evaluar la constante de integración si se usa una integral indefinida, o los límites de integración si se usa una integral definida.
- Recuerde que las ecuaciones 12-4, 12-5 y 12-6 tienen un uso limitado. Nunca las aplique a menos que esté absolutamente seguro de que la *aceleración es constante*.

*Algunas fórmulas estándar de diferenciación e integración se proporcionan en el apéndice A.




Durante el tiempo que este cohete experimenta movimiento rectilíneo, su altura como función del tiempo puede medirse y ser expresada por $s = s(t)$. Entonces es posible encontrar su velocidad usando $v = ds/dt$, y su aceleración puede ser determinada a partir de $a = dv/dt$.

## EJEMPLO 12.1

El automóvil mostrado en la figura 12-2 se mueve en una línea recta de manera tal que para un tiempo corto su velocidad es definida por $v = (3t^2 + 2t)$ pies/s, donde $t$ está en segundos. Determine su posición y su aceleración cuando $t = 3$ s. Cuando $t = 0$, $s = 0$.




Fig. 12-2

### Solución

*Sistema coordenado.* La coordenada de posición se extiende desde el origen fijo $O$ del automóvil, es positiva hacia la derecha.

*Posición.* Como $v = f(t)$, la posición del automóvil puede ser determinada a partir de $v = ds/dt$, ya que esta ecuación relaciona a $v$, $s$ y $t$. Tomando en cuenta que $s = 0$ cuando $t = 0$, tenemos*

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad v = \frac{ds}{dt} = (3t^2 + 2t)$$

$$\int_0^s ds = \int_0^t (3t^2 + 2t)\, dt$$

$$s\Big|_0^s = t^3 + t^2\Big|_0^t$$

$$s = t^3 + t^2$$

Cuando $t = 3$ s,

$$s = (3)^3 + (3)^2 = 36 \text{ pies} \qquad \textit{Resp.}$$

*Aceleración.* Conocida $v = f(t)$, la aceleración se determina a partir de $a = dv/dt$, ya que esta ecuación relaciona a $a$, $v$ y $t$.

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(3t^2 + 2t)$$

$$= 6t + 2$$

Cuando $t = 3$ s,

$$a = 6(3) + 2 = 20 \text{ pies/s}^2 \rightarrow \qquad \textit{Resp.}$$

Las fórmulas para calcular la aceleración constante *no pueden* usarse para resolver este problema. ¿Por qué?

*Se puede obtener el *mismo resultado* evaluando una constante de integración $C$ en vez de usar límites definidos en la integral. Por ejemplo, al integrar $ds = (3t^2 + 2t)\,dt$ resulta $s = t^3 + t^2 + C$. Usando la condición de que en $t = 0$, $s = 0$, entonces $C = 0$.

## EJEMPLO 12.2

Un proyectil pequeño es disparado verticalmente *hacia abajo* a través de un fluido con una velocidad inicial de 60 m/s. Debido a la resistencia del fluido el proyectil experimenta una desaceleración igual a $a = (-0.4v^3)$ m/s$^2$, donde $v$ está en m/s.* Determine la velocidad y la posición del proyectil 4 s después de ser disparado.

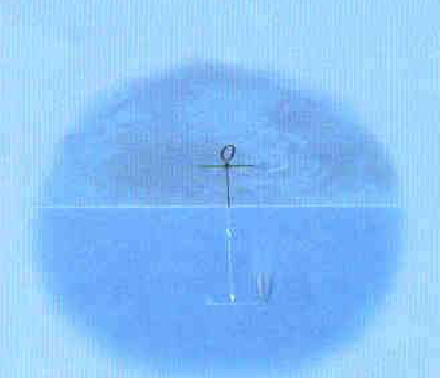



Fig. 12-3

### Solución

*Sistema coordenado.* Como el movimiento es hacia abajo, la coordenada de posición es positiva hacia abajo, con origen localizado en $O$, figura 12-3.

*Velocidad.* Aquí $a = f(v)$, por lo que debemos determinar la velocidad como función del tiempo usando $a = dv/dt$, ya que esta ecuación relaciona a $v$, $a$ y $t$. (¿Por qué no usar $v = v_0 + a_c t$?) Separando las variables e integrando, con $v_0 = 60$ m/s cuando $t = 0$, obtenemos

$$(+\downarrow) \qquad a = \frac{dv}{dt} = -0.4v^3$$

$$\int_{60\text{ m/s}}^{v} \frac{dv}{-0.4v^3} = \int_0^t dt$$

$$\frac{1}{-0.4}\left(\frac{1}{-2}\right)\frac{1}{v^2}\bigg|_{60}^{v} = t - 0$$

$$\frac{1}{0.8}\left[\frac{1}{v^2} - \frac{1}{(60)^2}\right] = t$$

$$v = \left\{\left[\frac{1}{(60)^2} + 0.8t\right]^{-1/2}\right\} \text{ m/s}$$

Tomamos la raíz positiva, ya que el proyectil se mueve hacia abajo. Cuando $t = 4$ s,

$$v = 0.559 \text{ m/s} \downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

*Posición.* Conocida $v = f(t)$, podemos obtener la posición del proyectil a partir de $v = ds/dt$, ya que esta ecuación relaciona a $s$, $v$ y $t$. Usando la condición inicial $s = 0$, cuando $t = 0$, tenemos

$$(+\downarrow) \qquad v = \frac{ds}{dt} = \left[\frac{1}{(60)^2} + 0.8t\right]^{-1/2}$$

$$\int_0^s ds = \int_0^t \left[\frac{1}{(60)^2} + 0.8t\right]^{-1/2} dt$$

$$s = \frac{2}{0.8}\left[\frac{1}{(60)^2} + 0.8t\right]^{1/2}\bigg|_0^t$$

$$s = \frac{1}{0.4}\left\{\left[\frac{1}{(60)^2} + 0.8t\right]^{1/2} - \frac{1}{60}\right\} \text{ m}$$

Cuando $t = 4$ s,

$$s = 4.43 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

*Advierta que para que sea dimensionalmente homogénea, la constante 0.4 tiene unidades de s/m$^2$.

## EJEMPLO 12.3

Durante una prueba un cohete va viajando hacia arriba a 75 m/s, y cuando está a 40 m del suelo su motor falla. Determine la altura máxima $s_B$ que alcanza el cohete y su rapidez justo antes de tocar el suelo. Mientras está en movimiento el cohete es sometido a una aceleración constante hacia abajo de 9.81 m/s² debido a la gravedad. Ignore el efecto de la resistencia del aire.

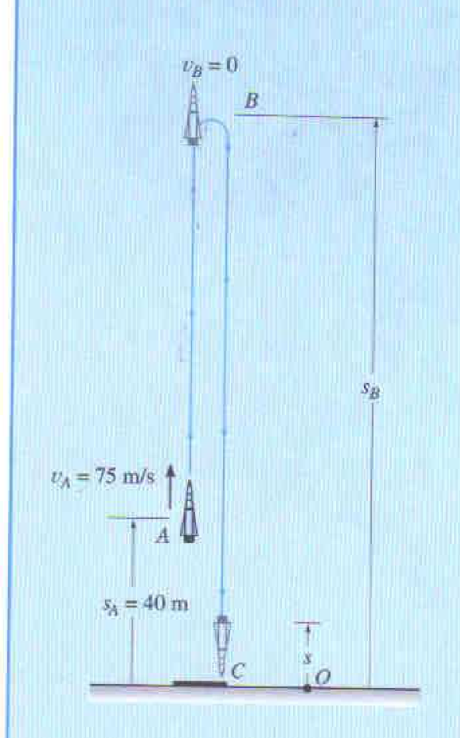



Fig. 12-4

### Solución

*Sistema coordenado.* El origen $O$ para la coordenada de posición $s$ se toma al nivel del suelo, positiva hacia arriba, figura 12-4.

*Altura máxima.* Como el cohete va viajando *hacia arriba*, $v_A = +75$ m/s cuando $t = 0$. En su altura máxima $s = s_B$, la velocidad $v_B = 0$. Para todo el movimiento, la aceleración es $a_c = -9.81$ m/s² (negativa pues actúa en sentido *opuesto* a la velocidad positiva o al desplazamiento positivo). Como $a_c$ es *constante*, la posición del cohete puede ser relacionada con su velocidad en los dos puntos $A$ y $B$ sobre la trayectoria usando la ecuación 12-6, es decir,

$$(+\uparrow) \qquad v_B^2 = v_A^2 + 2a_c(s_B - s_A)$$
$$0 = (75\text{ m/s})^2 + 2(-9.81\text{ m/s}^2)(s_B - 40\text{ m})$$
$$s_B = 327\text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

*Velocidad.* Para obtener la velocidad del cohete justo antes de que toque el suelo, podemos aplicar la ecuación 12-6 entre los puntos $B$ y $C$, figura 12-4.

$$(+\uparrow) \qquad v_C^2 = v_B^2 + 2a_c(s_C - s_B)$$
$$= 0 + 2(-9.81\text{ m/s}^2)(0 - 327\text{ m})$$
$$v_C = -80.1\text{ m/s} = 80.1\text{ m/s}\downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

Seleccionamos la raíz negativa ya que el cohete se está moviendo hacia abajo.

Similarmente, la ecuación 12-6 también puede aplicarse entre los puntos $A$ y $C$, esto es,

$$(+\uparrow) \qquad v_C^2 = v_A^2 + 2a_c(s_C - s_A)$$
$$= (75\text{ m/s})^2 + 2(-9.81\text{ m/s}^2)(0 - 40\text{ m})$$
$$v_C = -80.1\text{ m/s} = 80.1\text{ m/s}\downarrow$$

*Nota*: Debe observarse que el cohete está sometido a una *desaceleración* desde $A$ hasta $B$ de 9.81 m/s², y luego desde $B$ hasta $C$ es *acelerado* con este valor. Además, aunque el cohete alcanza momentáneamente el *reposo* en $B$ ($v_B = 0$), ¡la aceleración en $B$ es de 9.81 m/s² hacia abajo!

## EJEMPLO 12.4

Una partícula metálica está sometida a la influencia de un campo magnético al viajar hacia abajo a través de un fluido que se extiende desde la placa $A$ hasta la placa $B$, figura 12-5. Si la partícula es liberada del reposo en el punto medio $C$, $s = 100$ mm, y la aceleración es $a = (4s)$ m/s$^2$, donde $s$ está en metros, determine la velocidad de la partícula cuando llega a la placa $B$, $s = 200$ mm, y el tiempo que necesita para viajar de $C$ a $B$.

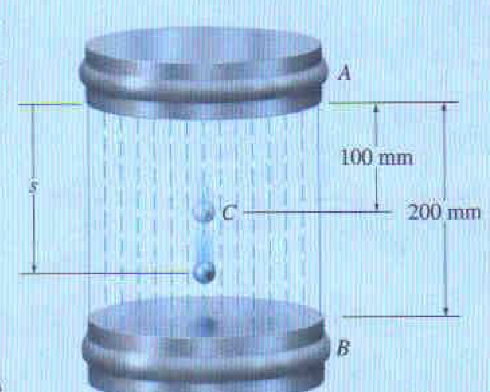



Fig. 12-5

### Solución

*Sistema coordenado.* Como se muestra en la figura 12-5, $s$ se toma positiva hacia abajo, medida desde la placa $A$.

*Velocidad.* Como $a = f(s)$, la velocidad como función de la posición se puede obtener usando $v\,dv = a\,ds$. ¿Por qué no usar las fórmulas para aceleración constante? Observando que $v = 0$ en $s = 100$ mm $= 0.1$ m, tenemos

$(+\downarrow)$
$$v\,dv = a\,ds$$
$$\int_0^v v\,dv = \int_{0.1}^s 4s\,ds$$
$$\frac{1}{2}v^2\Big|_0^v = \frac{4}{2}s^2\Big|_{0.1}^s$$
$$v = 2(s^2 - 0.01)^{1/2} \quad (1)$$

En $s = 200$ mm $= 0.2$ m,

$$v_B = 0.346 \text{ m/s} = 346 \text{ mm/s} \downarrow$$ *Resp.*

Seleccionamos la raíz positiva porque la partícula está viajando hacia abajo, esto es, en la dirección $+s$.

*Tiempo.* El tiempo para que la partícula viaje de $C$ a $B$ se puede obtener usando $v = ds/dt$ y la ecuación 1, donde $s = 0.1$ m cuando $t = 0$. Con base en el apéndice $A$,

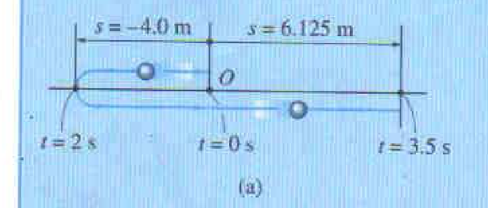
$(+\downarrow)$
$$ds = v\,dt$$
$$= 2(s^2 - 0.01)^{1/2}\,dt$$
$$\int_{0.1}^s \frac{ds}{(s^2 - 0.01)^{1/2}} = \int_0^t 2\,dt$$
$$\ln\left(\sqrt{s^2 - 0.01} + s\right)\Big|_{0.1}^s = 2t\Big|_0^t$$
$$\ln\left(\sqrt{s^2 - 0.01} + s\right) + 2.33 = 2t$$

En $s = 200$ mm $= 0.2$ m,

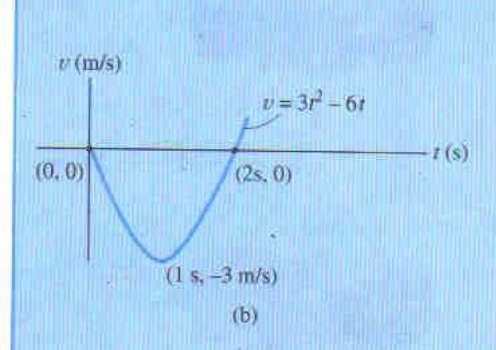
$$t = \frac{\ln\left(\sqrt{(0.2)^2 - 0.01} + 0.2\right) + 2.33}{2} = 0.658 \text{ s}$$ *Resp.*

## EJEMPLO 12.5

Una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria horizontal con velocidad de $v = (3t^2 - 6t)$ m/s, donde $t$ es el tiempo en segundos. Si inicialmente la partícula se ubica en el origen $O$, determine la distancia viajada en 3.5 s; también calcule la velocidad promedio y la rapidez promedio durante este intervalo de tiempo.



(a)



(b)

Fig. 12-6

### Solución

***Sistema coordenado.*** Supondremos aquí que el movimiento es positivo hacia la derecha y que es medido desde el origen $O$, figura 12-6*a*.

***Distancia viajada.*** Ya que $v = f(t)$, la posición como una función del tiempo puede encontrarse integrando $v = ds/dt$ con $t = 0, s = 0$.

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad ds = v\,dt$$
$$= (3t^2 - 6t)\,dt$$
$$\int_0^s ds = 3\int_0^t t^2\,dt - 6\int_0^t t\,dt$$
$$s = (t^3 - 3t^2)\text{ m} \qquad (1)$$

Para determinar la distancia viajada en 3.5 s, es necesario investigar la trayectoria del movimiento. La gráfica de la función velocidad, figura 12-6*b*, revela que para $0 \leq t < 2$ s, la velocidad es *negativa*, lo cual significa que la partícula está viajando hacia la *izquierda*, y para $t > 2$ s la velocidad es *positiva*, y por tanto la partícula está viajando hacia la *derecha*. Además, $v = 0$ en $t = 2$ s. La posición de la partícula cuando $t = 0$, $t = 2$ s y $t = 3.5$ s puede ser determinada con la ecuación 1. Obtenemos

$$s|_{t=0} = 0 \qquad s|_{t=2\text{ s}} = -4.0\text{ m} \qquad s|_{t=3.5\text{ s}} = 6.125\text{ m}$$

La trayectoria se muestra en la figura 12-6*a*. Por consiguiente, la distancia viajada en 3.5 s es

$$s_T = 4.0 + 4.0 + 6.125 = 14.125\text{ m} = 14.1\text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

***Velocidad.*** El *desplazamiento* desde $t = 0$ hasta $t = 3.5$ s es

$$\Delta s = s|_{t=3.5\text{ s}} - s|_{t=0} = 6.12 - 0 = 6.12\text{ m}$$

y la velocidad promedio es

$$v_{\text{prom}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{6.12}{3.5 - 0} = 1.75\text{ m/s} \rightarrow \qquad \textit{Resp.}$$

La rapidez promedio se define en términos de la *distancia viajada* $s_T$. Este escalar positivo es

$$(v_{\text{rap}})_{\text{prom}} = \frac{s_T}{\Delta t} = \frac{14.125}{3.5 - 0} = 4.04\text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

# PROBLEMAS

**12-1.** Un ciclista parte del reposo y después de viajar a lo largo de una trayectoria recta una distancia de 20 m alcanza una rapidez de 30 km/h. Determine su aceleración si ésta es *constante*. Calcule también cuánto le toma alcanzar la rapidez de 30 km/h.

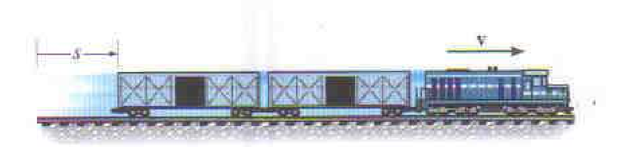
**12-2.** Un automóvil parte del reposo y alcanza una rapidez de 80 pies/s después de viajar 500 pies a lo largo de un camino recto. Determine su aceleración constante y el tiempo de viaje.

**12-3.** Una pelota de béisbol es lanzada hacia abajo desde una torre de 50 pies con una rapidez inicial de 18 pies/s. Determine la rapidez con que la pelota toca el suelo y el tiempo de viaje.

***12-4.** Una partícula viaja a lo largo de una línea recta de modo que en 2 s se mueve desde una posición inicial $s_A = +0.5$ m a una posición $s_B = -1.5$ m. Luego, en otros 4 s, la partícula se mueve de $s_B$ a $s_C = +2.5$ m. Determine la velocidad promedio y la rapidez promedio de la partícula durante el intervalo de tiempo de 6 s.

**12-5.** Viajando con rapidez inicial de 70 km/h, un automóvil acelera a 6000 km/h$^2$ a lo largo de un camino recto. ¿Cuánto tardará en alcanzar una rapidez de 120 km/h? ¿Qué distancia recorre el automóvil durante este tiempo?

**12-6.** Un tren de carga viaja a $v = 60(1 - e^{-t})$ pies/s, donde $t$ es el tiempo transcurrido en segundos. Determine la distancia recorrida en tres segundos y la aceleración en este tiempo.




Prob. 12–6

**12-7.** La posición de una partícula a lo largo de una línea recta está dada por $s = (t^3 - 9t^2 + 15t)$ pies, donde $t$ está en segundos. Determine su máxima aceleración y su máxima velocidad durante el intervalo de tiempo $0 \leq t \leq 10$ s.

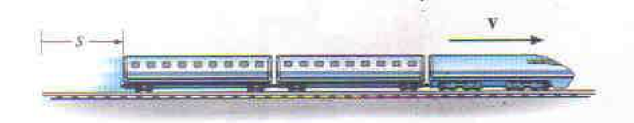
***12-8.** ¿Desde aproximadamente qué piso de un edificio debe dejarse caer un automóvil a partir de su posición de reposo de manera que llegue al suelo con una rapidez de 80.7 pies/s (55 mi/h)? Cada piso es 12 pies más alto que el inferior. (*Nota*: Tal vez le interese recordar esto cuando viaje a 55 mi/h.)

**12-9.** Un automóvil va a ser levantado mediante un elevador al cuarto piso de un estacionamiento que está a 48 pies sobre el nivel de la calle. Si el elevador puede acelerar a 0.6 pies/s$^2$, desacelerar a 0.3 pies/s$^2$, y alcanzar una rapidez máxima de 8 pies/s, determine el tiempo más corto en que puede efectuarse el levantamiento, partiendo del reposo y terminando también en reposo.

**12-10.** Una partícula viaja en línea recta de modo que por un corto tiempo de $2 \text{ s} \leq t \leq 6$ s su movimiento es descrito por $v = (4/a)$ pies/s, donde $a$ está en pies/s$^2$. Si $v = 6$ pies/s cuando $t = 2$ s, determine la aceleración de la partícula cuando $t = 3$ s.

**12-11.** La aceleración de una partícula al moverse a lo largo de una línea recta está dada por $a = (2t - 1)$ m/s$^2$, donde $t$ está en segundos. Si $s = 1$ m y $v = 2$ m/s cuando $t = 0$, determine la velocidad y la posición de la partícula cuando $t = 6$ s. Determine también la distancia total que la partícula viaja durante este periodo.

***12-12.** Cuando un tren está viajando a lo largo de una vía recta a 2 m/s, comienza a acelerar a $a = (60\,v^{-4})$ m/s$^2$, donde $v$ está en m/s. Determine su velocidad $v$ y su posición 3 s después de iniciar la aceleración.




Prob. 12–12

**12-13.** La posición de una partícula a lo largo de una línea recta está dada por $s = (1.5t^3 - 13.5t^2 + 22.5t)$ pies, donde $t$ está en segundos. Determine la posición de la partícula cuando $t = 6$ s y la distancia total que viaja durante el intervalo de 6 s. *Sugerencia*: Grafique la trayectoria para determinar la distancia total recorrida.

**12-14.** La posición de una partícula sobre una línea recta está dada por $s = (t^3 - 9t^2 + 15t)$ pies, donde $t$ está en segundos. Determine la posición de la partícula cuando $t = 6$ s y la distancia total que viaja durante el intervalo de 6 s. *Sugerencia*: Grafique la trayectoria para determinar la distancia total recorrida.

**12-15.** Una partícula viaja hacia la derecha a lo largo de una línea recta con velocidad $v = [5/(4 + s)]$ m/s, donde $s$ está en metros. Determine su posición cuando $t = 6$ s si $s = 5$ m cuando $t = 0$.

***12-16.** Una partícula viaja hacia la derecha a lo largo de una línea recta con velocidad $v = [5/(4 + s)]$ m/s, donde $s$ está en metros. Determine su desaceleración cuando $s = 2$ m.

**12-17.** Dos partículas $A$ y $B$ parten del reposo en el origen $s = 0$ y se mueven a lo largo de una línea recta de tal manera que $a_A = (6t - 3)$ pies/s$^2$ y $a_B = (12t^2 - 8)$ pies/s$^2$, donde $t$ está en segundos. Determine la distancia entre ellas cuando $t = 4$ s y la distancia total que cada una ha viajado en $t = 4$ s.

**12-18.** Un automóvil parte del reposo y se mueve a lo largo de una línea recta con una aceleración de $a = (3s^{-1/3})$ m/s$^2$, donde $s$ está en metros. Determine la aceleración del automóvil cuando $t = 4$ s.

**12-19.** Una piedra $A$ es dejada caer desde el reposo por un pozo, y 1 s después otra piedra $B$ es dejada caer también partiendo del reposo. Determine la distancia entre las piedras un segundo después.

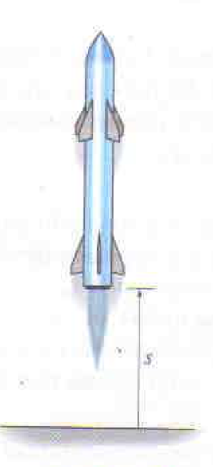
***12-20.** Una piedra $A$ es dejada caer desde el reposo por un pozo, y 1 s después es dejada caer desde el reposo otra piedra $B$. Determine el intervalo de tiempo entre el instante en que $A$ toca el agua y en el que lo hace $B$. ¿Con qué rapidez tocan el agua las piedras?



Probs. 12–19/20

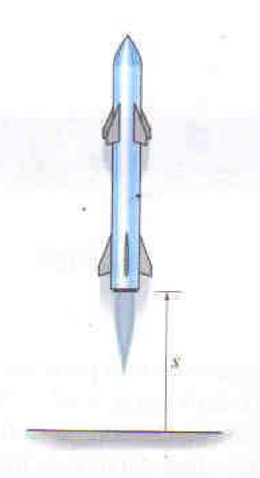
**12-21.** Una partícula viaja en línea recta con movimiento acelerado tal que $a = -ks$, donde $s$ es la distancia desde el punto de inicio y $k$ es una constante de proporcionalidad que debe ser determinada. En $s = 2$ pies la velocidad es de 4 pies/s, y en $s = 3.5$ pies la velocidad es de 10 pies/s. ¿Cuál es el valor de $s$ cuando $v = 0$?

**12-22.** La aceleración de un cohete viajando hacia arriba está dada por $a = (6 + 0.02s)$ m/s$^2$, donde $s$ está en metros. Determine la velocidad del cohete cuando $s = 2$ km y el tiempo necesario para alcanzar esta altura. Inicialmente, $v = 0$ y $s = 0$ cuando $t = 0$.



Prob. 12–22

**12-23.** La aceleración de un cohete viajando hacia arriba está dada por $a = (6 + 0.02s)$ m/s$^2$, donde $s$ está en metros. Determine el tiempo necesario para que el cohete alcance una altura de $s = 100$ m. Inicialmente, $v = 0$ y $s = 0$ cuando $t = 0$.

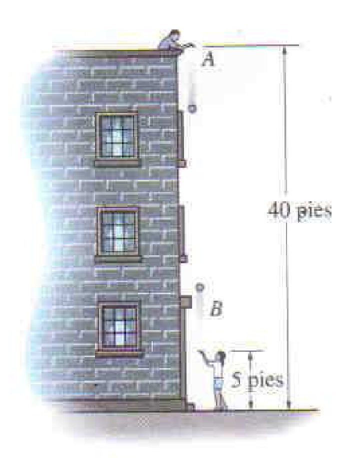


Prob. 12–23

*12-24. En $t = 0$ una bala $A$ es disparada verticalmente con velocidad inicial de 450 m/s. Cuando $t = 3$ s, otra bala $B$ es disparada hacia arriba con velocidad inicial de 600 m/s. Determine el tiempo $t$, después de que $A$ es disparada, en que la bala $B$ pasa a la bala $A$. ¿A qué altura ocurre esto?

■12-25. Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con aceleración $a = 5/(3s^{1/3} + s^{5/2})$ m/s², donde $s$ está en metros. Determine la velocidad de la partícula cuando $s = 2$ m si parte del reposo cuando $s = 1$ m. Use la regla de Simpson para evaluar la integral.

12-26. Una bola $A$ es liberada del reposo a una altura de 40 pies al mismo tiempo que una segunda bola $B$ es lanzada hacia arriba desde 5 pies con respecto al suelo. Si las bolas pasan una frente a la otra a una altura de 20 pies, determine la rapidez con que la bola $B$ fue lanzada hacia arriba.




Prob. 12–26

■12-27. Un proyectil, inicialmente en el origen, se mueve verticalmente hacia abajo a lo largo de una trayectoria en línea recta por un medio fluido tal que su velocidad es definida por $v = 3(8e^{-t} + t)^{1/2}$ m/s, donde $t$ está en segundos. Grafique la posición $s$ del proyectil durante los primeros 2 segundos. Use el método de Runge-Kutta para evaluar $s$ con valores incrementales de $h = 0.25$ s.

*12-28. La aceleración de una partícula a lo largo de una línea recta es definida por $a = (2t - 9)$ m/s², donde $t$ está en segundos. En $t = 0$, $s = 1$ m y $v = 10$ m/s. Cuando $t = 9$ s, determine (a) la posición de la partícula, (b) la distancia total viajada, y (c) la velocidad.

12-29. Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta y cuando está en el origen tiene velocidad de 4 m/s. Si esta partícula empieza a desacelerar a razón de $a = (-1.5v^{1/2})$ m/s², donde $v$ está en m/s, determine la distancia que viaja antes de detenerse.

12-30. Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta con aceleración $a = 5/(3s^{1/3} + s^{5/2})$ m/s², donde $s$ está en metros. Determine la velocidad de la partícula cuando $s = 2$ m si parte del reposo cuando $s = 1$ m. Use la regla de Simpson para evaluar la integral.

12-31. Determine el tiempo requerido para que un automóvil viaje 1 km a lo largo de un camino si parte del reposo, alcanza una rapidez máxima en algún punto intermedio, y luego se detiene al final del camino. El automóvil puede acelerar a 1.5 m/s² y desacelerar a 2 m/s².

*12-32. Cuando dos automóviles $A$ y $B$ están uno junto al otro, viajan en la misma dirección con rapidez $v_A$ y $v_B$, respectivamente. Si $B$ mantiene su rapidez constante, mientras que $A$ empieza a desacelerar a $a_A$, determine la distancia $d$ entre los automóviles en el instante en que $A$ se detiene.




Prob. 12–32

**12-33.** Si los efectos de la resistencia atmosférica son tomados en cuenta, un cuerpo cayendo libremente tiene una aceleración definida por la ecuación $a = 9.81[1 - v^2(10^{-4})]$ m/s$^2$, donde $v$ está en m/s y la dirección positiva es hacia abajo. Si el cuerpo es soltado del reposo desde una *gran altura*, determine (a) la velocidad cuando $t = 5$ s, y (b) la velocidad terminal o máxima alcanzable (cuando $t \rightarrow \infty$).

**12-34.** Cuando un cuerpo es lanzado a una gran altitud por encima de la *superficie* de la Tierra, la variación de la aceleración de la gravedad con respecto a la altitud $y$ debe tomarse en cuenta. Ignorando la resistencia del aire, esta aceleración es determinada por la fórmula $a = -g_0[R^2/(R + y)^2]$, donde $g_0$ es la aceleración gravitatoria constante al nivel del mar, $R$ es el radio de la Tierra, y la dirección positiva se mide hacia arriba. Si $g_0 = 9.81$ m/s$^2$ y $R = 6356$ km, determine la velocidad inicial mínima (velocidad de escape) con la que el proyectil debe ser disparado verticalmente desde la superficie de la Tierra de manera que no caiga de regreso a ésta. *Sugerencia*: Se requiere que $v = 0$ cuando $y \rightarrow \infty$.

**12-35.** Tomando en cuenta la variación de la aceleración gravitatoria $a$ con respecto a la altitud $y$ (vea el Prob. 12-34), obtenga una ecuación que relacione la velocidad de una partícula en caída libre con su altitud. Suponga que la partícula es liberada del reposo a una altitud $y_0$ con respecto a la superficie de la Tierra. ¿Con qué velocidad llega la partícula a la superficie de la Tierra si es liberada del reposo a una altitud $y_0 = 500$ km? Use los datos numéricos del problema 12-34.

***12-36.** Cuando una partícula cae a través del aire, su aceleración inicial $a = g$ disminuye hasta que es cero, y de ahí en adelante cae con una velocidad $v_f$ terminal o constante. Si esta variación de la aceleración puede ser expresada como $a = (g/v_f^2)(v_f^2 - v^2)$, determine el tiempo necesario para que la velocidad se vuelva $v < v_f$. Inicialmente la partícula cae del reposo.

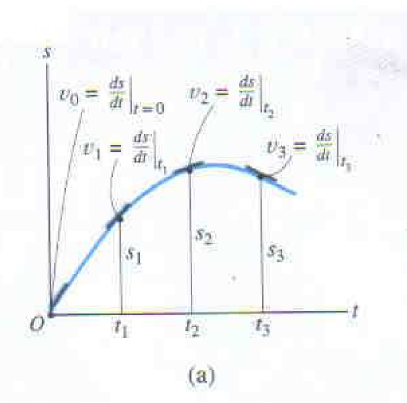
## 12.3 Cinemática rectilínea: Movimiento errático

Cuando el movimiento de una partícula es errático durante cierto periodo, puede ser difícil obtener una función matemática continua para describir su posición, velocidad o aceleración. En tal caso, es mejor describirlo gráficamente usando una serie de curvas que pueden ser generadas experimentalmente a partir de la salida de una computadora. Si la gráfica resultante describe la relación entre dos cualesquiera de las variables $a$, $v$, $s$, $t$, puede establecerse una gráfica que describa la relación entre las otras variables usando las ecuaciones cinemáticas $a = dv/dt$, $v = ds/dt$, $a\,ds = v\,dv$. Son varias las situaciones que ocurren a menudo.

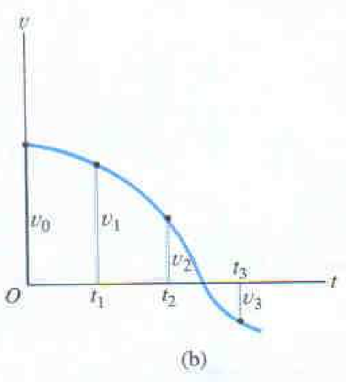
**Dada la gráfica $s-t$, construir la gráfica $v-t$.** Si la posición de una partícula puede ser *determinada experimentalmente* durante un periodo de tiempo $t$, puede construirse la gráfica $s-t$ para la partícula, figura 12-7*a*. Para determinar la velocidad de la partícula como función del tiempo, es to es, la gráfica $v-t$, debemos usar $v = ds/dt$ ya que esta ecuación relaciona a $v$, $s$ y $t$. Por tanto, la velocidad en cualquier instante es determinada midiendo la *pendiente* de la gráfica $s-t$, es decir,

$$\frac{ds}{dt} = v$$

pendiente de la gráfica $s-t$ = velocidad




(a)




(b)

**Fig. 12–7**

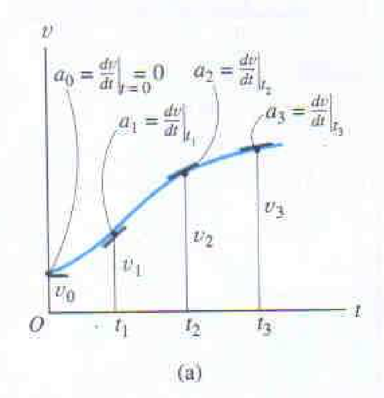
Por ejemplo, la medición de las pendientes $v_0, v_1, v_2, v_3$ en los puntos intermedios $(0, 0)$, $(t_1, s_1)$, $(t_2, s_2)$, $(t_3, s_3)$ sobre la gráfica $s-t$, figura 12-7*a*, da los puntos correspondientes sobre la gráfica $v-t$ mostrada en la figura 12-7*b*.

También puede ser posible establecer *matemáticamente* la gráfica $v-t$, siempre que los segmentos de la gráfica $s-t$ puedan ser expresados en forma de ecuaciones $s = f(t)$. Las ecuaciones correspondientes que describen los segmentos de la gráfica $v-t$ son entonces determinadas por *diferenciación* con respecto al tiempo, ya que $v = ds/dt$.

**Dada la gráfica $v-t$, construir la gráfica $a-t$.** Cuando se conoce la gráfica $v-t$ de la partícula, como en la figura 12-8*a*, la aceleración como función del tiempo, esto es, la gráfica $a-t$, puede ser determinada usando $a = dv/dt$. (¿Por qué?) Por consiguiente, la aceleración en cualquier instante es determinada midiendo la pendiente de la gráfica $v-t$, es decir,

$$\frac{dv}{dt} = a$$

pendiente de la gráfica $v-t$ = aceleración

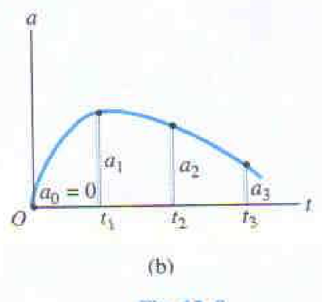



(a)

Por ejemplo, la medición de las pendientes $a_0, a_1, a_2, a_3$ en los puntos intermedios $(0, v_0)$, $(t_1, v_1)$, $(t_2, v_2)$, $(t_3, v_3)$ sobre la gráfica $v-t$, figura 12-8*a*, da los puntos correspondientes sobre la gráfica $a-t$ mostrada en la figura 12-8*b*.

Cualquier segmento de la gráfica $a-t$ puede ser determinado también *matemáticamente*, siempre que las ecuaciones de los correspondientes segmentos de la gráfica $v-t$ sean conocidas, $v = g(t)$. Esto se hace tomando simplemente la *derivada* con respecto al tiempo de $v = g(t)$, ya que $a = dv/dt$.

Como la diferenciación reduce un polinomio de grado $n$ a uno de grado $n - 1$, entonces, si la gráfica $s-t$ es parabólica (curva de segundo grado), la gráfica $v-t$ será una línea inclinada (curva de primer grado), y la gráfica $a-t$ será una constante o una línea horizontal (curva de grado cero).




(b)

**Fig. 12–8**

## EJEMPLO 12.6

Una bicicleta se mueve a lo largo de un camino recto en forma tal que su posición es descrita por la gráfica mostrada en la figura 12-9$a$. Construya las gráficas $v-t$ y $a-t$ para $0 \leq t \leq 30$ s.

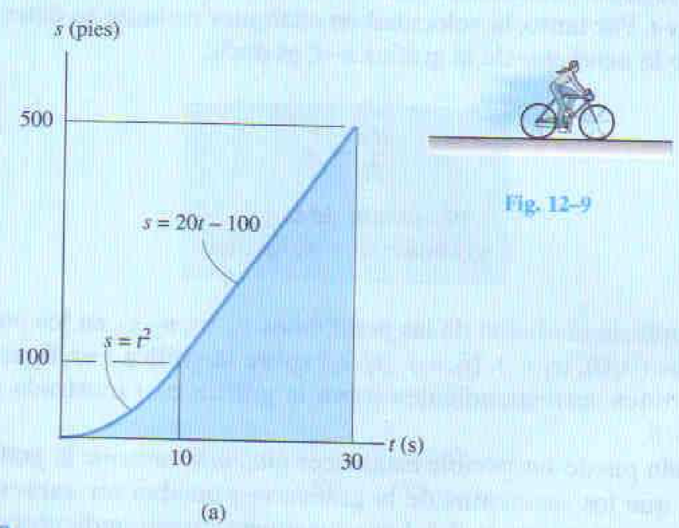


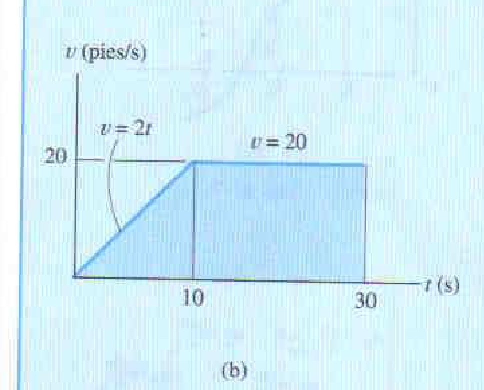

Fig. 12-9

### Solución

*Gráfica v−t.* Como $v = ds/dt$, la gráfica $v-t$ puede ser determinada diferenciando las ecuaciones que definen la gráfica $s-t$, figura 12-9$a$. Tenemos

$$0 \leq t < 10 \text{ s}; \qquad s = t^2 \qquad v = \frac{ds}{dt} = 2t$$

$$10 \text{ s} < t \leq 30 \text{ s}; \qquad s = 20t - 100 \qquad v = \frac{ds}{dt} = 20$$




Los resultados están graficados en la figura 12−9$b$. También podemos obtener valores específicos de $v$ midiendo la *pendiente* de la gráfica $s-t$ en un instante dado. Por ejemplo, en $t = 20$ s, la pendiente de la gráfica $s-t$ es determinada desde la línea recta de 10 s hasta 30 s, es decir,

$$t = 20 \text{ s}; \qquad v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{500 - 100}{30 - 10} = 20 \text{ pies/s}$$

*Gráfica a−t.* Como $a = dv/dt$, la gráfica $a-t$ puede ser determinada diferenciando las ecuaciones que definen las líneas de la gráfica $v-t$. Esto da

$$0 \leq t < 10 \text{ s}; \qquad v = 2t \qquad a = \frac{dv}{dt} = 2$$

$$10 < t \leq 30 \text{ s}; \qquad v = 20 \qquad a = \frac{dv}{dt} = 0$$

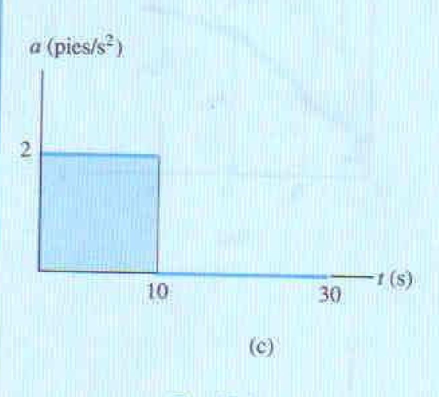



Fig. 12-9

Los resultados están graficados en la figura 12-9$c$. Demuestre que $a = 2$ pies/s$^2$ cuando $t = 5$ s midiendo la pendiente de la gráfica $v-t$.

**Dada la gráfica $a-t$, construir la gráfica $v-t$.** Si la gráfica $a-t$ está dada, figura 12-10$a$, la gráfica $v-t$ puede ser construida usando $a = dv/dt$, escrita en forma integrada como

$$\Delta v = \int a\,dt$$

cambio en velocidad = área bajo la gráfica $a$–$t$

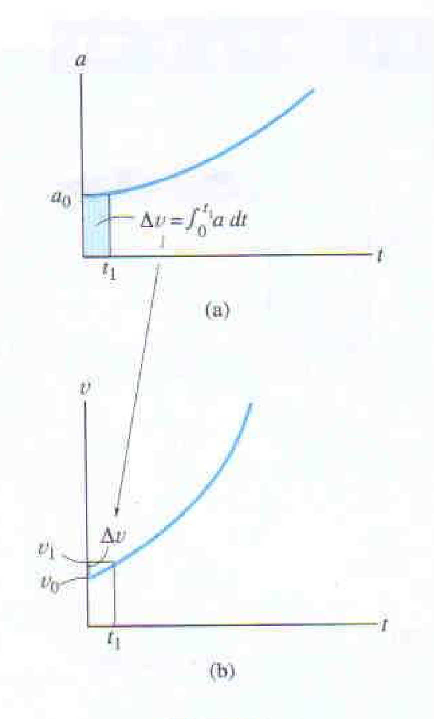



Fig. 12–10

Por consiguiente, para construir la gráfica $v-t$, comenzamos por determinar la velocidad inicial de la partícula $v_0$ y luego sumamos a ésta pequeños incrementos de área ($\Delta v$) determinados a partir de la gráfica $a-t$. De esta manera, puntos sucesivos, $v_1 = v_0 + \Delta v$, etc., para la gráfica $v-t$ son determinados, figura 12-10$b$. Advierta que es necesaria una adición algebraica de los incrementos de área, ya que áreas por arriba del eje $t$ corresponden a un incremento en $v$ (área "positiva"), mientras que aquellas localizadas por abajo del eje indican una disminución en $v$ (área "negativa").

Si segmentos de la gráfica $a-t$ pueden ser descritos mediante una serie de ecuaciones, entonces cada una de esas ecuaciones puede ser *integrada* para dar ecuaciones que describan los segmentos correspondientes de la gráfica $v-t$. Por tanto, si la gráfica $a-t$ es lineal (una curva de primer grado), la integración dará una gráfica $v-t$ parabólica (una curva de segundo grado), etcétera.

**Dada la gráfica $v-t$, construir la gráfica $s-t$.** Cuando la gráfica $v-t$ está dada, figura 12-11$a$, es posible determinar la gráfica $s-t$ usando $v = ds/dt$, escrita en forma integrada

$$\Delta s = \int v\,dt$$

desplazamiento = área bajo la gráfica $v-t$

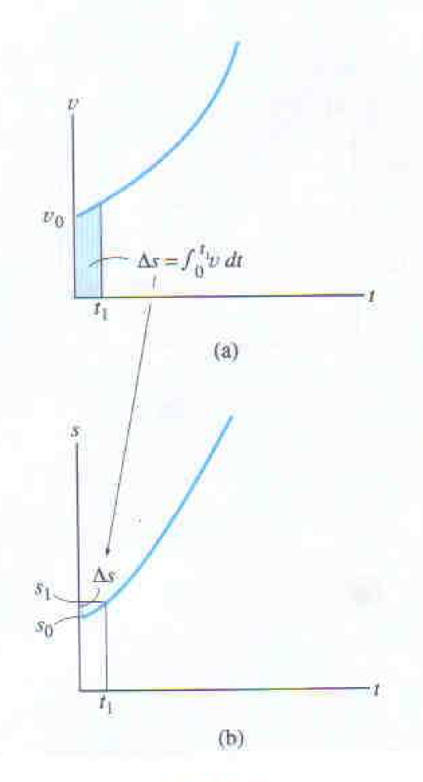
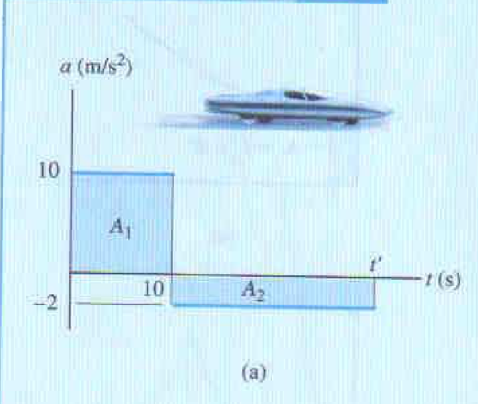



Fig. 12–11

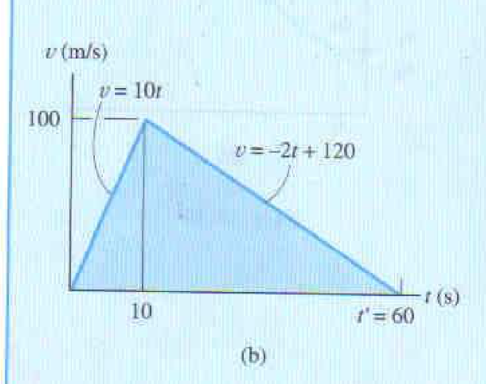
Igual que líneas arriba, comenzamos por determinar la posición inicial de la partícula $s_0$ y sumamos (algebraicamente) a ésta pequeños incrementos de área $\Delta s$ determinados a partir de la gráfica $v-t$, figura 12-11$b$.

Si es posible describir segmentos de la gráfica $v-t$ mediante una serie de ecuaciones, entonces cada una de esas ecuaciones puede ser *integrada* para dar ecuaciones que describan segmentos correspondientes de la gráfica $s-t$.

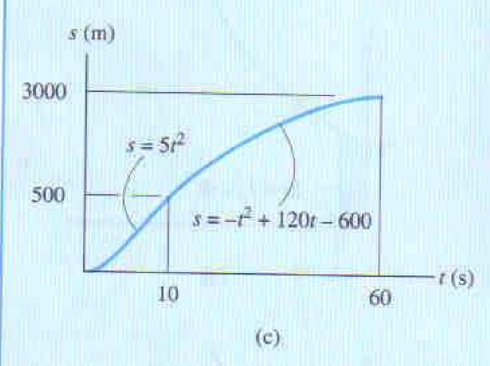
## EJEMPLO 12.7



(a)



(b)



(c)

Fig. 12-12

El automóvil de pruebas mostrado en la figura 12-12*a* parte del reposo y viaja a lo largo de una pista recta acelerando con razón constante durante 10 s y luego desacelerando a razón constante. Trace las gráficas $v-t$ y $s-t$ y determine el tiempo $t'$ requerido para detener el automóvil. ¿Cuánto ha viajado el automóvil?

### Solución

***Gráfica $v-t$.*** Como $dv = a\,dt$, la gráfica $v-t$ es determinada integrando los segmentos de línea recta de la gráfica $a-t$. Usando la *condición inicial* $v = 0$ cuando $t = 0$, tenemos

$$0 \le t < 10\text{ s}; \qquad a = 10; \qquad \int_0^v dv = \int_0^t 10\,dt, \qquad v = 10t$$

Cuando $t = 10$ s, $v = 10(10) = 100$ m/s. Usando esto como la *condición inicial* para el siguiente periodo, tenemos

$$10\text{ s} < t \le t'; \qquad a = -2; \qquad \int_{100}^v dv = \int_{10}^t -2\,dt, \qquad v = -2t + 120$$

Cuando $t = t'$ requerimos $v = 0$. Esto da, figura 12-12*b*,

$$t' = 60\text{ s} \qquad \textit{Resp.}$$

Es posible encontrar una solución más directa para $t'$ observando que el área bajo la gráfica $a-t$ es igual al cambio en la velocidad del automóvil. Requerimos $\Delta v = 0 = A_1 + A_2$, figura 12-12*a*. Entonces

$$0 = 10\text{ m/s}^2(10\text{ s}) + (-2\text{ m/s}^2)(t' - 10\text{ s}) = 0$$
$$t' = 60\text{ s} \qquad \textit{Resp.}$$

***Gráfica $s-t$.*** Como $ds = v\,dt$, integrando las ecuaciones de la gráfica $v-t$ obtenemos las ecuaciones correspondientes de la gráfica $s-t$. Usando las *condiciones iniciales* $s = 0$ cuando $t = 0$, tenemos

$$0 \le t \le 10\text{ s}; \qquad v = 10t; \qquad \int_0^s ds = \int_0^t 10t\,dt, \qquad s = 5t^2$$

Cuando $t = 10$ s, $s = 5(10)^2 = 500$ m. Usando esta *condición inicial*,

$$10\text{ s} \le t \le 60\text{ s}; \qquad v = -2t + 120; \qquad \int_{500}^s ds = \int_{10}^t (-2t + 120)\,dt$$
$$s - 500 = -t^2 + 120t - [-(10)^2 + 120(10)]$$
$$s = -t^2 + 120t - 600$$

Cuando $t' = 60$ s, la posición es

$$s = -(60)^2 + 120(60) - 600 = 3000\text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

La gráfica $s-t$ se muestra en la figura 12-12*c*. Advierta que es posible encontrar una solución directa para $s$ cuando $t' = 60$ s, ya que el *área triangular* bajo la gráfica $v-t$ daría el desplazamiento $\Delta s = s - 0$ desde $t = 0$ hasta $t' = 60$ s. Por consiguiente,

$$\Delta s = \tfrac{1}{2}(60)(100) = 3000\text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

**Dada la gráfica $a-s$, construir la gráfica $v-s$.** En algunos casos puede construirse una gráfica $a-s$ para la partícula, de manera que puntos sobre la gráfica $v-s$ puedan ser determinados usando $v\,dv = a\,ds$. Integrando esta ecuación entre los límites $v = v_0$ en $s = s_0$ y $v = v_1$ en $s = s_1$, tenemos

$$\tfrac{1}{2}(v_1^2 - v_0^2) = \int_{s_0}^{s_1} a\,ds$$

área bajo la gráfica $a-s$

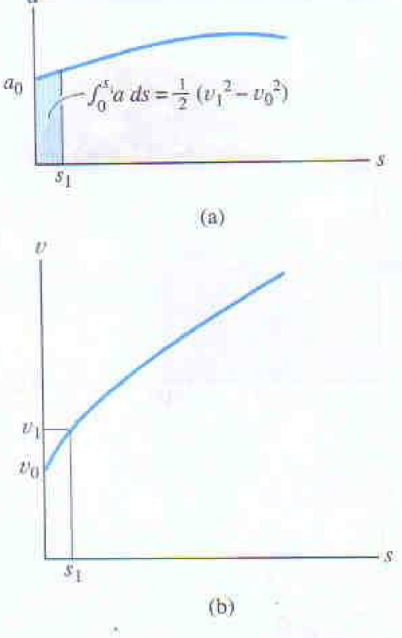





Fig. 12–13

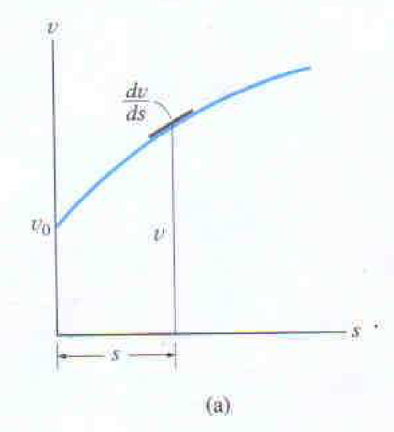
Así, el pequeño segmento inicial de área bajo la gráfica $a-s$, $\int_{s_0}^{s_1} a\,ds$, que se muestra en otro tono en la figura 12-13*a*, es igual a la mitad de la diferencia de los cuadrados de la rapidez, $\frac{1}{2}(v_1^2 - v_0^2)$. Por tanto, si el área está determinada y el valor inicial de $v_0$ en $s_0 = 0$ es conocido, entonces $v_1 = (2\int_{s_0}^{s_1} a\,ds + v_0^2)^{1/2}$, figura 12-13*b*. Puntos sucesivos sobre la gráfica $v-s$ pueden ser construidos de esta manera comenzando con la velocidad inicial $v_0$.

Otra manera de construir la gráfica $v-s$ es determinar primero las ecuaciones que definen los segmentos de la gráfica $a-s$. Luego, usando $v\,dv = a\,ds$, las ecuaciones correspondientes que definen los segmentos de la gráfica $v-s$ pueden obtenerse directamente por integración.

***Dada la gráfica $v-s$, construir la gráfica $a-s$.*** Si la gráfica $v-s$ es conocida, la aceleración $a$ en cualquier posición $s$ puede ser determinada usando $a\,ds = v\,dv$, escrita como

$$a = v\left(\frac{dv}{ds}\right)$$

aceleración = velocidad multiplicada por la pendiente de la gráfica $v-s$



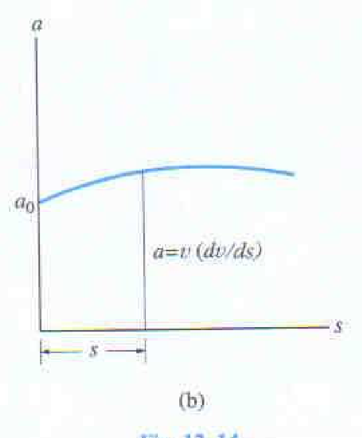




Fig. 12–14

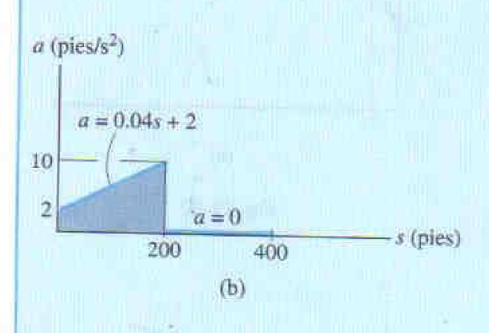
Así, en cualquier punto $(s, v)$ en la figura 12-14*a*, la pendiente $dv/ds$ de la gráfica $v-s$ es medida. Entonces, como $v$ y $dv/ds$ son conocidas, el valor de $a$ puede ser calculado, figura 12-14*b*.

También podemos determinar analíticamente los segmentos que describen la gráfica $a-s$, siempre que las ecuaciones de los segmentos correspondientes de la gráfica $v-s$ sean conocidos. Como antes, esto requiere integración usando $a\,ds = v\,dv$.

## EJEMPLO 12.8

La gráfica $v-s$ que describe el movimiento de una motocicleta se muestra en la figura 12-15*a*. Construya la gráfica $a-s$ del movimiento y determine el tiempo necesario para que la motocicleta alcance la posición $s = 400$ pies.

$v$ (pies/s)
$v = 0.2s + 10$
$v = 50$
50
10
200
400
$s$ (pies)




(b)

**Fig. 12-15**

### Solución

*Gráfica a−s.* Como las ecuaciones para segmentos de la gráfica $v-s$ están dadas, la gráfica $a-s$ puede ser determinada usando $a\,ds = v\,dv$.

$0 \leq s < 200$ pies; $v = 0.2s + 10$

$$a = v\frac{dv}{ds} = (0.2s + 10)\frac{d}{ds}(0.2s + 10) = 0.04s + 2$$

$200 \text{ pies} < s \leq 400$ pies; $v = 50$;

$$a = v\frac{dv}{ds} = (50)\frac{d}{ds}(50) = 0$$

Los resultados están graficados en la figura 12−15*b*.

*Tiempo.* El tiempo se puede obtener usando la gráfica $v-s$ y $v = ds/dt$, porque esta ecuación relaciona a $v$, $s$ y $t$. Para el primer segmento de movimiento, $s = 0$ en $t = 0$, por lo que

$0 \leq s < 200$ pies; $\quad v = 0.2s + 10; \quad dt = \dfrac{ds}{v} = \dfrac{ds}{0.2s + 10}$

$$\int_0^t dt = \int_0^s \frac{ds}{0.2s + 10}$$

$$t = 5\ln(0.2s + 10) - 5\ln 10$$

En $s = 200$ pies, $t = 5\ln[0.2(200) + 10] - 5\ln 10 = 8.05$ s. Por tanto, para el segundo segmento de movimiento,

$200 \text{ pies} < s \leq 400$ pies; $\quad v = 50; \quad dt = \dfrac{ds}{v} = \dfrac{ds}{50}$

$$\int_{8.05}^t dt = \int_{200}^s \frac{ds}{50}$$

$$t - 8.05 = \frac{s}{50} - 4$$

$$t = \frac{s}{50} + 4.05$$

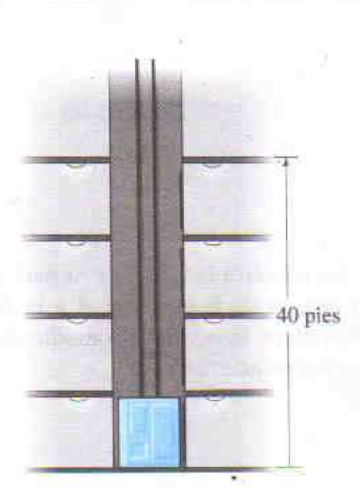
Por tanto, en $s = 400$ pies,

$$t = \frac{400}{50} + 4.05 = 12.0 \text{ s}$$ *Resp.*

# PROBLEMAS

**12-37.** Un avión parte del reposo, viaja 5000 pies por una pista y, después de acelerar uniformemente, despega con una rapidez de 162 mi/h. Luego asciende en línea recta con aceleración uniforme de 3 pies/$s^2$ hasta que alcanza una rapidez constante de 220 mi/h. Trace las gráficas $s-t$, $v-t$ y $a-t$ que describen el movimiento.

**12-38.** El elevador parte del reposo en la planta baja del edificio. Puede acelerar a 5 pies/$s^2$ y luego desacelerar a 2 pies/$s^2$. Determine el tiempo más corto que le toma alcanzar un piso ubicado a 40 pies de la planta baja. El elevador parte del reposo y luego se detiene. Trace las gráficas $a-t$, $v-t$, y $s-t$ para el movimiento.



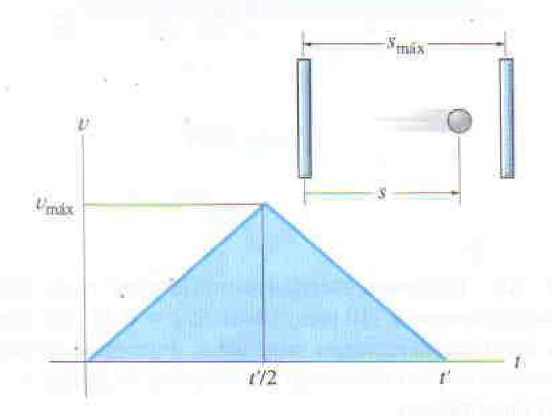

Prob. 12–38

**12-39.** Un tren de carga parte del reposo y viaja con aceleración constante de 0.5 pies/$s^2$. Después de un tiempo $t'$, el tren mantiene una rapidez constante de modo que cuando $t = 160$ s ha viajado 2000 pies. Determine el tiempo $t'$ y trace la gráfica $v-t$ para el movimiento.

***12-40.** Si la posición de una partícula es definida por $s = [2 \operatorname{sen}(\pi/5)t + 4]$ m, donde $t$ está en segundos, construya las gráficas $s-t$, $v-t$ y $a-t$ para $0 \leq t \leq 10$ s.

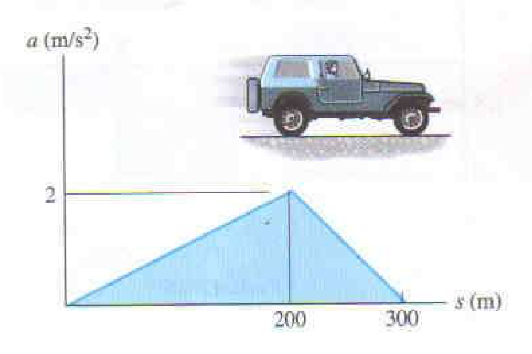
**12-41.** La gráfica $v-t$ para una partícula que se mueve a través de un campo eléctrico de una placa a otra tiene la forma mostrada en la figura. La aceleración y la desaceleración que ocurren son constantes y ambas tienen una magnitud de 4 m/$s^2$. Si las placas están separadas 200 mm, determine la velocidad máxima $v_{máx}$ y el tiempo $t'$ necesarios para que la partícula viaje de una placa a la otra. También trace la gráfica $s-t$. Cuando $t = t'/2$ la partícula está en $s = 100$ mm.

**12-42.** La gráfica $v-t$ para una partícula que se mueve a través de un campo eléctrico de una placa a otra tiene la forma mostrada en la figura, donde $t' = 0.2$ s y $v_{máx} = 10$ m/s. Trace las gráficas $s-t$ y $a-t$ para la partícula. Cuando $t = t'/2$ la partícula está en $s = 0.5$ m.



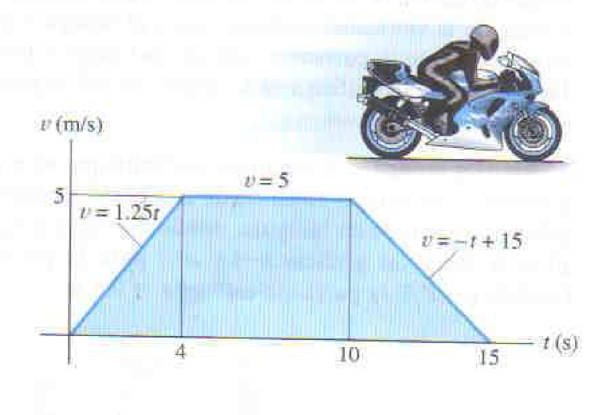

Probs. 12–41/42

**12-43.** Se da la gráfica $a-s$ para los primeros 300 m de recorrido de un jeep que viaja a lo largo de un camino recto. Construya la gráfica $v-s$. En $s = 0$, $v = 0$.

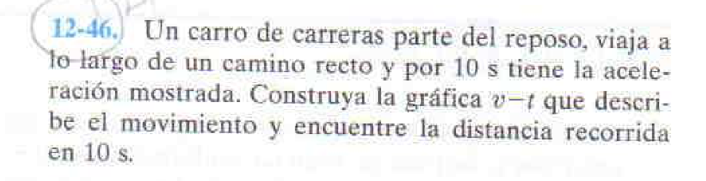



Prob. 12–43

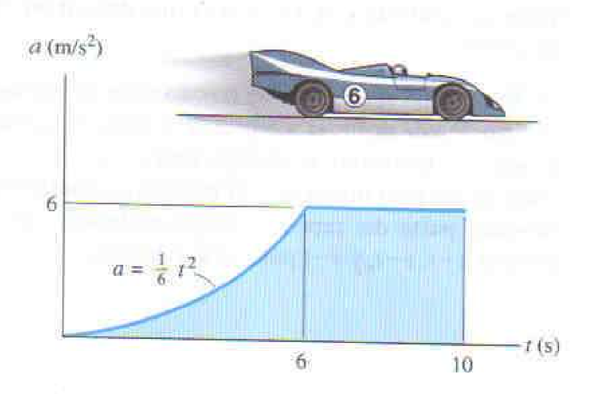
*12-44. Una motocicleta parte del reposo en $s = 0$ y viaja a lo largo de un camino recto con la rapidez mostrada por la gráfica $v-t$. Determine la aceleración y la posición de la motocicleta cuando $t = 8$ s y $t = 12$ s.




Prob. 12–44

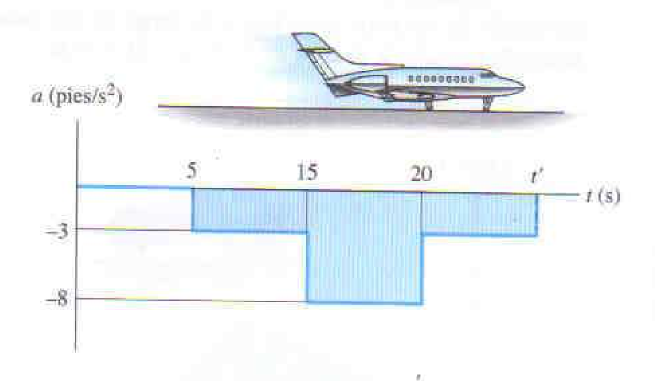


12-46. Un carro de carreras parte del reposo, viaja a lo largo de un camino recto y por 10 s tiene la aceleración mostrada. Construya la gráfica $v-t$ que describe el movimiento y encuentre la distancia recorrida en 10 s.



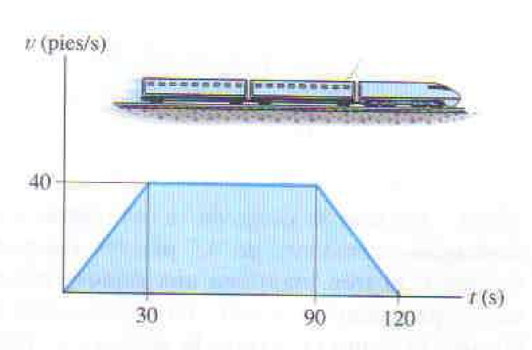

Prob. 12–46

12-45. Un avión aterriza sobre la pista recta, viajando originalmente a 110 pies/s cuando $s = 0$. Si está sometido a las desaceleraciones mostradas, determine el tiempo $t'$ necesario para detenerlo y construya la gráfica $s-t$ para el movimiento.



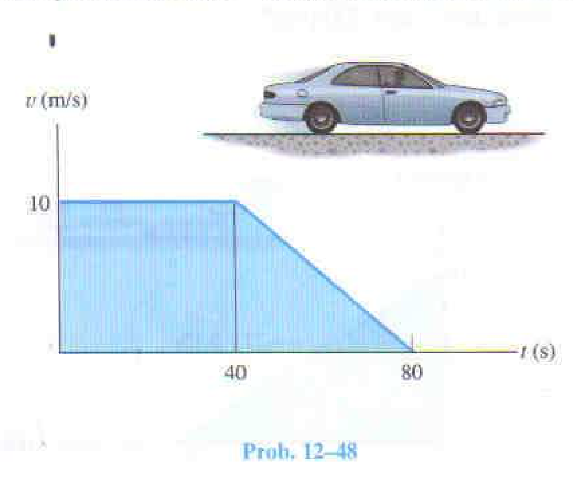

Prob. 12–45

12-47. Se muestra la gráfica $v-t$ para el movimiento de un tren que va de la estación $A$ a la $B$. Trace la gráfica $a-t$ y determine la rapidez promedio del tren y la distancia entre las estaciones.




Prob. 12–47

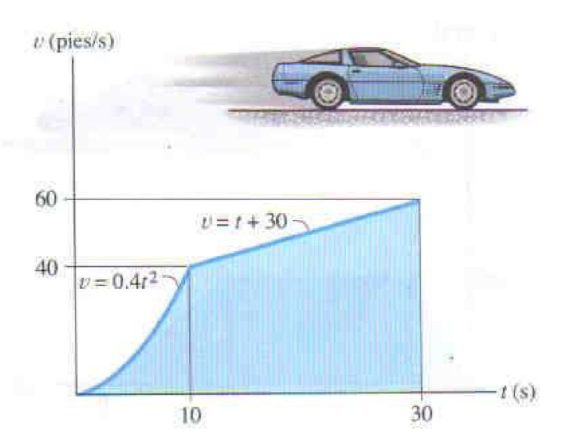
*12-48. La velocidad de un automóvil está graficada como se muestra. Determine la distancia total que recorre hasta que se detiene ($t = 80$ s). Construya la gráfica $a-t$.




Prob. 12–48

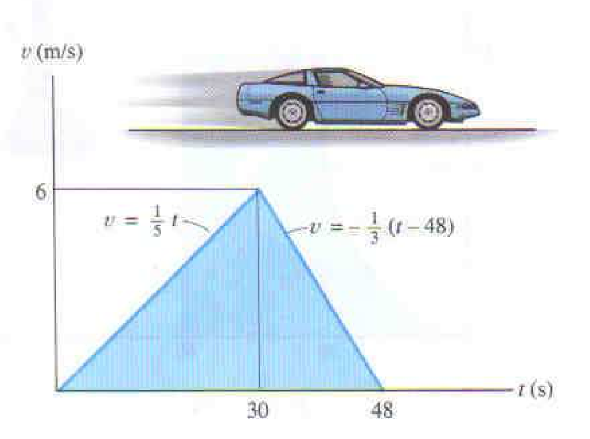
12-49. La gráfica $v-t$ para el movimiento de un automóvil que viaja a lo largo de un camino recto se muestra en la figura. Trace la gráfica $a-t$ y determine la aceleración máxima durante el intervalo de tiempo de 30 s. El automóvil parte del reposo en $s = 0$.

12-50. La gráfica $v-t$ para el movimiento de un automóvil que viaja a lo largo de un camino recto se muestra en la figura. Trace la gráfica $s-t$ y determine la rapidez promedio y la distancia recorrida en el intervalo de tiempo de 30 s. El automóvil parte del reposo en $s = 0$.




Probs. 12–49/50

12-51. Un automóvil viaja a lo largo de una camino recto con la rapidez mostrada por la gráfica $v-t$. Determine la distancia total que recorre hasta que se detiene cuando $t = 48$ s. Trace también las gráficas $s-t$ y $a-t$.

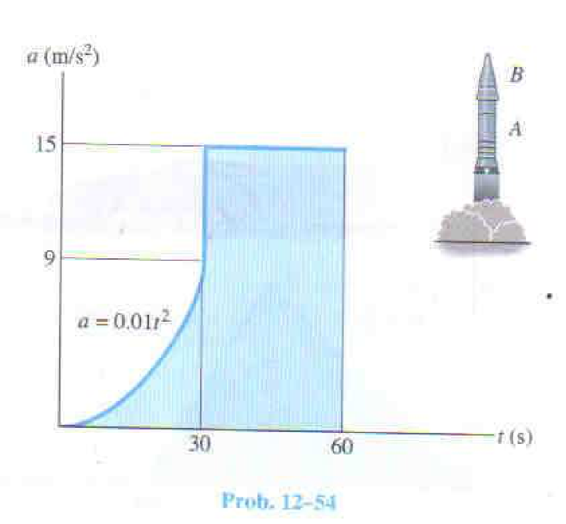



Prob. 12–51

*12-52. Un hombre que viaja hacia arriba en un elevador de carga deja caer accidentalmente un paquete fuera del elevador cuando éste está a 100 pies del suelo. Si el elevador mantiene una rapidez constante hacia arriba de 4 pies/s, determine su altura con respecto al suelo en el instante en que el paquete toca el suelo. Trace la curva $v-t$ para el paquete durante el tiempo en que está en movimiento. Suponga que el paquete fue soltado con la misma rapidez que el elevador lleva hacia arriba.

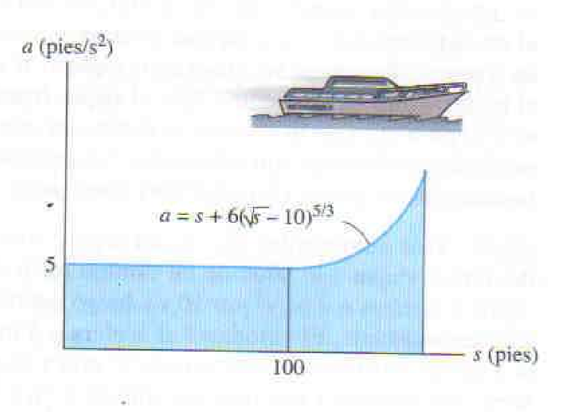
12-53. Dos automóviles parten del reposo uno al lado del otro y viajan a lo largo de un camino recto. El automóvil $A$ acelera a 4 m/s$^2$ por 10 s y luego mantiene una rapidez constante. El automóvil $B$ acelera a 5 m/s$^2$ hasta alcanzar una rapidez constante de 25 m/s y luego mantiene esta rapidez. Construya las gráficas $a-t$, $v-t$ y $s-t$ para cada automóvil hasta $t = 15$ s. ¿Cuál es la distancia entre los dos automóviles cuando $t = 15$ s?

**12-54.** Un cohete de dos etapas es disparado verticalmente desde el reposo en $s = 0$ con la aceleración mostrada. Después de 30 s, la primera etapa $A$ se agota y se enciende la segunda etapa $B$. Trace las gráficas $v-t$ y $s-t$ que describen el movimiento de la segunda etapa para $0 \leq t \leq 60$ s.



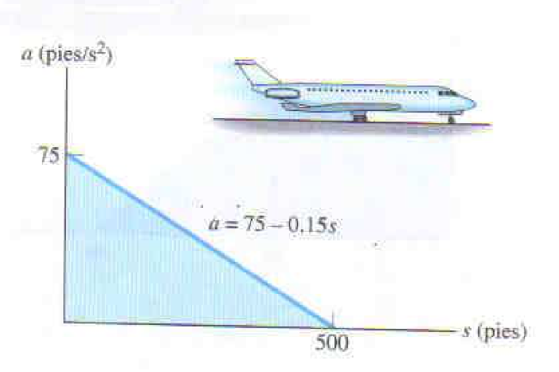

Prob. 12–54

**■12-55.** Se da la gráfica $a-s$ para un bote que viaja a lo largo de una trayectoria recta. Si el bote parte de $s = 0$ cuando $v = 0$, determine su rapidez cuando está en $s = 75$ y 125 pies, respectivamente. Use la regla de Simpson con $n = 100$ para evaluar $v$ en $s = 125$ pies.



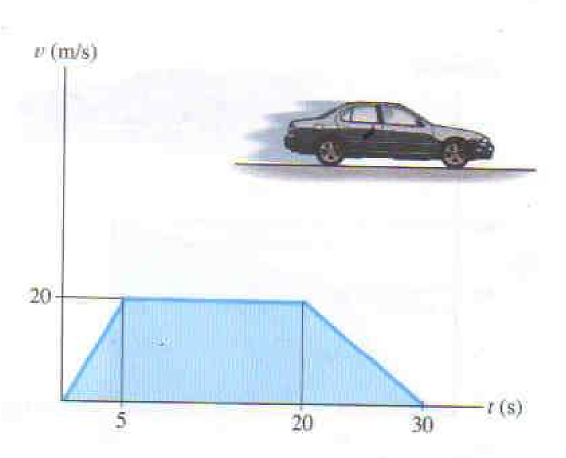

Prob. 12–55

***12-56.** El avión a chorro parte del reposo en $s = 0$ y es sometido a la aceleración mostrada. Determine su rapidez cuando ha viajado 200 pies. ¿Qué tiempo requiere este avión para viajar 200 pies?



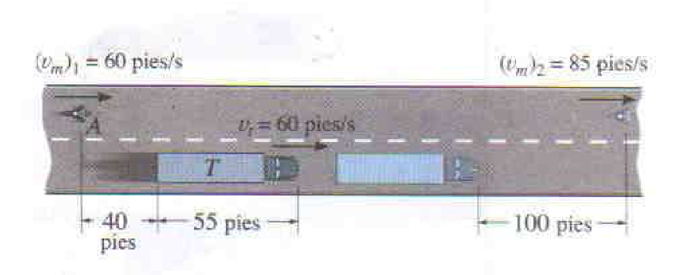

Prob. 12–56

**12-57.** Se muestra la gráfica $v-t$ de un automóvil que viaja a lo largo de un camino. Trace las gráficas $s-t$ y $a-t$ para el movimiento.



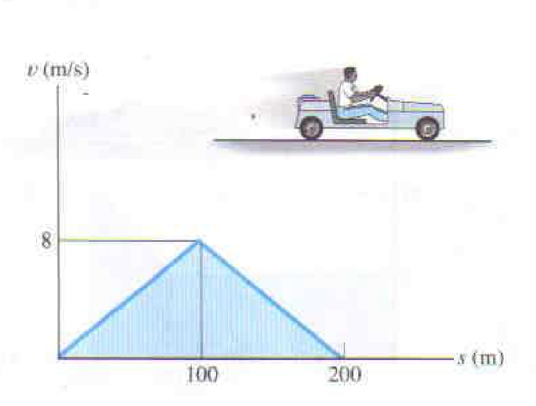

Prob. 12–57

**12-58.** Un motociclista localizado en $A$ va viajando a 60 pies/s cuando quiere pasar el camión $T$ que se desplaza con rapidez constante de 60 pies/s. Para hacerlo, el motociclista acelera a 6 pies/s$^2$ hasta que alcanza una rapidez máxima de 85 pies/s. Si se mantiene esta rapidez, determine el tiempo necesario para que el motociclista alcance un punto localizado a 100 pies por enfrente del camión. Trace las gráficas $v-t$ y $s-t$ para la motocicleta durante este tiempo.



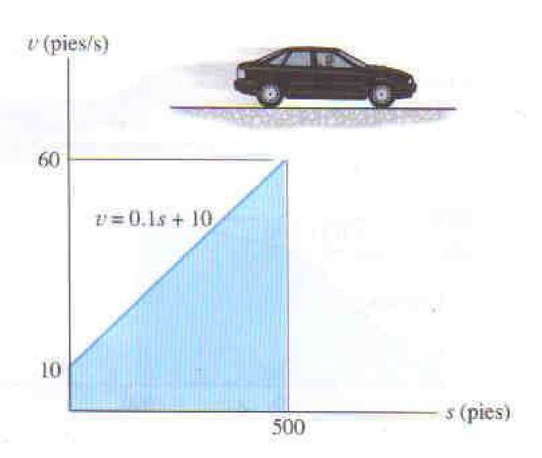

Prob. 12-58

**12-59.** Se muestra la gráfica $v-s$ de un *go-cart* que viaja sobre un camino recto. Determine su aceleración en $s = 50$ m y $s = 150$ m. Trace la gráfica $a-s$.



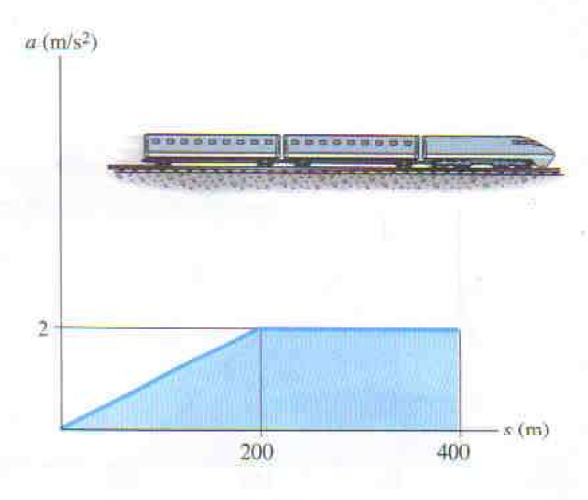

Prob. 12-59

***12-60.** La gráfica $v-s$ para el automóvil está dada para los primeros 500 pies de su movimiento. Construya la gráfica $a-s$ para $0 \leq s \leq 500$ pies. ¿Qué tiempo tarda en viajar la distancia de 500 pies? El automóvil parte de $s = 0$ cuando $t = 0$.



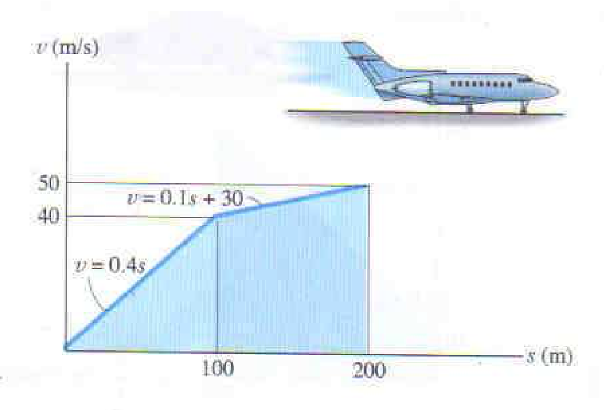

Prob. 12-60

**12-61.** La gráfica $a-s$ para un tren que viaja a lo largo de una vía recta está dada para los primeros 400 m de su movimiento. Trace la gráfica $v-s$. $v = 0$ en $s = 0$.



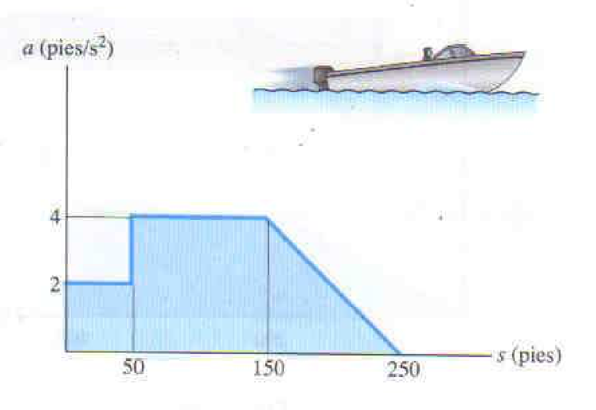

Prob. 12-61

**12-62.** La gráfica $v-s$ es la de un avión que viaja sobre una pista de despegue recta. Determine la aceleración del avión en $s = 100$ m y $s = 150$ m. Trace la gráfica $a-s$.



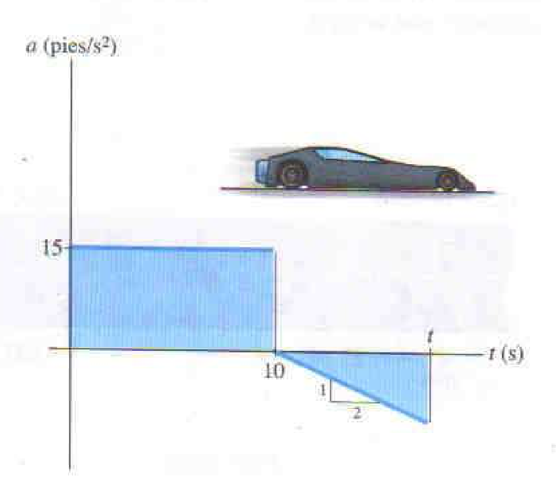

Prob. 12-62

**12-63.** Partiendo del reposo en $s = 0$, un bote viaja en línea recta con una aceleración como se muestra en la gráfica $a-s$. Determine la rapidez del bote cuando $s = 40$, 90 y 200 pies.



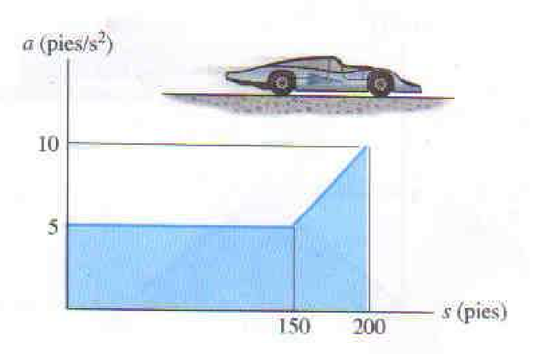

Prob. 12-63

***12-64.** El carro de pruebas parte del reposo y está sometido a una aceleración constante $a_c = 15$ pies/s$^2$ para $0 \leq t < 10$s. Se aplican los frenos, lo que causa una desaceleración a la razón mostrada hasta que el carro se detiene. Determine la rapidez máxima del carro y el tiempo $t$ en que se detiene.




Prob. 12-64

**12-65.** La gráfica $a-s$ para un automóvil de carreras que viaja a lo largo de una pista recta ha sido determinada experimentalmente. Si el automóvil parte del reposo en $s = 0$, determine su rapidez cuando $s = 50$, 150 y 200 pies, respectivamente.

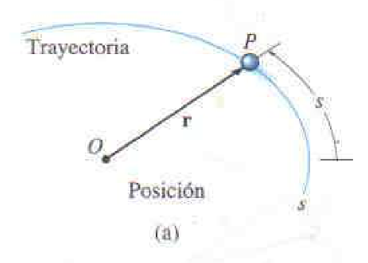



Prob. 12-65

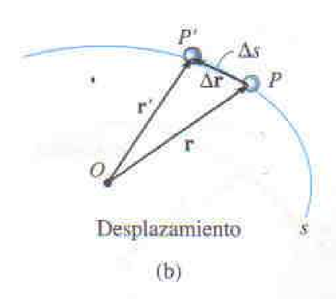
## 12.4 Movimiento curvilíneo general

El *movimiento curvilíneo* ocurre cuando la partícula se mueve a lo largo de una trayectoria curva. Como esta trayectoria a menudo es descrita en tres dimensiones, usaremos análisis vectorial para formular la posición, la velocidad y la aceleración de la partícula.* En esta sección se analizan los aspectos generales del movimiento curvilíneo, y en secciones subsecuentes se presentarán tres tipos de sistemas coordenados usados a menudo para analizar este movimiento.

**Posición.** Considere una partícula localizada en el punto $P$ sobre una curva espacial definida por la función trayectoria $s$, figura 12-16*a*. La posición de la partícula, medida desde un punto fijo $O$, será designada mediante el *vector de posición* $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$. Este vector es una función del tiempo ya que, en general, tanto su magnitud como su dirección cambian cuando la partícula se mueve por la curva.




**Desplazamiento.** Suponga que durante un pequeño intervalo de tiempo $\Delta t$ la partícula se mueve una distancia $\Delta s$ por la curva hasta una nueva posición $P'$, definida mediante $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \Delta\mathbf{r}$, figura 12-16*b*. El *desplazamiento* $\Delta\mathbf{r}$ representa el cambio en la posición de la partícula y es determinado por resta vectorial, es decir, $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$.




**Velocidad.** Durante el tiempo $\Delta t$, la *velocidad promedio* de la partícula es definida como

$$\mathbf{v}_{\text{prom}} = \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta t}$$

La *velocidad instantánea* es determinada a partir de esta ecuación haciendo $\Delta t \to 0$, y en consecuencia la dirección de $\Delta\mathbf{r}$ *se acerca* a la *tangente* a la curva en el punto $P$. Por consiguiente, $\mathbf{v} = \lim_{\Delta t\to 0} (\Delta\mathbf{r}/\Delta t)$ o

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \tag{12–7}$$

Como $d\mathbf{r}$ será tangente a la curva en $P$, la *dirección* de $\mathbf{v}$ es también *tangente a la curva*, figura 12-16*c*. La *magnitud* de $\mathbf{v}$, que es denominada *rapidez*, se puede obtener al advertir que la magnitud del desplazamiento $\Delta\mathbf{r}$ es la longitud del segmento de línea recta desde $P$ hasta $P'$, figura 12-16*b*. Observando que esta longitud, $\Delta r$, tiende a la longitud del arco $\Delta s$ cuando $\Delta t \to 0$, tenemos $v = \lim_{\Delta t\to 0} (\Delta r/\Delta t) = \lim_{\Delta t\to 0} (\Delta s/\Delta t)$, o

$$v = \frac{ds}{dt} \tag{12–8}$$

Así, la *rapidez* se puede obtener diferenciando la función trayectoria $s$ con respecto al tiempo.

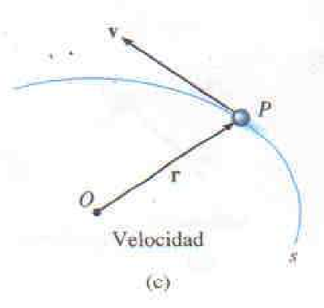
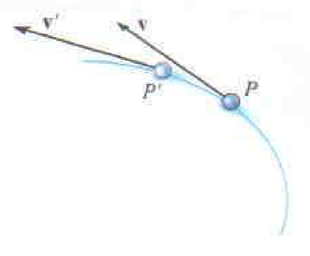



Fig. 12–16

*En el apéndice C de este libro se proporciona un resumen de algunos de los importantes conceptos del análisis vectorial.



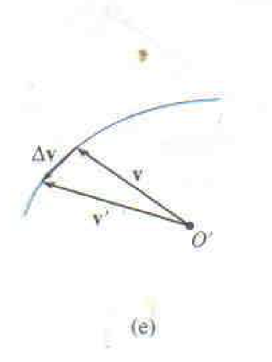



(d)

**Aceleración.** Si la partícula tiene velocidad **v** en el tiempo $t$ y velocidad $\mathbf{v}' = \mathbf{v} + \Delta\mathbf{v}$ en $t + \Delta t$, figura 12-16*d*, entonces su *aceleración promedio* durante el intervalo de tiempo $\Delta t$ es

$$\mathbf{a}_{\text{prom}} = \frac{\Delta \mathbf{v}}{\Delta t}$$

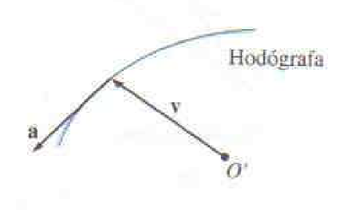
donde $\Delta\mathbf{v} = \mathbf{v}' - \mathbf{v}$. Para estudiar esta razón de cambio con respecto al tiempo, los dos vectores de velocidad mostrados en la figura 12-16*d* están graficados en la figura 12-16*e* de manera que sus colas se localizan en el punto fijo $O'$ y sus cabezas tocan puntos sobre la curva. La curva se denomina *hodógrafa*, y cuando se construye, describe el lugar geométrico de los puntos para la cabeza de flecha del vector velocidad de la misma manera que la *trayectoria s* describe el lugar geométrico de los puntos para las cabezas de flecha del vector de posición, figura 12-16*a*.




(e)

Para obtener la *aceleración instantánea*, hacemos $\Delta t \to 0$ en la ecuación anterior. En el límite $\Delta\mathbf{v}$ tenderá a la *tangente a la hodógrafa*, y entonces $\mathbf{a} = \lim_{\Delta t \to 0} (\Delta\mathbf{v}/\Delta t)$, o

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \tag{12–9}$$

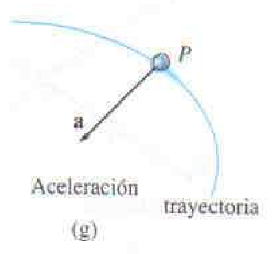



(f)

Sustituyendo la ecuación 12-7 en este resultado, también podemos escribir

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

Por definición de la derivada, **a** actúa *tangente a la hodógrafa*, figura 12-16*f*, y por tanto, *en general*, **a** *no es tangente a la trayectoria del movimiento*, figura 12-16*g*. Para aclarar este punto observe que $\Delta v$, y en consecuencia **a**, debe tomar en cuenta *tanto* el cambio en magnitud *como* la dirección de la velocidad $\boldsymbol{v}$ cuando la partícula se mueve desde $P$ hasta $P'$, figura 12-16*d*. Un cambio de magnitud incrementa (o disminuye) la "longitud" de $\boldsymbol{v}$, y esto en sí mismo permitiría a **a** permanecer tangente a la trayectoria. Sin embargo, para que la partícula siga la trayectoria, el cambio direccional siempre "gira" al vector velocidad hacia el "interior" o "lado cóncavo" de la trayectoria, y por tanto **a** *no puede* permanecer tangente a la trayectoria. En resumen, $\boldsymbol{v}$ es siempre tangente a la *trayectoria* y **a** es siempre tangente a la *hodógrafa*.




(g)

Fig. 12–16

## 12.5 Movimiento curvilíneo: Componentes rectangulares

Hay ocasiones en que el movimiento de una partícula se describe mejor a lo largo de una trayectoria que esté representada usando un marco de referencia fijo $x, y, z$.

**Posición.** Si en un instante dado la partícula $P$ está en un punto $(x, y, z)$ sobre la trayectoria curva $s$, figura 12-17$a$, su ubicación es definida entonces por el *vector de posición*

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \tag{12–10}$$

Debido al movimiento de la partícula y a la forma de la trayectoria, todas las componentes $x, y, z$ de $\mathbf{r}$ son generalmente funciones del tiempo; esto es, $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, es decir, $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

De acuerdo con el análisis presentado en el apéndice C, la *magnitud* de $\mathbf{r}$ es *siempre positiva* y está definida por la ecuación C−3 como

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

La *dirección* de $\mathbf{r}$ es especificada mediante las componentes del vector unitario $\mathbf{u}_r = \mathbf{r}/r$.

**Velocidad.** La primera derivada con respecto al tiempo de $\mathbf{r}$ proporciona la velocidad $v$ de la partícula.
Por tanto,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\mathbf{i}) + \frac{d}{dt}(y\mathbf{j}) + \frac{d}{dt}(z\mathbf{k})$$

Al plantear esta derivada es necesario tomar en cuenta los cambios *tanto* en magnitud *como* en dirección de cada una de las componentes del vector. Por consiguiente, la derivada de la componente $\mathbf{i}$ de $\mathbf{v}$ es

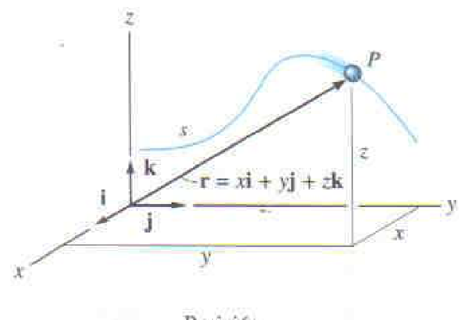
$$\frac{d}{dt}(x\mathbf{i}) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + x\frac{d\mathbf{i}}{dt}$$

El segundo término del lado derecho es cero, puesto que el marco de referencia $x, y, z$ está *fijo*, y por tanto la *dirección* (y la *magnitud*) de $\mathbf{i}$ no cambia con el tiempo. La diferenciación de las componentes $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ puede efectuarse de manera similar, lo que da el resultado final,

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k} \tag{12–11}$$

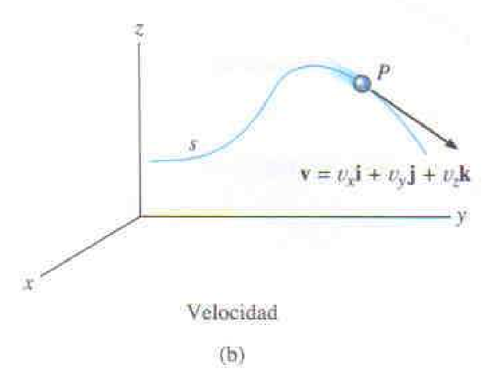
donde

$$v_x = \dot{x} \quad v_y = \dot{y} \quad v_z = \dot{z} \tag{12–12}$$




Posición

(a)




Velocidad

(b)

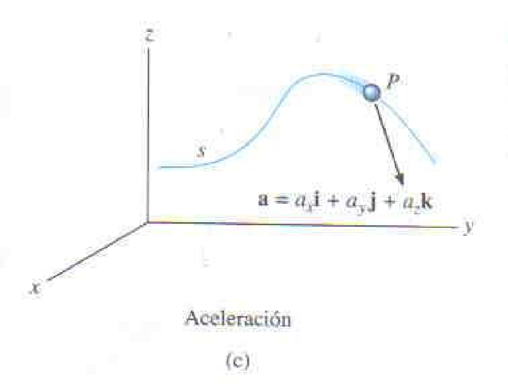
Fig. 12–17

La notación "punto" $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ representa las primeras derivadas de las ecuaciones paramétricas $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, respectivamente.

La velocidad tiene una *magnitud* definida como el valor positivo de

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

y una *dirección* que es especificada por las componentes del vector unitario $\mathbf{u}_v = \mathbf{v}/v$. Esta dirección es *siempre tangente a la trayectoria*, como se muestra en la figura 12-17*b*.



Aceleración

(c)

Fig. 12–17

**Aceleración.** La aceleración de la partícula se obtiene tomando la primera derivada con respecto al tiempo de la ecuación 12-11 (o la segunda derivada con respecto al tiempo de la ecuación 12-10). Usando puntos para representar las derivadas de las componentes, tenemos

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k} \qquad (12\text{–}13)$$

donde

$$\begin{aligned} a_x &= \dot{v}_x = \ddot{x} \\ a_y &= \dot{v}_y = \ddot{y} \\ a_z &= \dot{v}_z = \ddot{z} \end{aligned} \qquad (12\text{–}14)$$

Aquí, $a_x$, $a_y$, $a_z$ representan, respectivamente, las primeras derivadas con respecto al tiempo de las funciones $v_x = v_x(t)$, $v_y = v_y(t)$, $v_z = v_z(t)$, o las segundas derivadas con respecto al tiempo de las funciones $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$.

La aceleración tiene una *magnitud* definida por el valor positivo de

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$$

y una *dirección* especificada por las componentes del vector unitario $\mathbf{u}_a = \mathbf{a}/a$. Como $\mathbf{a}$ representa la razón de *cambio* con respecto al tiempo de la velocidad, en general $\mathbf{a}$ *no* será tangente a la trayectoria, figura 12-17*c*.

## PUNTOS IMPORTANTES

- El movimiento curvilíneo puede causar cambios *tanto* en la magnitud *como* en la dirección de los vectores posición, velocidad y aceleración.
- El vector velocidad siempre está dirigido *tangencialmente* a la trayectoria.
- En general, el vector aceleración *no* es tangente a la trayectoria, sino más bien, es tangente a la hodógrafa.
- Si el movimiento es descrito usando coordenadas rectangulares, entonces las componentes a lo largo de cada uno de los ejes no cambian en dirección, sólo cambiarán su magnitud y sentido (signo algebraico).
- Considerando los movimientos componentes, la dirección del movimiento de la partícula es automáticamente tomada en cuenta.

## PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

### *Sistema coordenado*

- Un sistema coordenado rectangular puede usarse para resolver problemas en los cuales el movimiento sería convenientemente expresado en términos de sus componentes $x$, $y$, $z$.

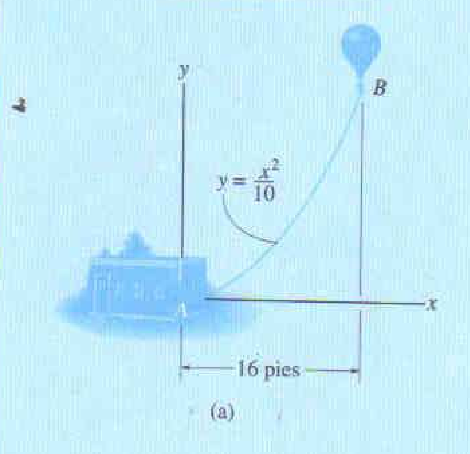
### *Cantidades cinemáticas*

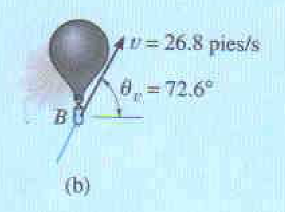
- Como el *movimiento rectilíneo* ocurre a lo largo de *cada* eje coordenado, el movimiento de cada componente se calcula usando $v = ds/dt$ y $a = dv/dt$; o, para los casos en que el movimiento no es expresado como una función del tiempo, puede usarse la ecuación $a\,ds = v\,dv$.
- Una vez que las componentes $x$, $y$, $z$ de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$ han sido determinadas, las magnitudes de esos vectores se encuentran aplicando el teorema de Pitágoras, ecuación C-3, y sus direcciones mediante las componentes de sus vectores unitarios, ecuaciones C-4 y C-5.




Cuando el avión despega, su trayectoria de movimiento puede ser establecida si se conocen su posición horizontal $x = x(t)$ y su posición vertical, o altitud, $y = y(t)$; ambas pueden hallarse con equipo de navegación. Al graficar los resultados de esas ecuaciones puede mostrarse la trayectoria; y tomando las derivadas con respecto al tiempo, la velocidad y la aceleración del avión pueden ser determinadas en cualquier instante.

## EJEMPLO 12.9



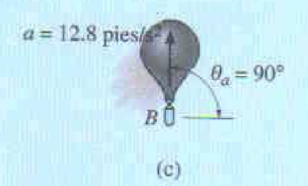




Fig. 12-18

En cualquier instante, la posición horizontal del globo meteorológico mostrado en la figura 12-18*a* es definida por $x = (8t)$ pies, donde $t$ está en segundos. Si la ecuación de la trayectoria es $y = x^2/10$, determine (*a*) la distancia del globo a la estación ubicada en $A$ cuando $t = 2$ s, (*b*) la magnitud y la dirección de la velocidad cuando $t = 2$ s, y (*c*) la magnitud y la dirección de la aceleración cuando $t = 2$ s.

### Solución

***Posición.*** Cuando $t = 2$ s, $x = 8(2)$ pies $= 16$, y entonces

$$y = (16)^2/10 = 25.6 \text{ pies}$$

La distancia desde $A$ hasta $B$, en línea recta, es por tanto

$$r = \sqrt{(16)^2 + (25.6)^2} = 30.2 \text{ pies} \qquad \textit{Resp.}$$

***Velocidad.*** Usando las ecuaciones 12-12 y aplicando la regla de la cadena del cálculo diferencial, las componentes de la velocidad cuando $t = 2$ s son

$$v_x = \dot{x} = \frac{d}{dt}(8t) = 8 \text{ pies/s} \rightarrow$$

$$v_y = \dot{y} = \frac{d}{dt}(x^2/10) = 2x\dot{x}/10 = 2(16)(8)/10 = 25.6 \text{ pies/s} \uparrow$$

Por consiguiente, cuando $t = 2$ s, la magnitud de la velocidad es

$$v = \sqrt{(8)^2 + (25.6)^2} = 26.8 \text{ pies/s} \qquad \textit{Resp.}$$

La dirección es tangente a la trayectoria, figura 12-18*b*, donde

$$\theta_v = \tan^{-1}\frac{v_y}{v_x} = \tan^{-1}\frac{25.6}{8} = 72.6° \qquad \textit{Resp.}$$

***Aceleración.*** Las componentes de la aceleración son determinadas con las ecuaciones 12-14 y con la aplicación de la regla de la cadena, advirtiendo que $\ddot{x} = d^2(8t)/dt^2 = 0$. Tenemos

$$a_x = \dot{v}_x = 0$$

$$a_y = \dot{v}_y = \frac{d}{dt}(2x\dot{x}/10) = 2(\dot{x})\dot{x}/10 + 2x(\ddot{x})/10$$

$$= 2(8)^2/10 + 2(16)(0)/10 = 12.8 \text{ pies/s}^2 \uparrow$$

Entonces,

$$a = \sqrt{(0)^2 + (12.8)^2} = 12.8 \text{ pies/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

La dirección de $\mathbf{a}$, como se muestra en la figura 12-18*c*, es

$$\theta_a = \tan^{-1}\frac{12.8}{0} = 90° \qquad \textit{Resp.}$$

*Nota*: También es posible obtener $v_y$ y $a_y$ expresando primero $y = f(t) = (8t)^2/10 = 6.4t^2$, y tomando luego derivadas sucesivas con respecto al tiempo.

## EJEMPLO 12.10

El movimiento de una caja $B$ que recorre la banda transportadora en espiral mostrada en la figura 12-19 está definido mediante el vector de posición $\mathbf{r} = \{0.5 \text{ sen } (2t)\mathbf{i} + 0.5 \cos (2t)\mathbf{j} - 0.2t\mathbf{k}\}$ m, donde $t$ está en segundos y los argumentos del seno y el coseno están en radianes ($\pi$ rad = 180°). Determine la ubicación de la caja cuando $t = 0.75$ s y las magnitudes de su velocidad y su aceleración en este instante.

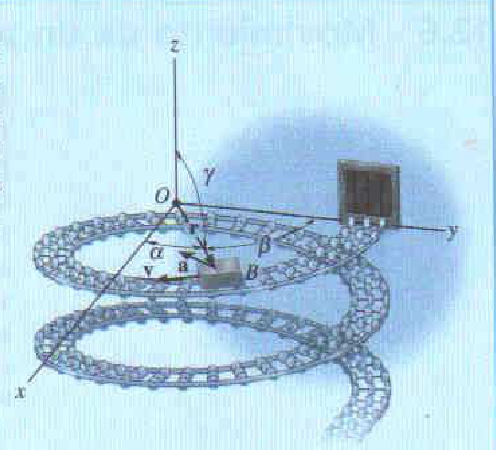



Fig. 12-19

### Solución

*Posición.* Evaluando $\mathbf{r}$ cuando $t = 0.75$ s obtenemos

$$\mathbf{r}|_{t=0.75\text{ s}} = \{0.5 \text{ sen}(1.5 \text{ rad})\mathbf{i} + 0.5\cos(1.5 \text{ rad})\mathbf{j} - 0.2(0.75)\mathbf{k}\} \text{ m}$$
$$= \{0.499\mathbf{i} + 0.0354\mathbf{j} - 0.150\mathbf{k}\} \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

La distancia de la caja a partir del origen es

$$r = \sqrt{(0.499)^2 + (0.0354)^2 + (-0.150)^2} = 0.522 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

La dirección de $\mathbf{r}$ se obtiene de las componentes del vector unitario,

$$\mathbf{u}_r = \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{0.499}{0.522}\mathbf{i} + \frac{0.0354}{0.522}\mathbf{j} - \frac{0.150}{0.522}\mathbf{k}$$
$$= 0.955\mathbf{i} + 0.0678\mathbf{j} - 0.287\mathbf{k}$$

Por tanto, los ángulos coordenados de dirección $\alpha, \beta, \gamma$, figura 12-19, son

$$\alpha = \cos^{-1}(0.955) = 17.2° \qquad \textit{Resp.}$$
$$\beta = \cos^{-1}(0.0678) = 86.1° \qquad \textit{Resp.}$$
$$\gamma = \cos^{-1}(-0.287) = 107° \qquad \textit{Resp.}$$

*Velocidad.* La velocidad está definida mediante

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}[0.5 \text{ sen}(2t)\mathbf{i} + 0.5\cos(2t)\mathbf{j} - 0.2t\mathbf{k}]$$
$$= \{1\cos(2t)\mathbf{i} - 1 \text{ sen}(2t)\mathbf{j} - 0.2\mathbf{k}\} \text{ m/s}$$

Por tanto, cuando $t = 0.75$ s, la magnitud de la velocidad, o la rapidez, es

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$
$$= \sqrt{[1\cos(1.5 \text{ rad})]^2 + [-1 \text{ sen}(1.5 \text{ rad})]^2 + (-0.2)^2}$$
$$= 1.02 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

La velocidad es tangente a la trayectoria como se muestra en la figura 12-19. Sus ángulos coordenados de dirección pueden ser determinados a partir de $\mathbf{u}_v = \mathbf{v}/v$.

*Aceleración.* La aceleración $\mathbf{a}$ de la caja, la cual se muestra en la figura 12-19, *no* es tangente a la trayectoria. Demuestre que

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \{-2 \text{ sen}(2t)\mathbf{i} - 2\cos(2t)\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2$$

En $t = 0.75s$, $a = 2 \text{ m/s}^2$ *Resp.*

## 12.6 Movimiento de un proyectil

El movimiento en vuelo libre de un proyectil a menudo es estudiado en términos de sus componentes rectangulares, ya que la aceleración del proyectil *siempre* actúa en la dirección vertical. Para ilustrar el análisis cinemático, consideremos un proyectil lanzado en el punto $(x_0, y_0)$, como se muestra en la figura 12-20. La trayectoria está definida en el plano $x-y$ de manera tal que la velocidad inicial es $\mathbf{v}_0$, con componentes $(\mathbf{v}_0)_x$ y $(\mathbf{v}_0)_y$. Cuando la resistencia del aire es despreciada, la única fuerza que actúa sobre el proyectil es su peso, el cual causa que el proyectil tenga una *aceleración constante hacia abajo* de aproximadamente $a_c = g = 9.81 \text{ m/s}^2$ o $g = 32.2 \text{ pies/s}^2$.*

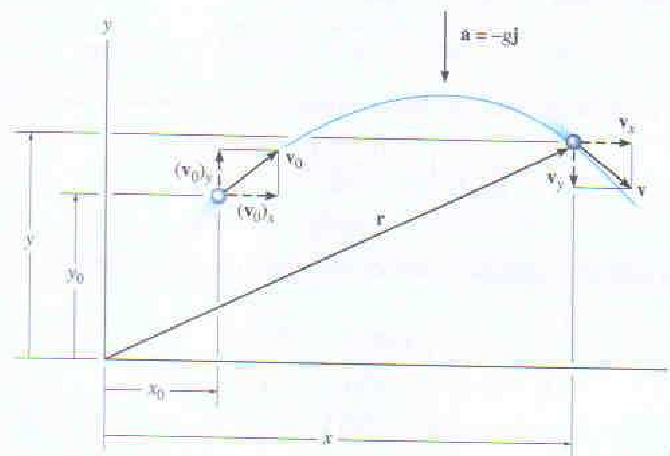
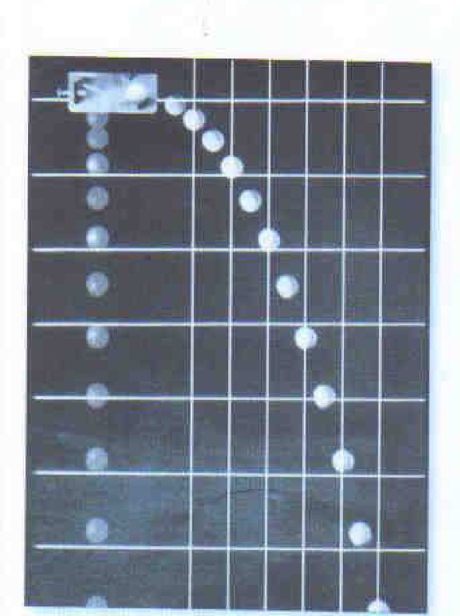



Fig. 12–20



Cada fotografía en esta secuencia se tomó después del mismo intervalo de tiempo. La bola de la izquierda cae del reposo, mientras que la bola derecha recibe una velocidad horizontal al ser liberada. Advierta que ambas bolas están sometidas a la misma aceleración hacia abajo puesto que permanecen a la misma elevación en cualquier instante. Esta aceleración causa que la diferencia en elevación se incremente entre fotografías sucesivas. También observe que la distancia horizontal entre fotografías sucesivas de la bola derecha es constante ya que la velocidad en la dirección horizontal permanece constante.

**Movimiento horizontal.** Como $a_x = 0$, al aplicar las ecuaciones de aceleración constante, 12-4, 12-5 y 12-6, obtenemos

$$(\overset{+}{\rightarrow})\ v = v_0 + a_c t; \qquad v_x = (v_0)_x$$

$$(\overset{+}{\rightarrow})\ x = x_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a_c t^2; \qquad x = x_0 + (v_0)_x t$$

$$(\overset{+}{\rightarrow})\ v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0); \qquad v_x = (v_0)_x$$

Las ecuaciones primera y última indican que *la componente horizontal de la velocidad siempre permanece constante durante el movimiento.*

**Movimiento vertical.** Como el eje $y$ positivo está dirigido hacia arriba, entonces $a_y = -g$. Al aplicar las ecuaciones 12-4, 12-5 y 12-6 obtenemos

$$(+\uparrow)\ v = v_0 + a_c t; \qquad v_y = (v_0)_y - gt$$

$$(+\uparrow)\ y = y_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a_c t^2; \qquad y = y_0 + (v_0)_y t - \tfrac{1}{2} g t^2$$

$$(+\uparrow)\ v^2 = v_0^2 + 2a_c(y - y_0); \qquad v_y^2 = (v_0)_y^2 - 2g(y - y_0)$$

Recuerde que la última ecuación puede ser formulada con base en eliminar el tiempo $t$ entre las primeras dos ecuaciones, y por tanto *sólo dos de las anteriores tres ecuaciones son independientes una de otra.*

*Esto supone que el campo gravitatorio de la Tierra no varía con la altitud.

Para resumir, problemas que implican el movimiento de un proyectil pueden tener cuando mucho tres incógnitas ya que sólo tres ecuaciones independientes pueden ser escritas; esto es, *una* ecuación en la *dirección horizontal* y *dos* en la *dirección vertical*. Una vez obtenidas $\mathbf{v}_x$ y $\mathbf{v}_y$, la velocidad resultante $v$, que es *siempre tangente* a la trayectoria, es definida mediante la *suma vectorial* mostrada en la figura 12-20.

## PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

Los problemas del movimiento de un proyectil en vuelo libre pueden ser resueltos usando el siguiente procedimiento.

### *Sistema coordenado*

- Establezca los ejes coordenados fijos $x$, $y$ y trace la trayectoria de la partícula. Entre *dos puntos* cualesquiera sobre la trayectoria, especifique los datos del problema dado y las *tres incógnitas*. En todos los casos la aceleración de la gravedad actúa hacia abajo. Las velocidades inicial y final de la partícula deben ser representadas en términos de sus componentes $x$ y $y$.
- Recuerde que las componentes positiva y negativa de la posición, la velocidad y la aceleración actúan siempre de acuerdo con sus direcciones coordenadas asociadas.

### *Ecuaciones cinemáticas*

- Dependiendo de los datos conocidos y de lo que vaya a ser determinado, debe seleccionarse cuáles tres de las siguientes cuatro ecuaciones habrán de aplicarse entre los dos puntos sobre la trayectoria para obtener la solución más directa del problema.

### *Movimiento horizontal*

- La *velocidad* en la dirección horizontal o dirección $x$ es *constante*, es decir, $(v_x) = (v_0)_x$, y

$$x = x_0 + (v_0)_x t$$

### *Movimiento vertical*

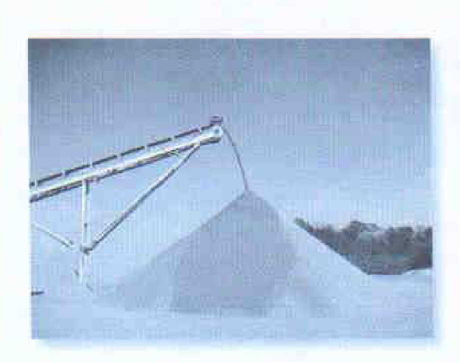
- En la dirección vertical, o dirección $y$, *sólo dos* de las siguientes tres ecuaciones pueden ser usadas para encontrar la solución.

$$v_y = (v_0)_y + a_c t$$

$$y = y_0 + (v_0)_y t + \tfrac{1}{2} a_c t^2$$

$$v_y^2 = (v_0)_y^2 + 2a_c(y - y_0)$$

- Por ejemplo, si la velocidad final de la partícula $v_y$ no es requerida, entonces la primera y la tercera de esas ecuaciones (para $y$) no ¿serán útiles?



La grava que cae del extremo de esta banda transportadora sigue una trayectoria que puede ser predicha usando las ecuaciones de aceleración constante. De esta manera la ubicación del montón acumulado puede ser determinada. Las coordenadas rectilíneas son usadas para el análisis ya que la aceleración se da sólo en la dirección vertical.

## EJEMPLO 12.11

Un saco resbala por la rampa, como se muestra en la figura 12-21, con velocidad horizontal de 12 m/s. Si la altura de la rampa con respecto al suelo es de 6 m, determine el tiempo necesario para que el saco llegue al suelo y el rango $R$ donde los sacos empiezan a apilarse.

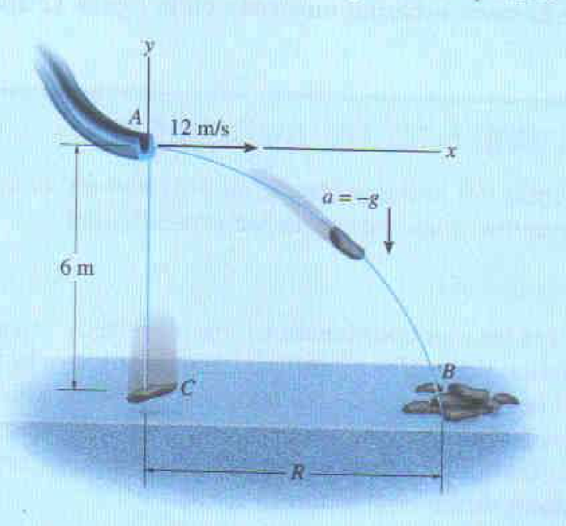



Fig. 12–21

### Solución

*Sistema coordenado.* El origen de coordenadas está establecido al principio de la trayectoria, punto $A$, figura 12-21. La velocidad inicial de un saco tiene componentes $(v_A)_x = 12\text{m/s}$ y $(v_A)_y = 0$. Además, entre los puntos $A$ y $B$ la aceleración es $a_y = -9.81\text{ m/s}^2$. Como $(v_B)_x = (v_A)_x = 12\text{ m/s}$, las tres incógnitas son $(v_B)_y$, $R$ y el tiempo de vuelo $t_{AB}$. Aquí no tenemos que determinar $(v_B)_y$.

*Movimiento vertical.* La distancia vertical desde $A$ hasta $B$ es conocida y, por tanto, podemos obtener una solución directa para $t_{AB}$ usando la ecuación

$(+\uparrow)$
$$y = y_0 + (v_0)_y t_{AB} + \tfrac{1}{2}a_c t_{AB}^2$$
$$-6\text{ m} = 0 + 0 + \tfrac{1}{2}(-9.81\text{ m/s}^2)t_{AB}^2$$
$$t_{AB} = 1.11\text{ s}$$ *Resp.*

Este cálculo indica también que si un saco fuese liberado *del reposo* en $A$, le tomaría el mismo tiempo llegar al piso en $C$, figura 12-21.

*Movimiento horizontal.* Como $t$ ha sido calculado, $R$ se determina como sigue:

$(\overset{+}{\rightarrow})$
$$x = x_0 + (v_0)_x t_{AB}$$
$$R = 0 + 12\text{ m/s}\,(1.11\text{ s})$$
$$R = 13.3\text{ m}$$ *Resp.*

## EJEMPLO 12.12

La máquina trituradora está diseñada para expeler virutas a $v_O = 25$ pies/s como se muestra en la figura 12-22. Si el tubo está orientado a 30° desde la horizontal, determine a qué altura $h$ las virutas tocan la pila si llegan a ésta desde una distancia de 20 pies a partir de la boca del tubo.

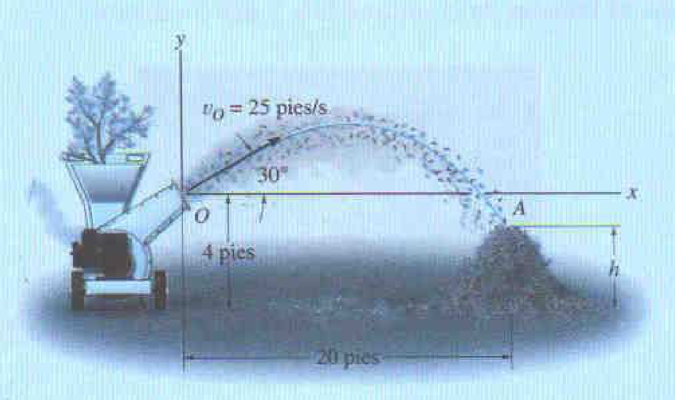



Fig. 12-22

### Solución

*Sistema coordenado.* Cuando se analiza el movimiento entre los puntos $O$ y $A$, las tres incógnitas son representadas como la altura $h$, el tiempo de vuelo $t_{OA}$, y la componente vertical de la velocidad $(v_A)_y$. (Advierta que $(v_A)_x = (v_O)_x$). Con el origen de coordenadas en $O$, figura 12-22, la velocidad inicial de una viruta tiene componentes de

$$(v_O)_x = (25 \cos 30°) \text{ pies/s} = 21.65 \text{ pies/s} \rightarrow$$
$$(v_O)_y = (25 \text{ sen } 30°) \text{ pies/s} = 12.5 \text{ pies/s} \uparrow$$

Además, $(v_A)_x = (v_O)_x = 21.65$ pies/s y $a_y = -32.2$ pies/s$^2$. Como no hay que determinar $(v_A)_y$, tenemos

*Movimiento horizontal*

$(\overset{+}{\rightarrow})$
$$x_A = x_O + (v_O)_x t_{OA}$$
$$20 \text{ pies} = 0 + (21.65 \text{ pies/s}) t_{OA}$$
$$t_{OA} = 0.9238 \text{ s}$$

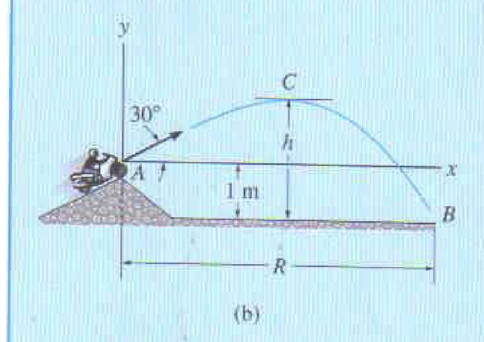
*Movimiento vertical.* Relacionando $t_{OA}$ a las elevaciones inicial y final de una viruta, tenemos

$(+\uparrow)$ $\quad y_A = y_O + (v_O)_y t_{OA} + \frac{1}{2} a_c t_{OA}^2$

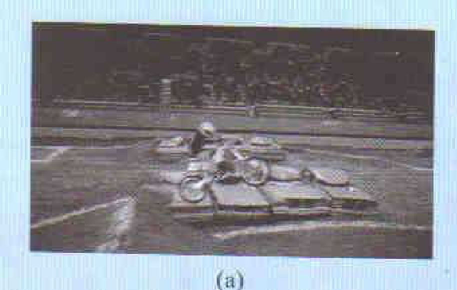
$$(h - 4 \text{ pies}) = 0 + (12.5 \text{ pies/s})(0.9238 \text{ s}) + \tfrac{1}{2}(-32.2 \text{ pies/s}^2)(0.9238 \text{ s})^2$$
$$h = 1.81 \text{ pies}$$ *Resp.*

## EJEMPLO 12.13

La pista para este evento de carreras fue diseñada de manera que los conductores salten por la pendiente de 30°, desde una altura de 1 m. Durante una carrera se observó que el conductor mostrado en la figura 12-23*a* permaneció en el aire por 1.5 s. Determine la rapidez con la que él viajaba hacia fuera de la pendiente, la distancia horizontal que recorrió antes de tocar el suelo, y la altura máxima que alcanzó. Desprecie el tamaño de la motocicleta y del conductor.




(b)



(a)

Fig. 12-23

### Solución

***Sistema coordenado.*** Como se muestra en la figura 12-23*b*, el origen de las coordenadas está establecido en $A$. Entre los puntos extremos de la trayectoria $AB$ las tres incógnitas son la rapidez inicial $v_A$, el rango $R$, y la componente vertical de velocidad $v_B$.

***Movimiento vertical.*** Como el tiempo de vuelo y la distancia vertical entre los extremos de la trayectoria son conocidos, podemos determinar $v_A$.

$(+\uparrow)$
$$(s_B)_y = (s_A)_y + (v_A)_y t_{AB} + \tfrac{1}{2}a_c t^2_{AB}$$
$$-1 = 0 + v_A \text{ sen } 30° \,(1.5) + \tfrac{1}{2}(-9.81)(1.5)^2$$
$$v_A = 13.38 \text{ m/s} = 13.4 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

***Movimiento horizontal.*** El alcance $R$ puede ser determinado ahora.

$(\overset{+}{\rightarrow})$
$$(s_B)_x = (s_A)_x + (v_A)_x t_{AB}$$
$$R = 0 + 13.38 \cos 30°(1.5)$$
$$= 17.4 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

Para encontrar la altura $h$ máxima consideraremos la trayectoria $AC$, figura 12-23*b*. Aquí las tres incógnitas son el tiempo de vuelo $t_{AC}$, la distancia horizontal desde $A$ hasta $C$, y la altura $h$. En la altura máxima $(v_C)_y = 0$, y como $v_A$ es conocida, podemos determinar $h$ *directamente*, sin considerar $t_{AC}$, usando la ecuación siguiente.

$$(v_C)_y^2 = (v_A)_y^2 + 2a_c[(s_C)_y - (s_A)_y]$$
$$(0)^2 = (13.38 \text{ sen } 30°)^2 + 2(-9.81)\,[(h-1) - 0]$$
$$h = 3.28 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

Demuestre que la motocicleta tocará el suelo en $B$ a una velocidad con componentes de

$(v_B)_x = 11.6 \text{ m/s} \rightarrow$, $\quad (v_B)_y = 8.02 \text{ m/s} \downarrow$

# PROBLEMAS

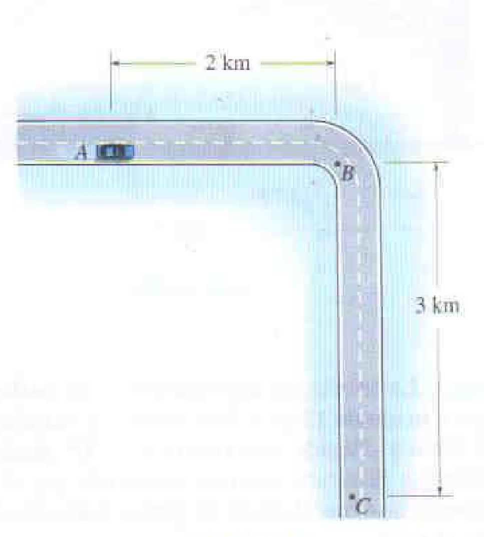
**12-66.** Una partícula, originalmente en reposo y situada en el punto (3 pies, 2 pies, 5 pies), está sometida a una aceleración de $\mathbf{a} = \{6t\mathbf{i} + 12t^2\mathbf{k}\}$ pies/s$^2$. Determine la posición de la partícula $(x, y, z)$ en $t = 1$ s.

**12-67.** La velocidad de una partícula está dada por $v = \{16t^2\mathbf{i} + 4t^3\mathbf{j} + (5t + 2)\mathbf{k}\}$ m/s, donde $t$ está en segundos. Si la partícula está en el origen cuando $t = 0$, determine la magnitud de su aceleración cuando $t = 2$ s. ¿Cuáles son las coordenadas de posición $x, y, z$ de la partícula en este instante?

**■*12-68.** Una partícula está viajando con velocidad de $\mathbf{v} = \{3\sqrt{t}e^{-0.2t}\mathbf{i} + 4e^{-0.8t^2}\mathbf{j}\}$ m/s, donde $t$ está en segundos. Determine la magnitud del desplazamiento de la partícula desde $t = 0$ hasta $t = 3$ s. Use la regla de Simpson con $n = 100$ para evaluar las integrales. ¿Cuál es la magnitud de la aceleración de la partícula cuando $t = 2$ s?

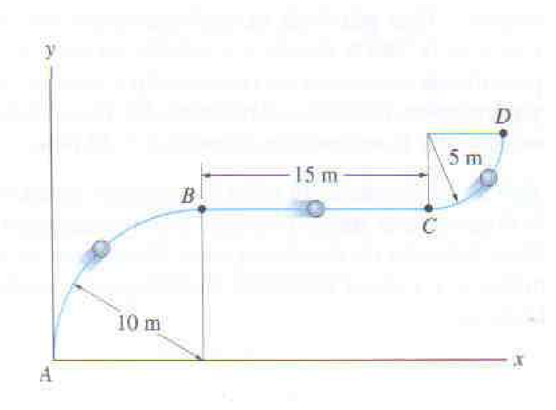
**12-69.** La posición de una partícula está definida por $r = \{5(\cos 2t)\mathbf{i} + 4(\text{sen } 2t)\mathbf{j}\}$ m, donde $t$ está en segundos y los argumentos para el seno y el coseno están dados en radianes. Determine las magnitudes de la velocidad y de la aceleración de la partícula cuando $t = 1$ s. Demuestre que la trayectoria de la partícula es elíptica.

**12-70.** El automóvil viaja de $A$ a $B$, y luego de $B$ a $C$, como se muestra en la figura. Determine la magnitud del desplazamiento y la distancia recorrida.




Prob. 12–70

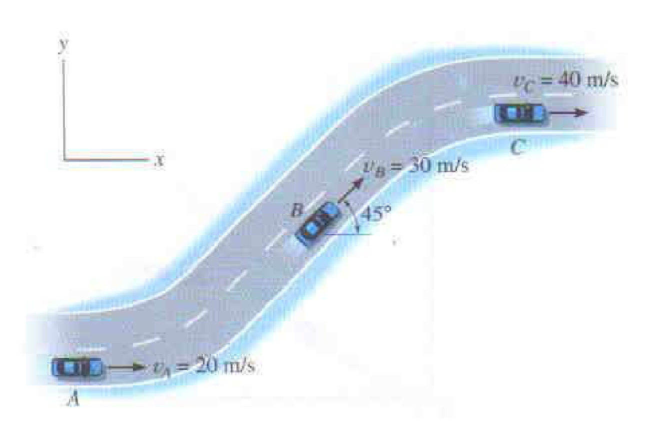
**12-71.** Una partícula viaja por la curva desde $A$ hasta $B$ en 2 s. Ir de $B$ a $C$ le toma 4 s y luego tarda 3 s en ir de $C$ a $D$. Determine su rapidez promedio cuando va desde $A$ hasta $D$.




Prob. 12–71

***12-72.** Un carro viaja 2 km hacia el este durante 5 minutos, luego 3 km hacia el norte durante 8 minutos, y después 4 km hacia el oeste durante 10 minutos. Determine la distancia total recorrida y la magnitud del desplazamiento del carro. ¿Cuál es la magnitud de la velocidad promedio y de la rapidez promedio?

**12-73.** Un carro viajando a lo largo de las porciones rectas del camino tiene las velocidades indicadas en la figura cuando llega a los puntos $A$, $B$ y $C$. Si le toma 3 s ir de $A$ a $B$, y luego 5 s ir de $B$ a $C$, determine la aceleración promedio entre los puntos $A$ y $B$ y entre $A$ y $C$.



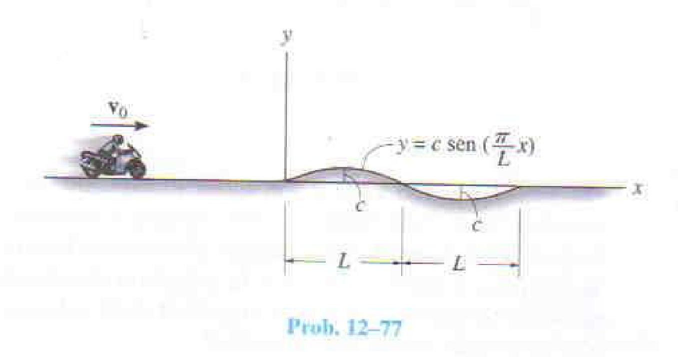

Prob. 12–73

**12-74.** Una partícula se mueve por la curva $y = e^{2x}$ en tal forma que su velocidad tiene una magnitud constante de $v = 4$ pies/s. Determine las componentes $x$ y $y$ de la velocidad cuando la partícula está en $y = 5$ pies.

**12-75.** La trayectoria de una partícula es definida por $y^2 = 4kx$, y la componente de su velocidad a lo largo del eje $y$ es $v_y = ct$, donde $k$ y $c$ son constantes. Determine las componentes $x$ y $y$ de la aceleración.

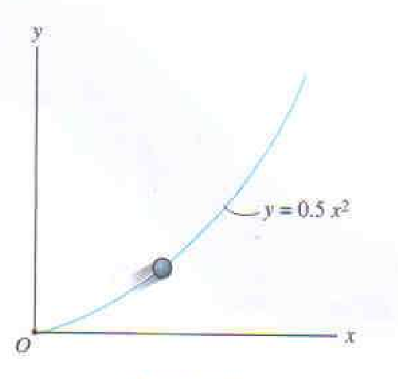
***12-76.** Una partícula se está moviendo por la curva $y = x - (x^2/400)$, donde $x$ y $y$ están en pies. Si la componente de velocidad en la dirección $x$ es $v_x = 2$ pies/s y permanece *constante*, determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración cuando $x = 20$ pies.

**12-77.** La motocicleta viaja con rapidez constante $v_0$ a lo largo de una trayectoria que, por una distancia corta, toma la forma de una curva seno. Determine las componentes $x$ y $y$ de su velocidad en cualquier instante sobre la curva.



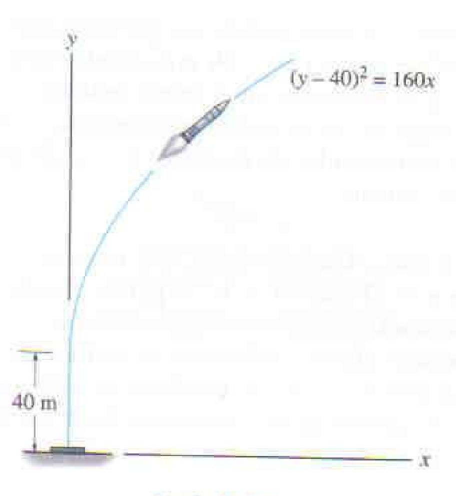

Prob. 12-77

**12-78.** La partícula viaja a lo largo de la trayectoria definida por la parábola $y = 0.5x^2$. Si la componente de velocidad a lo largo del eje $x$ es $v_x = (5t)$ pies/s, donde $t$ está en segundos, determine la distancia a la partícula desde el origen $O$ y la magnitud de su aceleración cuando $t = 1$ s. Cuando $t = 0$, $x = 0$ y $y = 0$.



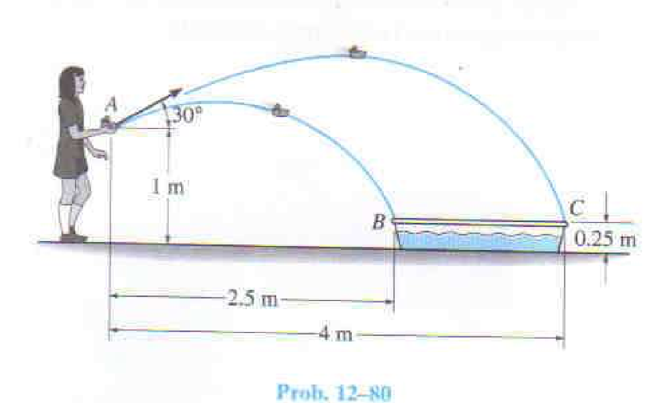

Prob. 12-78

**12-79.** Cuando un cohete alcanza una altura de 40 m empieza a viajar a lo largo de la trayectoria parabólica $(y - 40)^2 = 160x$, donde las coordenadas son medidas en metros. Si la componente de velocidad en la dirección vertical es constante en $v_y = 180$ m/s, determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración del cohete cuando éste alcanza una altura de 80 m.




Prob. 12-79

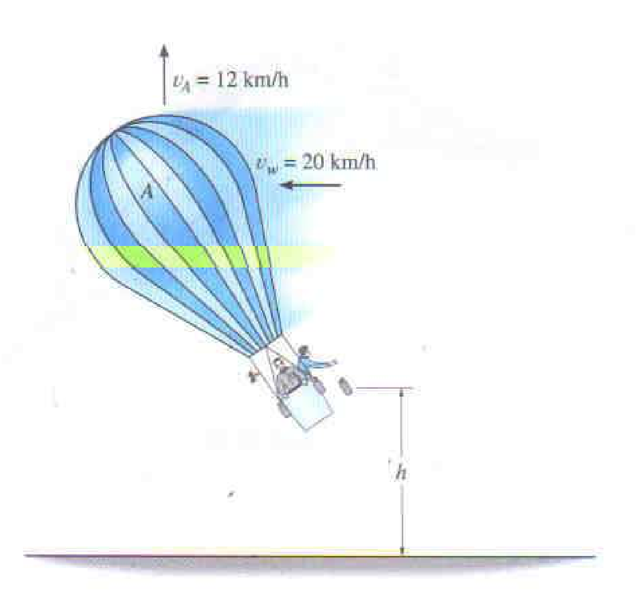
***12-80.** La niña siempre lanza los juguetes según un ángulo de 30° desde el punto $A$ como se muestra. Determine el tiempo entre los lanzamientos de manera que los juguetes toquen los bordes $B$ y $C$ de la alberca al mismo tiempo. ¿Con qué rapidez debe lanzarse cada juguete?




Prob. 12-80

**12-81.** La tobera de una manguera de jardín descarga agua a razón de 15 m/s. Si la tobera se mantiene al nivel del suelo y dirigida con ángulo $\theta = 30°$, desde el suelo, determine la altura máxima alcanzada por el agua y la distancia horizontal desde la tobera hasta donde el agua toca el suelo.

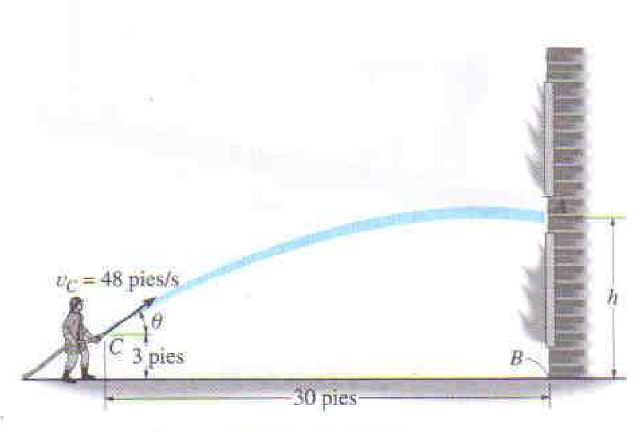
**12-82.** El globo $A$ está ascendiendo a razón de $v_A$ = 12 km/h, y es llevado horizontalmente por el viento a $v_w$ = 20 km/h. Si en el instante $h$ = 50 m se deja caer una bolsa de lastre desde el globo, determine el tiempo en que éste llegará al suelo. Suponga que la bolsa fue dejada caer con la misma velocidad que tenía el globo. Calcule también, ¿con qué rapidez golpea la bolsa el suelo?




Prob. 12–82

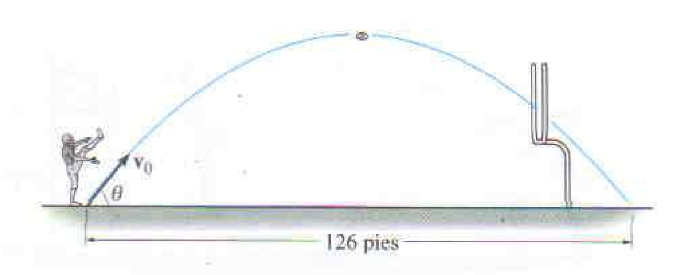
**12-83.** Determine la máxima altura sobre la pared a la que el bombero puede lanzar agua desde la manguera, si la rapidez del agua en la tobera es $v_C$ = 48 pies/s.

***12-84.** Determine el ángulo $\theta$ más pequeño, medido desde la horizontal, con que la manguera debe ser dirigida de manera que la corriente de agua toque el fondo de la pared en el punto $B$. La rapidez del agua en la tobera es $v_C$ = 48 pies/s.



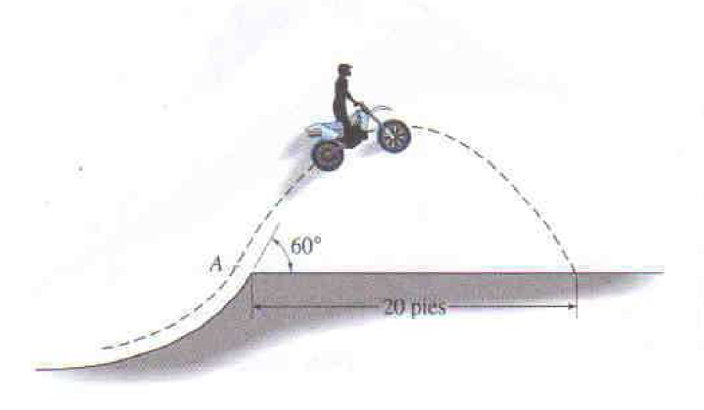

Probs. 12–83/84

**12-85.** En una cinta de video se observó que un jugador de futbol pateó una pelota a 126 pies durante un tiempo medido de 3.6 segundos. Determine la rapidez inicial de la pelota y el ángulo $\theta$ con que fue pateada.



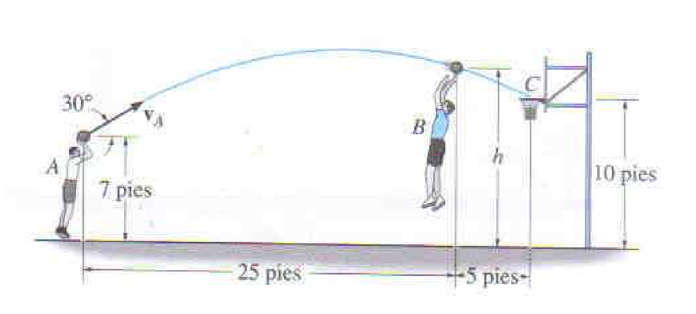

Prob. 12–85

**12-86.** Durante una carrera se observa que una motocicleta salta en $A$ a un ángulo de 60° con la horizontal. Si la motocicleta toca el suelo a una distancia de 20 pies, determine la rapidez aproximada con que iba viajando justo antes de dejar el suelo. Ignore el tamaño de la motocicleta en los cálculos.



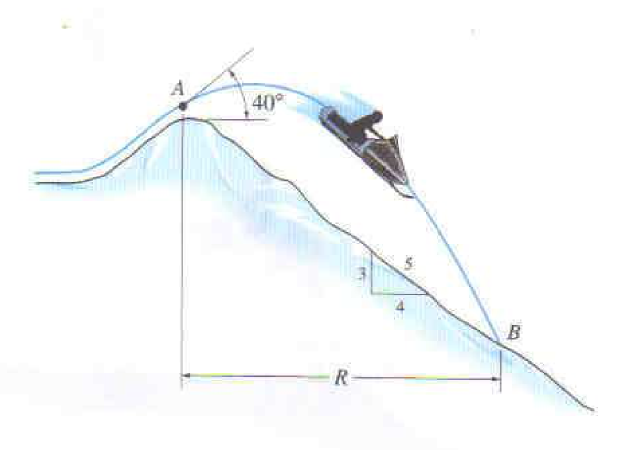

Prob. 12–86

**12-87.** Se muestran las medidas de un lance registrado en cinta de video durante un juego de baloncesto. La pelota pasó por el aro cuando apenas libró las manos del jugador $B$ quien trató de bloquearla. Despreciando el tamaño de la pelota, determine la magnitud $v_A$ de su velocidad inicial y su altura $h$ cuando pasa sobre el jugador $B$.



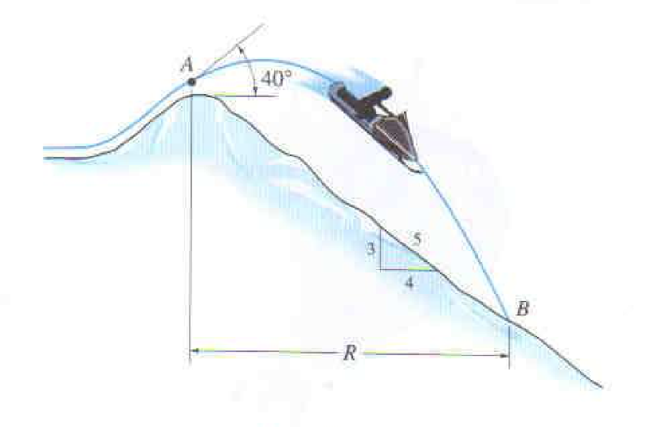

Prob. 12-87

*12-88. El trineo va viajando a 10 m/s cuando abandona el terraplén ubicado en $A$. Determine el tiempo de vuelo desde $A$ hasta $B$ y el alcance $R$ de la trayectoria.



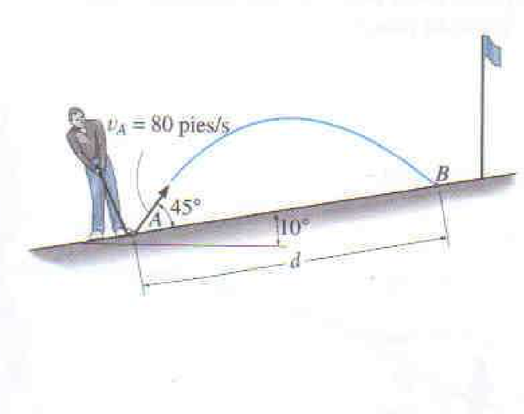

Prob. 12-88

**12-89.** El trineo está viajando a 10 m/s cuando abandona el terraplén ubicado en $A$. Determine la rapidez con que toca el suelo en $B$ y su aceleración máxima a lo largo de la trayectoria $AB$.



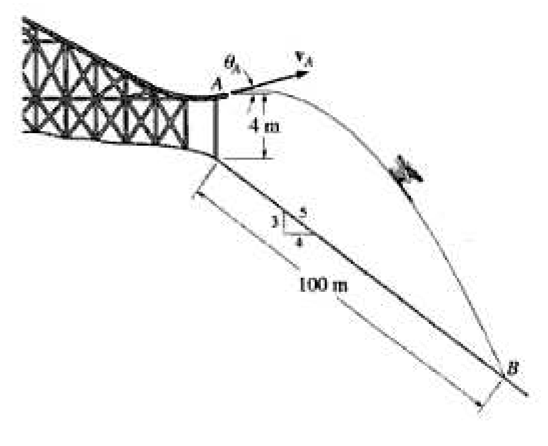

Prob. 12-89

**12-90.** Una pelota de golf es golpeada con velocidad de 80 pies/ s como se muestra. Determine la distancia $d$ a la que llegará.




Prob. 12-90

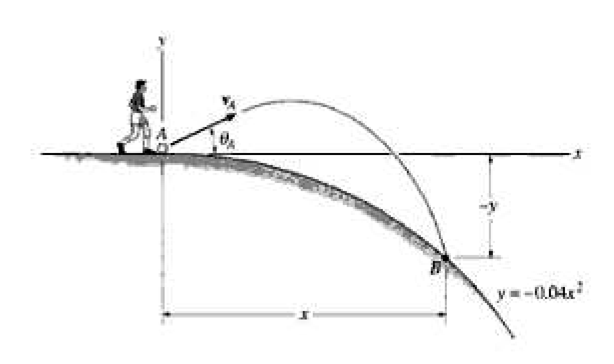
12-91. Se observa que el esquiador deja la rampa $A$ a un ángulo $\theta_A = 25°$ con la horizontal. Si él toca el suelo en $B$, determine su rapidez inicial $v_A$ y el tiempo de vuelo $t_{AB}$.




Prob. 12–91

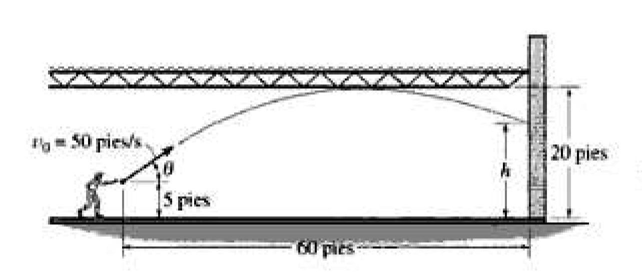
12-93. La pelota situada en A es pateada con rapidez $v_A = 80$ pies/s y a un ángulo $\theta_A = 30°$. Determine el punto $(x, -y)$ donde tocará el suelo. Suponga que el terreno tiene la forma de una parábola, como se muestra.

12-94. La pelota situada en $A$ es pateada en forma tal que $\theta_A = 30°$. Si toca el suelo en el punto $B$ con coordenadas $x = 15$ pies y $y = -9$ pies, determine la rapidez con que es pateada y la rapidez con que toca el suelo.



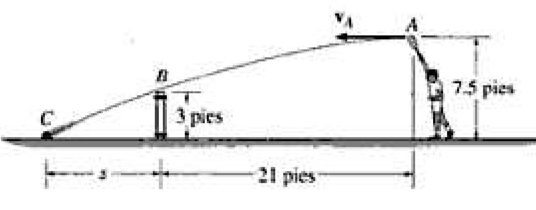

Probs. 12–93/94

*12-92. El hombre está a 60 pies de la pared y arroja una pelota contra ella con rapidez $v_0 = 50$ pies/s. Determine el ángulo $\theta$ con que él debe soltar la pelota de manera que toque la pared en el punto más alto posible. ¿Cuál es esta altura? El recinto tiene una altura libre de 20 pies.



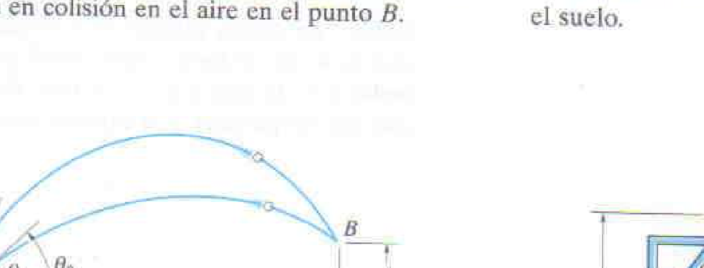

Prob. 12–92

12-95. Determine la velocidad horizontal $v_A$ de una pelota de tenis ubicada en $A$ de manera que libre justamente la red en el punto $B$. Encuentre también la distancia $s$ en que la pelota tocará el suelo.



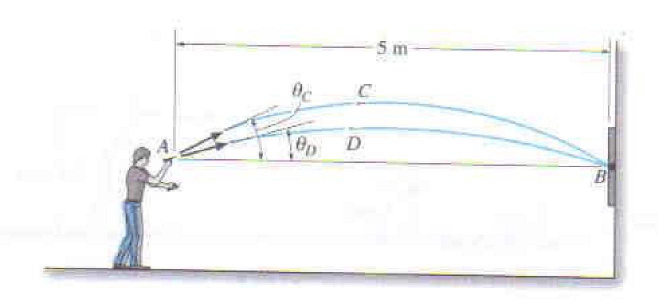

Prob. 12–95

*12-96. Un niño situado en $O$ lanza una pelota al aire con rapidez $v_O$ a un ángulo $\theta_1$. Si luego lanza otra pelota con la misma rapidez $v_O$ a un ángulo $\theta_2 < \theta_1$, determine el tiempo entre los lanzamientos de manera que las pelotas entren en colisión en el aire en el punto $B$.



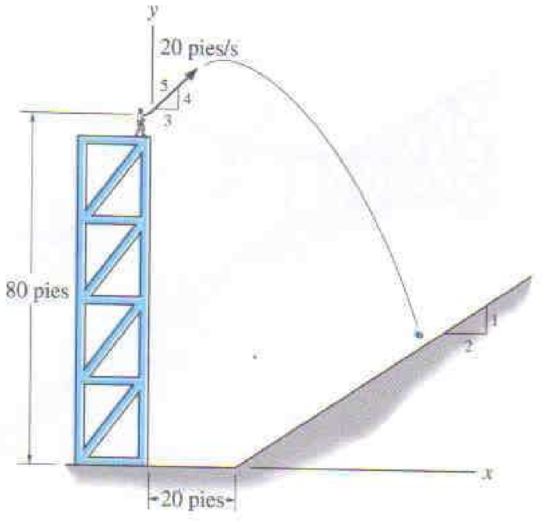

Prob. 12–96

12-97. El hombre situado en $A$ quiere lanzar dos dardos al blanco localizado en $B$ de manera que lleguen al *mismo tiempo*. Si cada dardo es lanzado con rapidez de 10 m/s, determine los ángulos $\theta_C$ y $\theta_D$ con que deben ser disparados y el tiempo necesario entre cada lanzamiento. Advierta que el primer dardo debe lanzarse con $\theta_C(>\theta_D)$, luego el segundo dardo es lanzado con $\theta_D$.



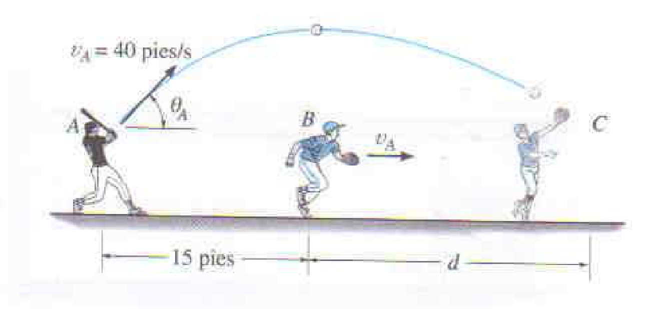

Prob. 12–97

12-98. La bola es lanzada desde la torre con velocidad de 20 pies/s como se muestra. Determine las coordenadas $x$ y $y$ del punto en que la bola toca la pendiente. Determine también la rapidez con que la bola toca el suelo.




Prob. 12–98

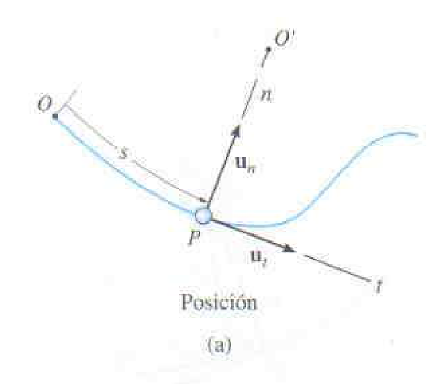
12-99. El jugador de béisbol $A$ golpea la pelota con $v_A = 40$ pies/s y $\theta_A = 60°$ desde la horizontal. Cuando la pelota está directamente por arriba del jugador $B$, él comienza a correr bajo ella. Determine la rapidez constante con que $B$ debe correr y la distancia $d$ necesaria para poder atrapar la pelota a la misma elevación con que fue golpeada.




Prob. 12–99

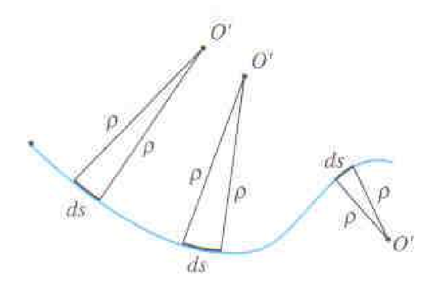
## 12.7 Movimiento curvilíneo: Componentes normal y tangencial

Cuando la trayectoria a lo largo de la cual se mueve una partícula es *conocida*, a menudo resulta conveniente describir el movimiento usando coordenadas $n$ y $t$ que actúan normal y tangencialmente a la trayectoria, respectivamente, y que en el instante considerado tienen su *origen ubicado en la partícula*.



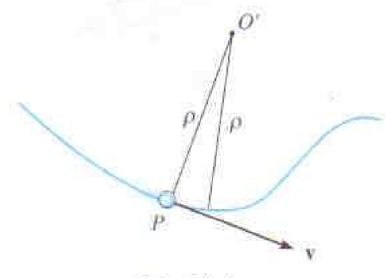

Posición

(a)




Radio de curvatura

(b)




Velocidad

(c)

Fig. 12-24

**Movimiento plano.** Considere la partícula $P$ mostrada en la figura 12-24$a$ que se mueve en un plano por una curva fija, de tal manera que en un instante dado la partícula está en la posición $s$, medida desde el punto $O$. Consideraremos ahora un sistema coordenado que tiene su origen en un *punto fijo* sobre la curva, y en el instante considerado este origen *coincide* con la ubicación de la partícula. El eje $t$ es *tangente* a la curva en $P$ y positivo en la dirección de *$s$ creciente*. Designaremos esta dirección positiva con el vector unitario $\mathbf{u}_t$. Puede hacerse una selección del *eje normal* al advertir que geométricamente la curva está construida con base en una serie de segmentos diferenciales de arco $ds$, figura 12-24$b$. Cada segmento $ds$ está formado a partir del arco de un círculo asociado con *radio de curvatura* $\rho$ y *centro de curvatura* $O'$. El eje normal $n$ es perpendicular al eje $t$ y está dirigido desde $P$ *hacia* el centro de curvatura $O'$, figura 12-24$a$. Esta dirección positiva, que está *siempre* sobre el lado cóncavo de la curva, será designada mediante el vector unitario $\mathbf{u}_n$. El plano que contiene los ejes $n$ y $t$ es denominado *plano osculador*, y en este caso está fijo en el plano de movimiento.*

**Velocidad.** Dado que la partícula se está moviendo, $s$ es una función del tiempo. Como se indicó en la sección 12.4, la velocidad $\mathbf{v}$ de la partícula tiene una *dirección* que es *siempre tangente a la trayectoria*, figura 12-24$c$, y una *magnitud* que es determinada tomando la derivada con respecto al tiempo de la función trayectoria $s = s(t)$, es decir, $v = ds/dt$ (ecuación 12-8). Por tanto,

$$\mathbf{v} = v\mathbf{u}_t \qquad (12\text{–}15)$$

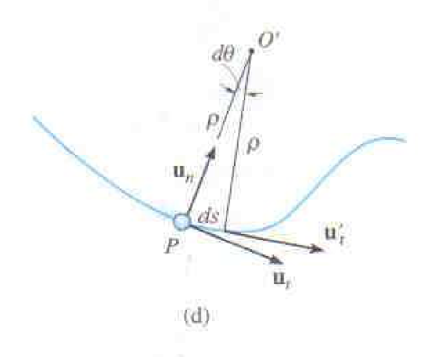
donde

$$v = \dot{s} \qquad (12\text{–}16)$$

*El plano osculador también puede ser definido como aquel que tiene el máximo contacto con la curva en un punto. Es la posición límite del plano que contacta al punto y al segmento de arco $ds$. Como se observó líneas arriba, el plano osculador coincide siempre con una curva plana; sin embargo, cada punto sobre una curva tridimensional tiene un plano osculador único.

**Aceleración.** La aceleración de la partícula es la razón de cambio con respecto al tiempo de la velocidad. Así,

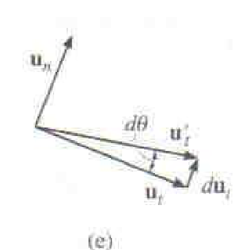
$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \dot{v}\mathbf{u}_t + v\dot{\mathbf{u}}_t \tag{12–17}$$



(d)

Para determinar la derivada con respecto al tiempo $\dot{\mathbf{u}}_t$, advierta que al moverse la partícula a lo largo del arco $ds$ en el tiempo $dt$, $\mathbf{u}_t$ preserva su magnitud de la unidad; sin embargo, su *dirección* cambia, y se vuelve $\mathbf{u}'_t$, figura 12-24*d*. Como se muestra en la figura 12-24*e*, requerimos $\mathbf{u}'_t = \mathbf{u}_t + d\mathbf{u}_t$. Aquí $d\mathbf{u}_t$ se extiende entre las cabezas de flecha de $\mathbf{u}_t$ y $\mathbf{u}'_t$, las cuales se encuentran sobre un arco infinitesimal de radio $u_t = 1$. Por consiguiente, $d\mathbf{u}_t$ tiene una *magnitud* $du_t = (1)\,d\theta$, y su *dirección* está definida por $\mathbf{u}_n$. En consecuencia, $d\mathbf{u}_t = d\theta\mathbf{u}_n$, y por tanto la derivada con respecto al tiempo es $\dot{\mathbf{u}}_t = \dot{\theta}\mathbf{u}_n$. Como $ds = \rho\, d\theta$, figura 12-24*d*, entonces $\dot{\theta} = \dot{s}/\rho$, y por tanto

$$\dot{\mathbf{u}}_t = \dot{\theta}\mathbf{u}_n = \frac{\dot{s}}{\rho}\mathbf{u}_n = \frac{v}{\rho}\mathbf{u}_n$$



(e)

Al sustituir en la ecuación 12-17, **a** puede escribirse como la suma de sus dos componentes,

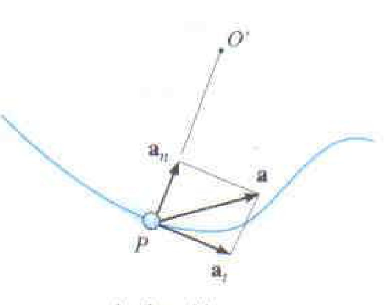
$$\boxed{\mathbf{a} = a_t\mathbf{u}_t + a_n\mathbf{u}_n} \tag{12–18}$$

donde

$$\boxed{a_t = \dot{v}} \quad \text{o} \quad \boxed{a_t ds = v\, dv} \tag{12–19}$$

y

$$\boxed{a_n = \frac{v^2}{\rho}} \tag{12–20}$$



Aceleración

(f)

**Fig. 12-24**

Esas dos componentes mutuamente perpendiculares se muestran en la figura 12-24*f*, en cuyo caso la *magnitud* de la aceleración es el valor positivo de

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2} \tag{12–21}$$

Para resumir estos conceptos, considere los siguientes dos casos especiales de movimiento.

1. Si la partícula se mueve a lo largo de una línea recta, entonces $\rho \to \infty$ y a partir de la ecuación 12-20, $a_n = 0$. Así $a = a_t = \dot{v}$, y podemos concluir que la *componente tangencial de la aceleración representa la razón de cambio con respecto al tiempo en la magnitud de la velocidad*.
2. Si la partícula se mueve con rapidez constante por una curva, entonces $a_t = \dot{v} = 0$ y $a = a_n = v^2/\rho$. Por tanto, la *componente normal de la aceleración representa la razón de cambio con respecto al tiempo en la dirección de la velocidad*. Como $\mathbf{a}_n$ *siempre* actúa hacia el centro de curvatura, esta componente es denominada a veces *aceleración centrípeta*.

Como resultado de estas interpretaciones, una partícula que se mueva a lo largo de la trayectoria curva que aparece en la figura 12-25 tendrá aceleraciones dirigidas como se muestra.

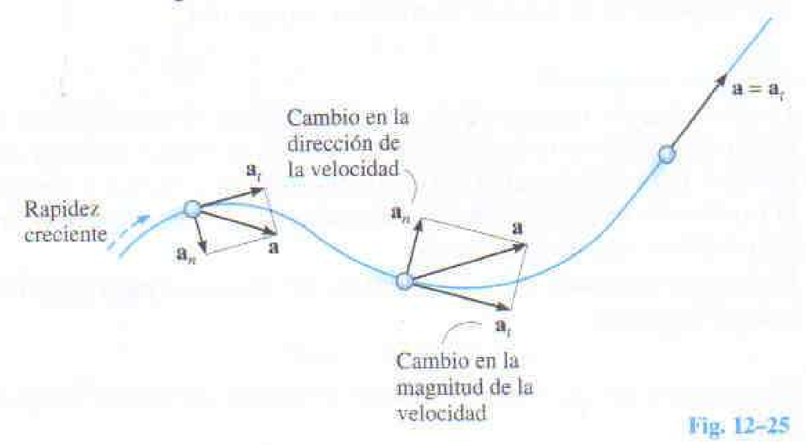



Fig. 12–25

**Movimiento tridimensional.** Si la partícula se está moviendo por una curva espacial, figura 12-26, entonces, en un instante dado, el eje $t$ es especificado de manera única; sin embargo, un número infinito de líneas rectas puede ser construido normalmente al eje tangente en $P$. Como en el caso de movimiento plano, seleccionaremos el eje $n$ positivo dirigido desde $P$ hacia el centro de curvatura de la trayectoria $O'$. Este eje es denominado eje *normal principal* a la curva en $P$. Con los ejes $n$ y $t$ así definidos, las ecuaciones de la 12-15 a la 12-21 pueden ser usadas para determinar $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$. Como $\mathbf{u}_t$ y $\mathbf{u}_n$ son siempre perpendiculares entre sí y se hallan en el plano osculador, para movimiento espacial, un tercer vector unitario, $\mathbf{u}_b$, define un *eje binormal* $b$ que es perpendicular a $\mathbf{u}_t$ y $\mathbf{u}_n$, figura 12-26.

Como los tres vectores unitarios están relacionados entre sí por el producto vectorial cruz, por ejemplo, $\mathbf{u}_b = \mathbf{u}_t \times \mathbf{u}_n$, figura 12-26, es posible usar esta relación para establecer la dirección de uno de los ejes, si las direcciones de los otros dos ejes son conocidas. Por ejemplo, en la dirección $\mathbf{u}_b$ no ocurre movimiento, y entonces si esta dirección y $\mathbf{u}_t$ son conocidas, $\mathbf{u}_n$ puede ser determinada, donde en este caso $\mathbf{u}_n = \mathbf{u}_b \times \mathbf{u}_t$, figura 12-26. Recuerde que $\mathbf{u}_n$ está siempre sobre el lado cóncavo de la curva.

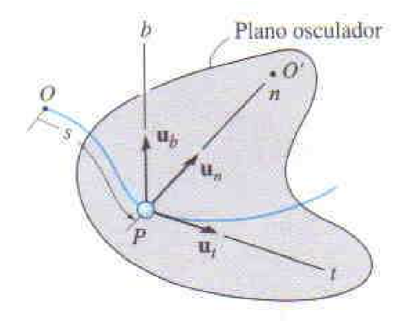



Fig. 12–26



Los conductores que viajan por este trébol de tránsito experimentan una aceleración normal debido al cambio en dirección de su velocidad. Una componente tangencial de la aceleración ocurre cuando la rapidez de los automóviles es aumentada o disminuida.

## PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

### *Sistema coordenado*

- Si la *trayectoria* de la partícula es *conocida*, podemos establecer un conjunto de coordenadas $n$, $t$ que tenga un *origen fijo* que coincida con la partícula en el instante considerado.
- El eje tangente positivo actúa en la direccion del movimiento y el eje normal positivo está dirigido hacia el centro de curvatura de la trayectoria.
- Los ejes $n$ y $t$ son particularmente ventajosos para estudiar la velocidad y la aceleración de la partícula, porque las componentes $t$ y $n$ de $\mathbf{a}$ son expresadas por las ecuaciones 12-19 y 12-20, respectivamente.

### *Velocidad*

- La *velocidad* de la partícula es siempre tangente a la trayectoria.
- La magnitud de la velocidad se encuentra a partir de la derivada con respecto al tiempo de la función trayectoria.

$$v = \dot{s}$$

### *Aceleración tangencial*

- La componente tangencial de la aceleración es el resultado de la razón de cambio con respecto al tiempo en la magnitud de la velocidad. Esta componente actúa en la dirección positiva $s$ cuando la rapidez de la partícula está creciendo, o en la dirección opuesta si la rapidez está disminuyendo.
- Las relaciones entre $a_t$, $v$, $t$ y $s$ son las mismas que para el movimiento rectilíneo, es decir,

$$a_t = \dot{v} \qquad a_t\,ds = v\,dv$$

- Si $a_t$ es constante, $a_t = (a_t)_c$, las ecuaciones anteriores, al ser integradas, dan

$$s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}(a_t)_c t^2$$
$$v = v_0 + (a_t)_c t$$
$$v^2 = v_0^2 + 2(a_t)_c(s - s_0)$$

### *Aceleración normal*

- La componente normal de la aceleración es el resultado de la razón de cambio con respecto al tiempo en la dirección de la velocidad de la partícula. Esta componente *siempre* está dirigida hacia el centro de curvatura de la trayectoria, es decir, a lo largo del eje $n$ positivo.
- La magnitud de esta componente es determinada a partir de

$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

- Si la trayectoria es expresada como $y = f(x)$, el radio de curvatura $\rho$ en cualquier punto sobre la trayectoria es determinado a partir de la ecuación

$$\rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}$$

La derivación de este resultado puede encontrarse en cualquier texto estándar de cálculo diferencial.

## EJEMPLO 12.14

Cuando el esquiador alcanza el punto $A$ a lo largo de la trayectoria parabólica mostrada en la figura 12-27*a*, tiene una rapidez de 6 m/s que está incrementando a 2 m/s². Determine la dirección de su velocidad y la dirección y magnitud de su aceleración en este instante. Desprecie el tamaño del esquiador en los cálculos.

### Solución

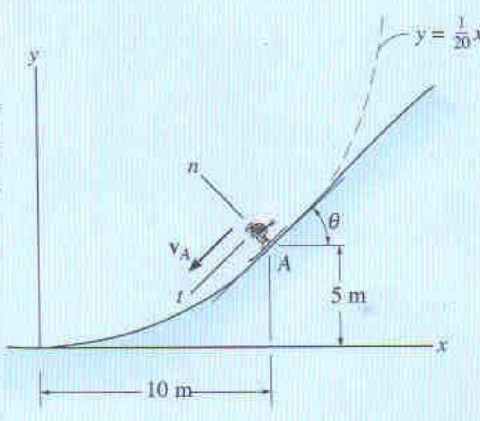
*Sistema coordenado.* Aunque la trayectoria ha sido expresada en términos de sus coordenadas $x$ y $y$, aún podemos establecer el origen de los ejes $n, t$ en el punto fijo $A$ sobre la trayectoria y determinar las componentes de $\mathbf{v}$ y $\mathbf{a}$ a lo largo de esos ejes, figura 12-27*a*.

*Velocidad.* Por definición, la velocidad siempre está dirigida tangencialmente a la trayectoria. Como $y=\frac{1}{20}x^2$, $dy/dx = \frac{1}{10}x$, entonces $dy/dx|_{x=10}=1$. Por tanto, en $A$, $\mathbf{v}$ forma un ángulo de $\theta = \tan^{-1} 1 = 45°$ con el eje $x$, figura 12-27. Luego,

$$v_A = 6 \text{ m/s} \qquad 45° \swarrow \mathbf{v}_A \qquad \textit{Resp.}$$

*Aceleración.* La aceleración es determinada a partir de $\mathbf{a} = \dot{v}\mathbf{u}_t + (v^2/\rho)\mathbf{u}_n$. Sin embargo, primero es necesario determinar el radio de curvatura de la trayectoria en $A$ (10 m, 5 m). Como $d^2y/dx^2 = \frac{1}{10}$, entonces

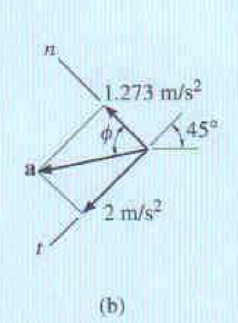
$$\rho = \frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|} = \left.\frac{[1 + (\frac{1}{10}x)^2]^{3/2}}{|\frac{1}{10}|}\right|_{x=10\text{ m}} = 28.28 \text{ m}$$




(a)

La aceleración resulta en

$$\mathbf{a}_A = \dot{v}\mathbf{u}_t + \frac{v^2}{\rho}\mathbf{u}_n$$
$$= 2\mathbf{u}_t + \frac{(6 \text{ m/s})^2}{28.28 \text{ m}}\mathbf{u}_n$$
$$= \{2\mathbf{u}_t + 1.273\mathbf{u}_n\} \text{ m/s}^2$$




(b)

Fig. 12-27

Como se muestra en la figura 12-27*b*,

$$a = \sqrt{(2)^2 + (1.273)^2} = 2.37 \text{ m/s}^2$$

$$\phi = \tan^{-1}\frac{2}{1.273} = 57.5°$$

Así, $57.5° - 45° = 12.5°$, de manera que,

$$a = 2.37 \text{ m/s}^2 \qquad 12.5° \swarrow \mathbf{a}_A \qquad \textit{Resp.}$$

*Nota:* Usando coordenadas $n$, $t$, pudimos resolver fácilmente este problema ya que las componentes $n$ y $t$ toman en cuenta por *separado* los cambios en la magnitud y la dirección de $\mathbf{v}$.

## EJEMPLO 12.15

Un automóvil de carreras $C$ viaja alrededor de la pista circular horizontal que tiene un radio de 300 pies, figura 12-28. Si el automóvil aumenta su rapidez a la razón constante de 7 pies/s$^2$, partiendo del reposo, determine el tiempo necesario para que alcance una aceleración de 8 pies/s$^2$. ¿Cuál es su rapidez en este instante?

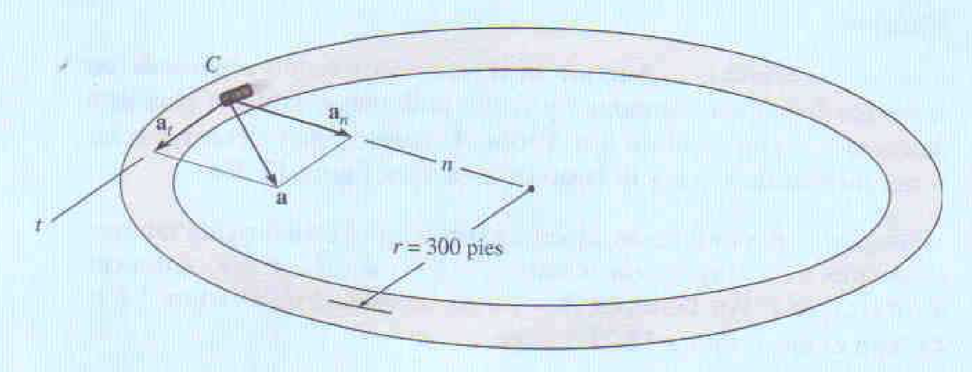



Fig. 12-28

### Solución

***Sistema coordenado.*** El origen de los ejes $n$ y $t$ coincide con el automóvil en el instante considerado. El eje $t$ se encuentra en la dirección del movimiento, y el eje $n$ positivo está dirigido hacia el centro del círculo. Se elige este sistema coordenado ya que la trayectoria es conocida.

***Aceleración.*** La magnitud de la aceleración puede ser relacionada con sus componentes usando $a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$. Aquí $a_t = 7$ pies/s$^2$. Como $a_n = v^2/\rho$, la velocidad como función del tiempo es

$$v = v_0 + (a_t)_c t$$
$$v = 0 + 7t$$

Entonces,

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(7t)^2}{300} = 0.163t^2 \text{ pies/s}^2$$

El tiempo necesario para que la aceleración alcance 8 pies/s$^2$ es, por tanto,

$$a = \sqrt{a_t^2 + a_n^2}$$
$$8 = \sqrt{(7)^2 + (0.163t^2)^2}$$

Despejando el valor positivo de $t$ obtenemos

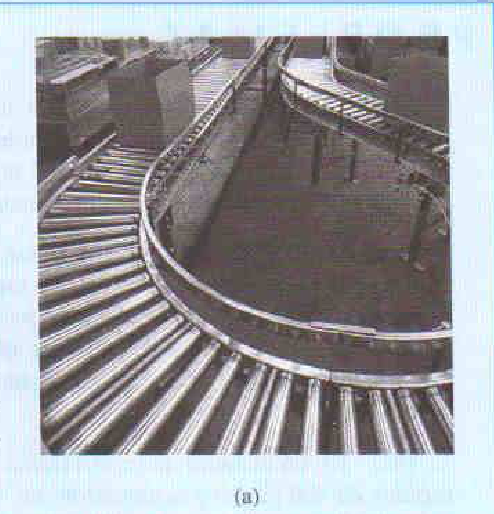
$$0.163t^2 = \sqrt{(8)^2 - (7)^2}$$
$$t = 4.87 \text{ s}$$ *Resp.*

***Velocidad.*** La rapidez en el tiempo $t = 4.87$ s es

$$v = 7t = 7(4.87) = 34.1 \text{ pies/s}$$ *Resp.*

## EJEMPLO 12.16

Las cajas mostradas en la figura 12-29*a* viajan a lo largo de la banda transportadora industrial. Si una caja, como aparece en la figura 12-29*b*, parte del reposo en $A$ e incrementa su rapidez de manera tal que $a_t = (0.2t)\ \text{m/s}^2$, donde $t$ está en segundos, determine la magnitud de su aceleración cuando llega al punto $B$.



(a)

### Solución

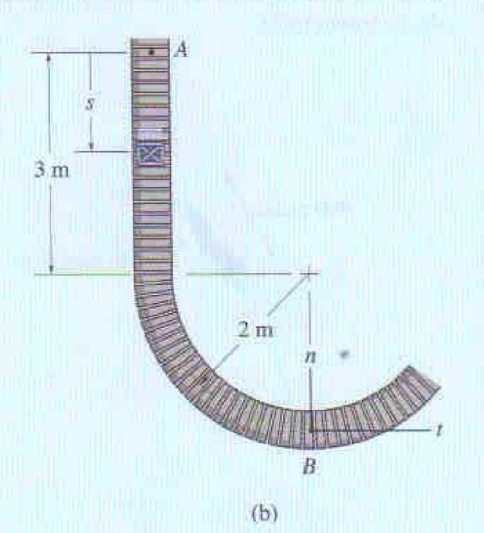
***Sistema coordenado.*** La posición de la caja en cualquier instante es definida desde el punto fijo $A$ usando la coordenada $s$ de posición o de trayectoria, figura 12-29*b*. La aceleración debe ser determinada en $B$, por lo que el origen de los ejes $n$, $t$ está en este punto.

***Aceleración.*** Para determinar las componentes de la aceleración $a_t = \dot{v}$ y $a_n = v^2/\rho$, es necesario formular primero $v$ y $\dot{v}$ de modo que puedan ser evaluadas en $B$. Como $v_A = 0$ cuando $t = 0$, entonces

$$a_t = \dot{v} = 0.2t \qquad (1)$$

$$\int_0^v dv = \int_0^t 0.2t\,dt$$

$$v = 0.1t^2 \qquad (2)$$




(b)

El tiempo necesario para que la caja alcance el punto $B$ puede ser determinado observando que la posición de $B$ es $s_B = 3 + 2\pi(2)/4 = 6.142$ m, figura 12-29*b*, y como $s_A = 0$ cuando $t = 0$, tenemos

$$v = \frac{ds}{dt} = 0.1t^2$$

$$\int_0^{6.142} ds = \int_0^{t_B} 0.1t^2\,dt$$

$$6.142 = 0.0333t_B^3$$

$$t_B = 5.690\ \text{s}$$

Sustituyendo en las ecuaciones 1 y 2 resulta

$$(a_B)_t = \dot{v}_B = 0.2(5.690) = 1.138\ \text{m/s}^2$$

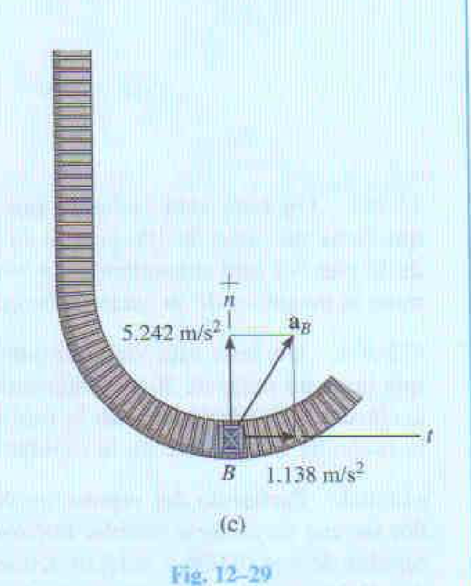
$$v_B = 0.1(5.69)^2 = 3.238\ \text{m/s}$$

En B, $\rho_B = 2$ m, por lo que

$$(a_B)_n = \frac{v_B^2}{\rho_B} = \frac{(3.238\ \text{m/s})^2}{2\ \text{m}} = 5.242\ \text{m/s}^2$$

La magnitud de $\mathbf{a}_B$, figura 12-29*c*, es por tanto

$$a_B = \sqrt{(1.138)^2 + (5.242)^2} = 5.36\ \text{m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$




(c)

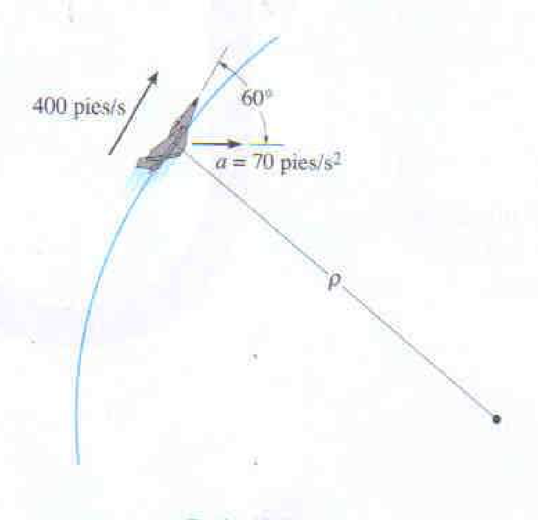
**Fig. 12-29**

# PROBLEMAS

*12-100. Un carro está viajando por una curva circular que tiene un radio de 50 m. Si su rapidez es de 16 m/s y está aumentando uniformemente a 8 m/s$^2$, determine la magnitud de su aceleración en este instante.

12-101. Un carro se desplaza por una pista circular de 250 pies de radio en forma tal que su rapidez por un corto periodo de tiempo $0 \le t \le 4$ s, es $v = 3(t + t^2)$ pies/s, donde $t$ está en segundos. Determine la magnitud de su aceleración cuando $t = 3$ s. ¿Cuánto ha viajado el carro en $t = 3$ s?

12-102. En un instante dado, el avión a chorro tiene una rapidez de 400 pies/s y aceleración de 70 pies/s$^2$ actuando en la dirección mostrada. Determine la razón de incremento en la rapidez del avión y el radio de curvatura $\rho$ de la trayectoria.



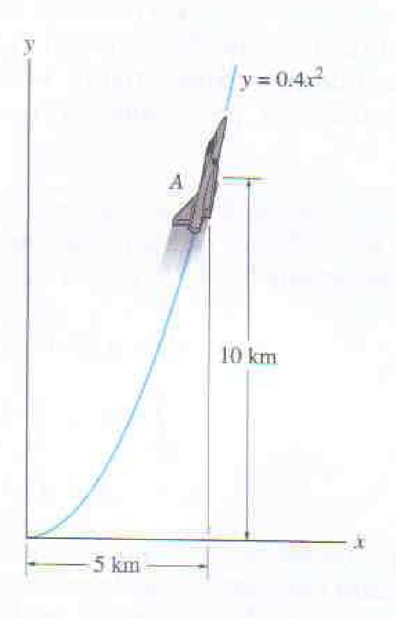

Prob. 12-102

12-103. Un bote está viajando por una curva circular que tiene un radio de 100 pies. Si su rapidez en $t = 0$ es de 15 pies/s y está aumentando a $\dot{v} = (0.8t)$ pies/s$^2$, determine la magnitud de su aceleración en el instante $t = 5$ s.

*12-104. Un bote está viajando por una curva circular que tiene un radio de 20 m. Determine la magnitud de la aceleración del bote cuando la rapidez es $v = 5$ m/s y la razón de incremento en la rapidez es $\dot{v} = 2$ m/s$^2$.

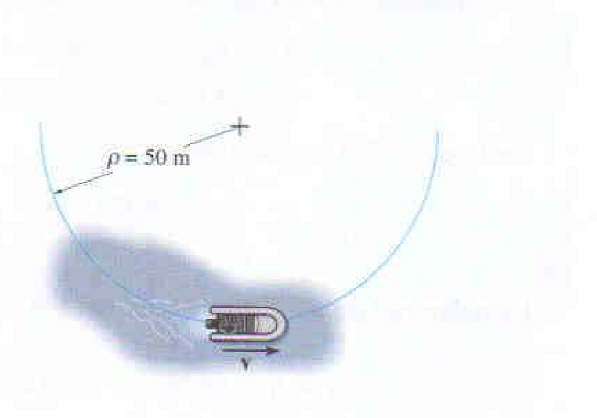
■12-105. Partiendo del reposo, un ciclista viaja alrededor de una trayectoria circular horizontal, $\rho = 10$ m, con rapidez de $v = (0.09t^2 + 0.1t)$ m/s, donde $t$ está en segundos. Determine las magnitudes de su velocidad y su aceleración cuando él ha viajado $s = 3$ m.

12-106. El avión a chorro viaja a lo largo de la trayectoria parabólica vertical. Cuando está en el punto $A$ tiene una rapidez de 200 m/s, la cual está incrementando a razón de 0.8 m/s$^2$. Determine la magnitud de la aceleración del avión cuando está en el punto $A$.



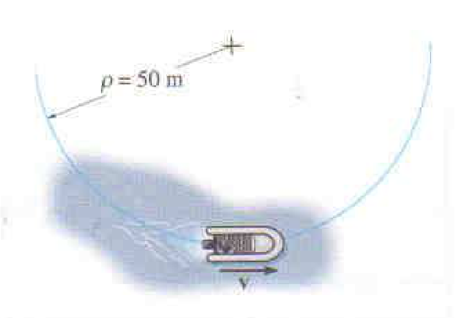

Prob. 12-106

12-107. Partiendo del reposo, el bote viaja alrededor de la trayectoria circular, $\rho = 50$ m, con rapidez $v = (0.8t)$ m/s, donde $t$ está en segundos. Determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración del bote cuando ha recorrido 20 m.




Prob. 12-107

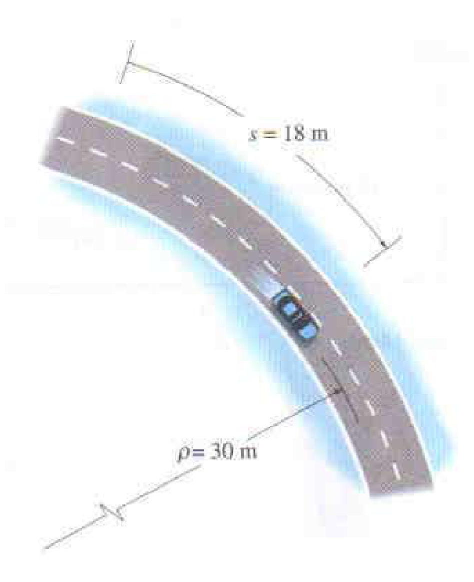
*12-108. Partiendo del reposo, el bote viaja alrededor de la trayectoria circular, $\rho = 50$ m, con rapidez $v = (0.2t^2)$ m/s, donde $t$ está en segundos. Determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración del bote en el instante $t = 3$ s.




Prob. 12–108

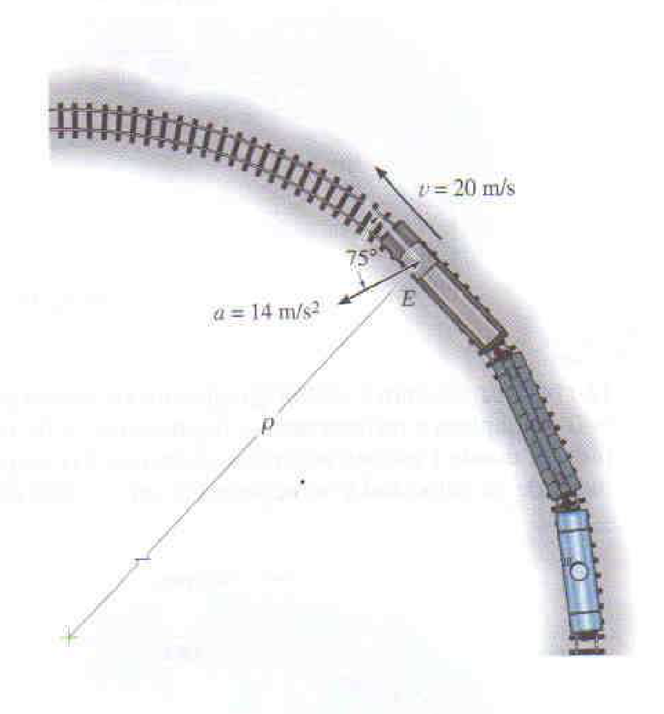
12-109. Un carro se desplaza por una pista circular de 250 pies de radio y su rapidez, por un corto periodo de tiempo $0 \leq t \leq 2$ s, es $v = 3(t + t^2)$ pies/s, donde $t$ está en segundos. Determine la magnitud de su aceleración cuando $t = 2$s. ¿Cuánto ha viajado en $t = 2$ s?

■*12-110. El carro viaja por la trayectoria curva de manera tal que su rapidez aumenta en $\dot{v} = (0.5e^t)$ m/s², donde $t$ está en segundos. Determine las magnitudes de su velocidad y su aceleración después que ha recorrido $s = 18$ m partiendo del reposo. Desprecie el tamaño del carro.



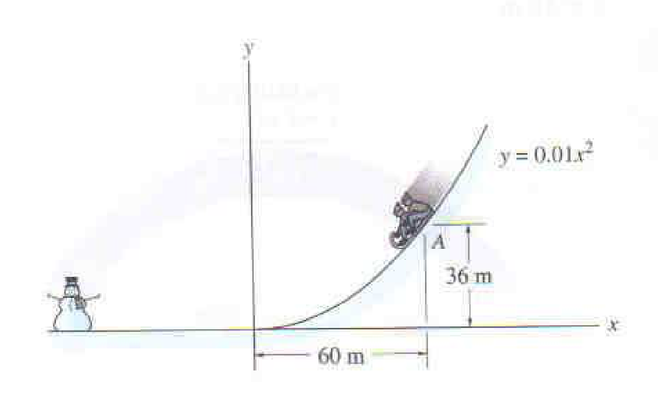

Prob. 12–110

12-111. En un instante dado, el motor de la locomotora situado en $E$ tiene una rapidez de 20 m/s y aceleración de 14 m/s² actuando en la dirección mostrada. Determine la razón de incremento en la rapidez del tren y el radio de curvatura $\rho$ de la trayectoria.



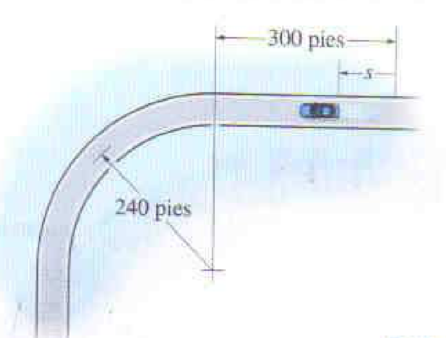

Prob. 12–111

*12-112. Un tobogán viaja por una curva que puede ser aproximada mediante la parábola $y = 0.01x^2$. Determine la magnitud de su aceleración cuando alcanza el punto $A$, donde su rapidez es $v_A = 10$ m/s y está incrementándose a razón de $\dot{v}_A = 3$ m/s².



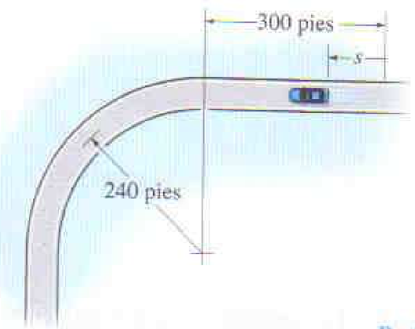

Prob. 12–112

**12-113.** El automóvil está originalmente en reposo en $s = 0$. Si su rapidez es incrementada en $\dot{v} = (0.05t^2)$ pies/s$^2$, donde $t$ está en segundos, determine las magnitudes de su velocidad y su aceleración cuando $t = 18$ s.



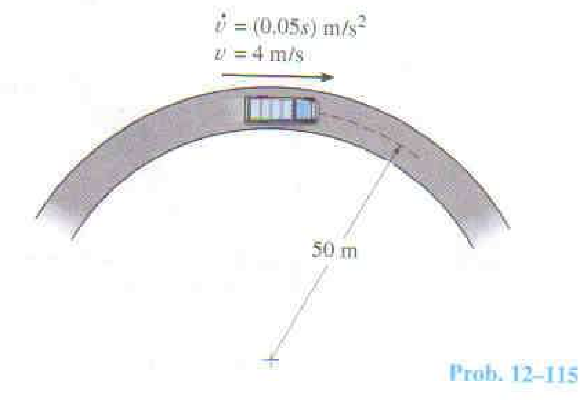

Prob. 12-113

**12-114.** El automóvil está originalmente en reposo en $s = 0$. Si empieza a incrementar su rapidez en $\dot{v} = (0.05t^2)$ pies/s$^2$, donde $t$ está en segundos, determine las magnitudes de su velocidad y su aceleración en $s = 550$ pies.



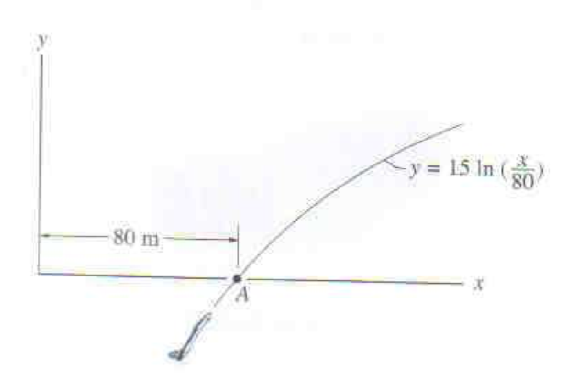

Prob. 12-114

**12-115.** El camión viaja en una trayectoria circular con radio de 50 m a una rapidez de 4 m/s. Por una corta distancia desde $s = 0$, su rapidez es incrementada en $\dot{v} = (0.05s)$ m/s$^2$, donde $s$ está en metros. Determine su rapidez y la magnitud de su aceleración cuando ha recorrido $s = 10$ m.



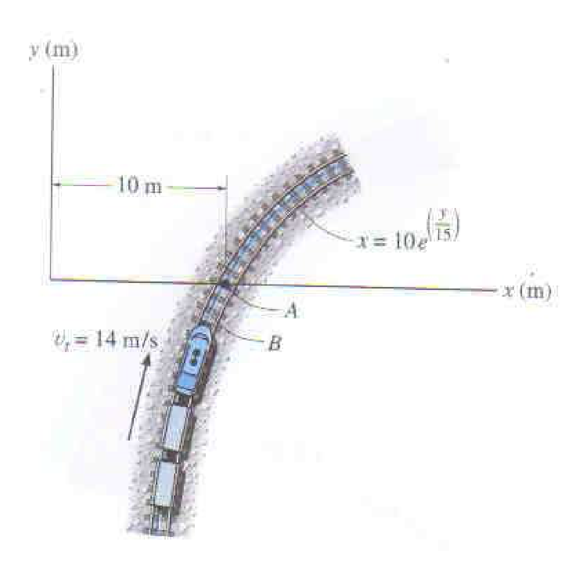

Prob. 12-115

***12-116.** El avión a chorro está viajando con rapidez constante de 110 m/s por la trayectoria curva. Determine la magnitud de la aceleración del avión en el instante en que llega al punto $A$ ($y = 0$).



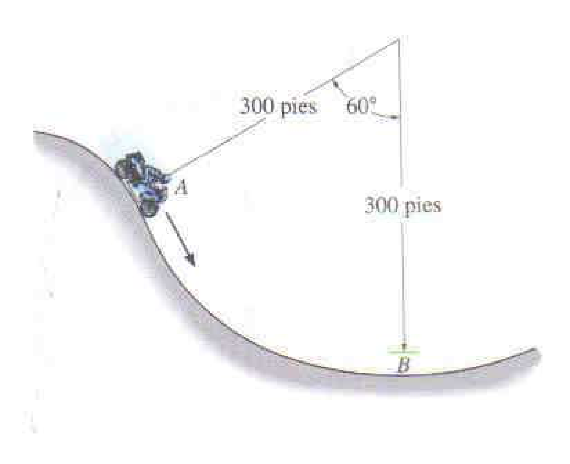

Prob. 12-116

**12-117.** Un tren está viajando con rapidez constante de 14 m/s por la trayectoria curva. Determine la magnitud de la aceleración del frente del tren, $B$, en el instante en que alcanza el punto $A$ ($y = 0$).



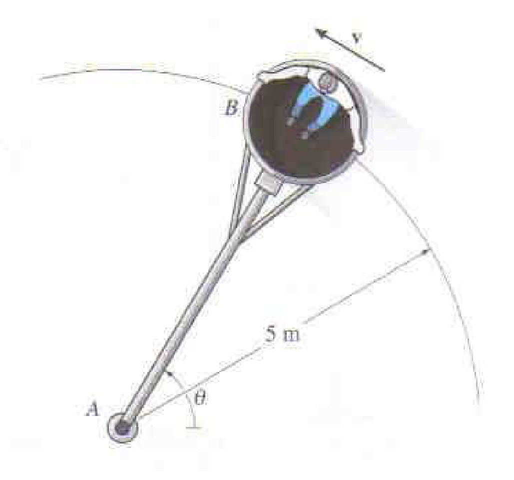

Prob. 12-117

**12-118.** Cuando el motociclista está en $A$, incrementa su rapidez a lo largo de la trayectoria vertical circular a razón de $\dot{v} = (0.3t)$ pies/s$^2$, donde $t$ está en segundos. Si él parte del reposo en $A$, determine las magnitudes de su velocidad y su aceleración cuando llega a $B$.



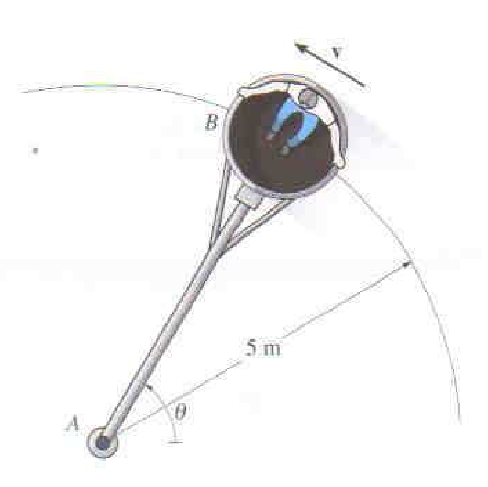

Prob. 12-118

**•12-119.** El carro $B$ gira de manera que su rapidez aumenta en $\dot{v}_B = (0.5e^t)$ m/s$^2$, donde $t$ está en segundos. Si el carro parte del reposo cuando $\theta = 0°$, determine las magnitudes de su velocidad y su aceleración cuando el brazo $AB$ gira $\theta = 30°$. Desprecie el tamaño del carro.



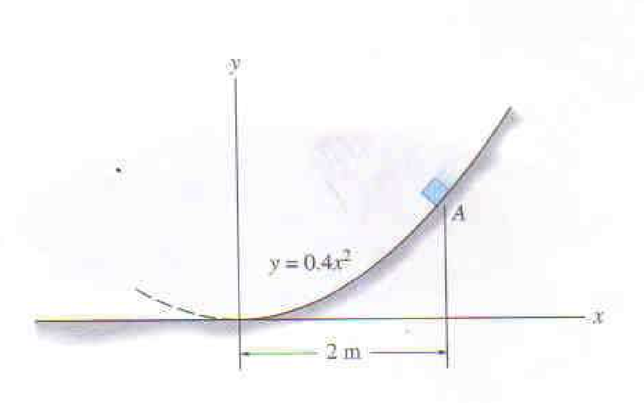

Prob. 12-119

***12-120.** El carro $B$ gira de manera tal que su rapidez aumenta en $\dot{v}_B = (0.5e^t)$ m/s$^2$, donde $t$ está en segundos. Si el carro parte del reposo cuando $\theta = 0°$, determine las magnitudes de su velocidad y su aceleración cuando $t = 2$ s. Desprecie el tamaño del carro. ¿A través de qué ángulo $\theta$ ha viajado?



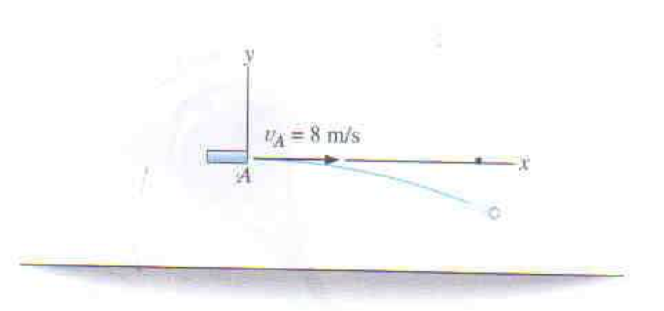

Prob. 12-120

**12-121.** La caja de tamaño insignificante está deslizándose hacia abajo por una trayectoria curva definida mediante la parábola $y = 0.4x^2$. Cuando está en $A$ ($x_A = 2$ m, $y_A = 1.6$ m), su rapidez es $v_B = 8$ m/s y el incremento en rapidez es $dv_B/dt = 4$ m/s$^2$. Determine la magnitud de la aceleración de la caja en este instante.




Prob. 12-121

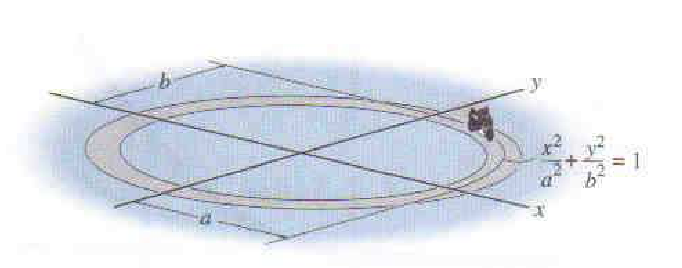
**12-122.** La bola es lanzada horizontalmente desde el tubo con rapidez de 8 m/s. Encuentre la ecuación de la trayectoria, $y = f(x)$, y luego determine la velocidad de la bola y las componentes normal y tangencial de la aceleración cuando $t = 0.25$ s.




Prob. 12-122

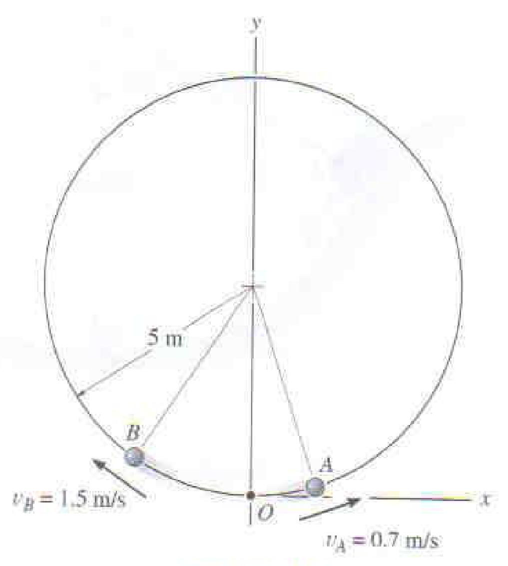
**12-123.** El movimiento de una partícula está definido mediante las ecuaciones $x = (2t + t^2)$ m y $y = (t^2)$ m, donde $t$ está en segundos. Determine las componentes normal y tangencial de la velocidad y la aceleración de la partícula cuando $t = 2$ s.

***12-124.** La motocicleta viaja por la pista elíptica con rapidez constante $v$. Determine la magnitud más grande de la aceleración si $a > b$.



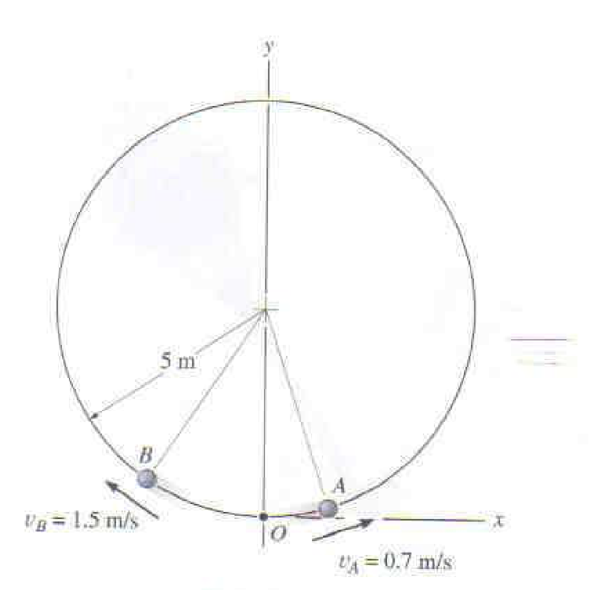

Prob. 12-124

**12-125.** Las dos partículas $A$ y $B$ parten del origen $O$ y viajan en direcciones opuestas por la trayectoria circular con rapidez constante $v_A = 0.7$ m/s y $v_B = 1.5$ m/s, respectivamente. Determine en $t = 2$ s, (a) el desplazamiento por la trayectoria de cada partícula, (b) el vector de posición hacia cada partícula, y (c) la distancia más corta entre las partículas.



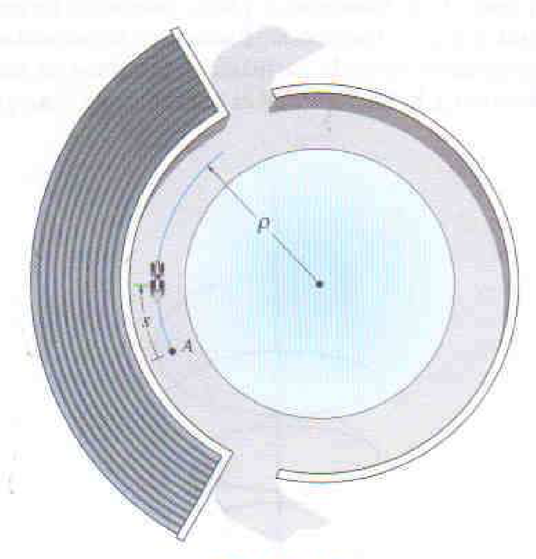

Prob. 12-125

**12-126.** Las dos partículas $A$ y $B$ parten del origen $O$ y viajan en direcciones opuestas por una trayectoria circular con rapidez constante $v_A = 0.7$ m/s y $v_B = 1.5$ m/s, respectivamente. Determine el tiempo en que entran en colisión y la magnitud de la aceleración de $B$ justo antes de que esto pase.




Prob. 12-126

**12-127.** El carro de carreras tiene una rapidez inicial $v_A = 15$ m/s en $A$. Si mientras recorre la pista circular el carro aumenta su rapidez a razón de $a_t = (0.4s)$ m/s$^2$, donde $s$ está en metros, determine el tiempo necesario para que viaje 20 m. Tome $\rho = 150$ m.

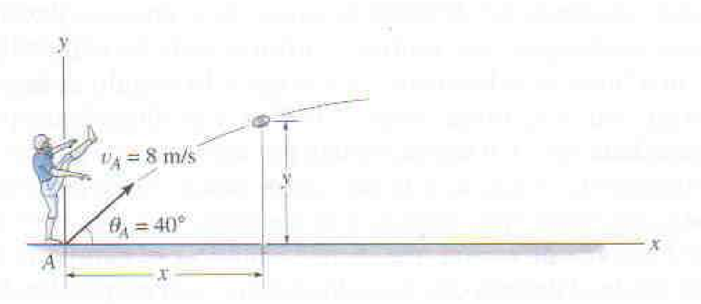



Prob. 12-127

*12-128. Un niño está sentado en un carrusel de manera que siempre queda ubicado a $r = 8$ pies del centro de rotación. El carrusel está originalmente en reposo, y luego, debido a la rotación, la rapidez del niño es incrementada en 2 pies/s$^2$. Determine el tiempo requerido para que su aceleración sea de 4 pies/s$^2$.

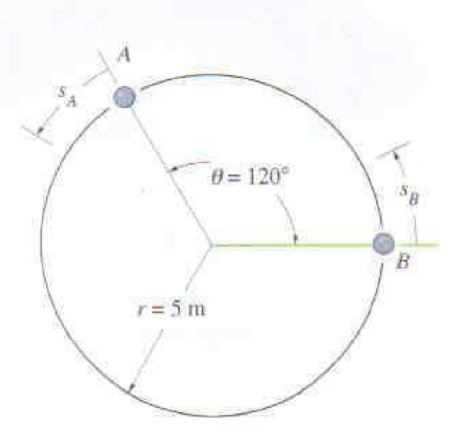
**12-129.** Una partícula viaja a lo largo de la trayectoria $y = a + bx + cx^2$, donde $a$, $b$ y $c$ son constantes. Si la rapidez de la partícula es constante, $v = v_0$, determine las componentes $x$ y $y$ de la velocidad y la componente normal de la aceleración cuando $x = 0$.

■**12-130.** La pelota es pateada con una rapidez inicial $v_A = 8$ m/s a un ángulo $\theta_A = 40°$ con la horizontal. Encuentre la ecuación de la trayectoria, $y = f(x)$, y luego determine la velocidad de la pelota y las componentes normal y tangencial de su aceleración cuando $t = 0.25$ s.



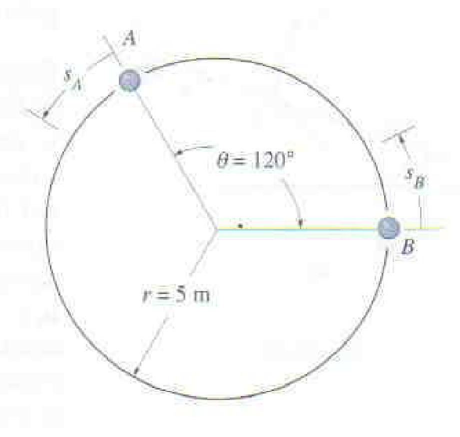

Prob. 12-130

■**12-131.** Las partículas $A$ y $B$ están viajando en sentido contrario al de las manecillas del reloj alrededor de una pista circular con rapidez constante de 8 m/s. Si en el instante mostrado la rapidez de $A$ es incrementada por $\dot{v}_A = (4s_A)$ m/s$^2$, donde $s_A$ está en metros, determine la distancia medida en sentido contrario al de las manecillas del reloj a lo largo de la pista desde $B$ hasta $A$ cuando $t = 1$ s. ¿Cuál es la magnitud de la aceleración de cada partícula en este instante?



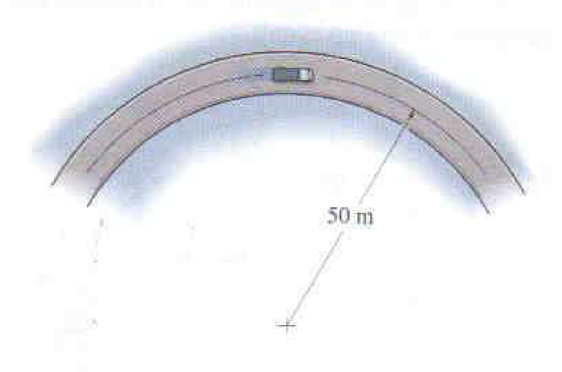

Prob. 12-131

*12-132. Las partículas $A$ y $B$ están viajando alrededor de una pista circular con rapidez de 8 m/s en el instante mostrado. Si la rapidez de $B$ es incrementada en $\dot{v}_B = 4$ m/s$^2$, y en el mismo instante $A$ tiene un aumento en rapidez $\dot{v}_A = 0.8t$ m/s$^2$, determine el tiempo en que ocurre una colisión entre estas partículas. ¿Cuál es la magnitud de la aceleración de cada partícula justo antes de la colisión?




Prob. 12-132

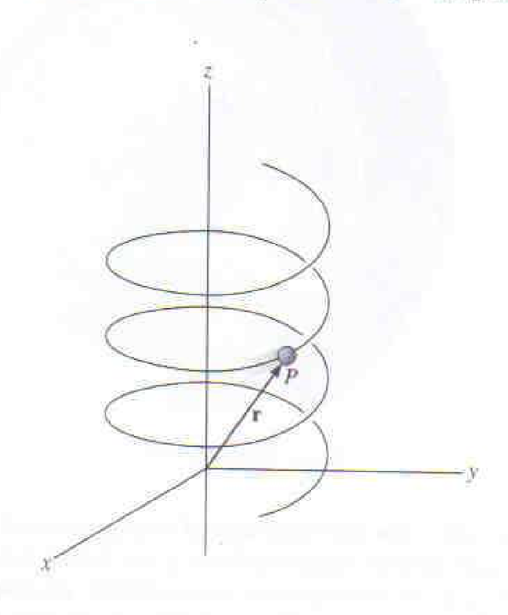
12-133. El camión viaja con rapidez de 4 m/s a lo largo de un camino circular que tiene radio de 50 m. Por una corta distancia desde $s = 0$, su rapidez se incrementa en $\dot{v} = (0.05s)$ m/s$^2$, donde $s$ está en metros. Determine su rapidez y la magnitud de su aceleración cuando el camión se ha desplazado $s = 10$ m.




Prob. 12–133

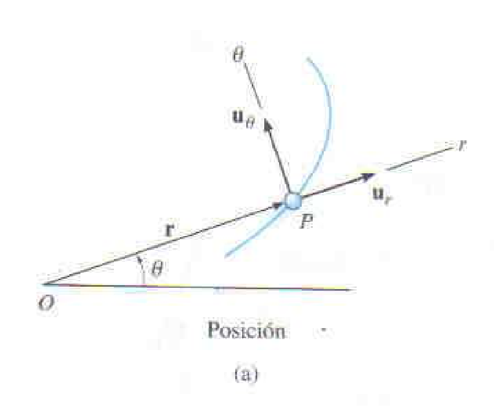
■12-134. Un go-cart se mueve a lo largo de una pista circular de 100 pies de radio en forma tal que su rapidez por un corto periodo, $0 \leq t \leq 4$ s, es $v = 60(1 - e^{-t^2})$ pies/s. Determine la magnitud de su aceleración cuando $t = 2$ s. ¿Qué tan lejos ha viajado en $t = 2$ s? Use la regla de Simpson con $n = 50$ para evaluar la integral.

12-135. Una partícula $P$ viaja a lo largo de una trayectoria espiral elíptica de manera tal que su vector posición $\mathbf{r}$ está definido mediante $\mathbf{r} = \{2\cos(0.1t)\mathbf{i} + 1.5\,\text{sen}(0.1t)\mathbf{j} + (2t)\mathbf{k}\}$ m, donde $t$ está en segundos y los argumentos para el seno y el coseno son dados en radianes. Cuando $t = 8$ s, determine los ángulos coordenados de dirección $\alpha$, $\beta$ y $\gamma$ que el eje binormal al plano osculador forma con los ejes $x$, $y$ y $z$. *Sugerencia*: Encuentre la velocidad $\mathbf{v}_P$ y la aceleración $\mathbf{a}_P$ de la partícula en términos de sus componentes **i**, **j**, **k**. La binormal es paralela a $\mathbf{v}_P \times \mathbf{a}_P$. ¿Por qué?




Prob. 12–135

## 12.8 Movimiento curvilíneo: Componentes cilíndricas




Posición

(a)

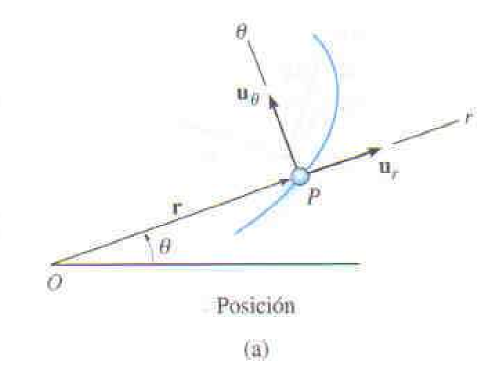
Fig. 12–30

En algunos problemas de ingeniería a menudo es conveniente expresar la trayectoria del movimiento en términos de coordenadas cilíndricas $r$, $\theta$, $z$. Si el movimiento está restringido al plano, se usan las coordenadas polares $r$ y $\theta$.

**Coordenadas polares.** Podemos especificar la ubicación de la partícula $P$ mostrada en la figura 12-30$a$ usando la *coordenada radial* $r$, la cual se extiende desde el origen fijo $O$ hasta la partícula, y una *coordenada transversal* $\theta$, que es el ángulo con sentido contrario al de las manecillas del reloj entre una línea de referencia fija y el eje $r$. El ángulo es medido en grados o en radianes, donde 1 rad = 180°/$\pi$. Las direcciones positivas de las coordenadas $r$ y $\theta$ son definidas por los vectores unitarios $\mathbf{u}_r$ y $\mathbf{u}_\theta$, respectivamente. Aquí, $\mathbf{u}_r$ o la dirección radial $+r$ se extiende desde $P$ a lo largo de $r$ creciente, cuando $\theta$ se mantiene fija, y $\mathbf{u}_\theta$ o $+\theta$ se extiende desde $P$ en una dirección que ocurre cuando $r$ se mantiene fija y $\theta$ es incrementada. Advierta que esas direcciones son perpendiculares entre sí.

**Posición.** En cualquier instante la posición de la partícula, figura 12-30*a*, está definida por el vector posición

$$\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r \tag{12–22}$$



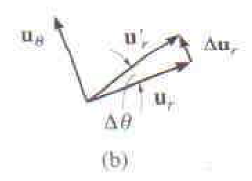

Posición

(a)

**Velocidad.** La velocidad instantánea $v$ se obtiene tomando la derivada con respecto al tiempo de **r**. Usando un punto para representar la diferenciación con respecto al tiempo, tenemos

$$\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\mathbf{u}}_r$$

Para evaluar $\dot{\mathbf{u}}_r$, advierta que $\mathbf{u}_r$ cambia sólo su dirección con respecto al tiempo, ya que por definición la magnitud de este vector es siempre igual a una unidad. Por tanto, durante el tiempo $\Delta t$, un cambio $\Delta r$ no ocasionará un cambio en la dirección de $\mathbf{u}_r$; sin embargo, un cambio $\Delta\theta$ causará que $\mathbf{u}_r$ se vuelva $\mathbf{u}'_r$, donde $\mathbf{u}'_r = \mathbf{u}_r + \Delta\mathbf{u}_r$, figura 12-30*b*. El cambio en el tiempo en $\mathbf{u}_r$ es entonces $\Delta\mathbf{u}_r$. Para ángulos pequeños $\Delta\theta$, este vector tiene una magnitud $\Delta u_r \approx 1(\Delta\theta)$ y actúa en la dirección $\mathbf{u}_\theta$. Por tanto, $\Delta\mathbf{u}_r = \Delta\theta\mathbf{u}_\theta$, y entonces




(b)

$$\dot{\mathbf{u}}_r = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{u}_r}{\Delta t} = \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)\mathbf{u}_\theta$$

$$\dot{\mathbf{u}}_r = \dot{\theta}\mathbf{u}_\theta \tag{12–23}$$

Sustituyendo en la ecuación anterior por **v**, la velocidad puede ser escrita en términos de componentes como

$$\mathbf{v} = v_r\mathbf{u}_r + v_\theta\mathbf{u}_\theta \tag{12–24}$$

donde

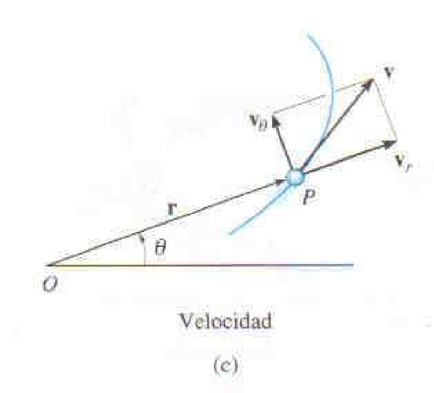
$$v_r = \dot{r}$$
$$v_\theta = r\dot{\theta} \tag{12–25}$$

Estas componentes se muestran gráficamente en la figura 12-30*c*. La *componente radial* $\mathbf{v}_r$ es una medida de la razón de crecimiento o disminución en la longitud de la coordenada radial, es decir, $\dot{r}$; la *componente transversal* $\mathbf{v}_\theta$ puede ser interpretada como la razón de movimiento por la circunferencia de un círculo con radio $r$. En particular, el término $\dot{\theta} = d\theta/dt$ se denomina *velocidad angular*, ya que indica la razón de cambio con respecto al tiempo del ángulo $\theta$. Las unidades comunes usadas para esta medida son rad/s.

Como $\mathbf{v}_r$ y $\mathbf{v}_\theta$ son mutuamente perpendiculares, la *magnitud* de la velocidad o rapidez es simplemente el valor positivo de

$$v = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2} \tag{12–26}$$

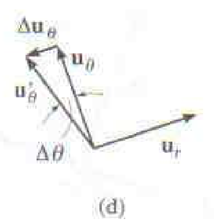
y la *dirección* de **v** es, por supuesto, tangente a la trayectoria en *P*, figura 12-30*c*.




Velocidad

(c)

**Fig. 12–30**



(d)

**Aceleración.** Tomando las derivadas con respecto al tiempo de la ecuación 12-24, usando las ecuaciones 12-25, obtenemos la aceleración instantánea de la partícula,

$$\mathbf{a} = \dot{\mathbf{v}} = \ddot{r}\mathbf{u}_r + \dot{r}\dot{\mathbf{u}}_r + \dot{r}\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + r\ddot{\theta}\mathbf{u}_\theta + r\dot{\theta}\dot{\mathbf{u}}_\theta$$

Para evaluar el término que implica $\dot{\mathbf{u}}_\theta$, sólo es necesario encontrar el cambio hecho en la dirección de $\mathbf{u}_\theta$ ya que su magnitud es siempre la unidad. Durante el tiempo $\Delta t$, un cambio $\Delta r$ no cambiará la dirección de $\mathbf{u}_\theta$, aunque un cambio $\Delta_\theta$ cambiará $\mathbf{u}_\theta$ a $\mathbf{u}'_\theta$, donde $\mathbf{u}'_\theta = \mathbf{u}_\theta + \Delta\mathbf{u}_\theta$, figura 12-30*d*. El cambio con respecto al tiempo en $\mathbf{u}_\theta$ es entonces $\Delta\mathbf{u}_\theta$. Para ángulos pequeños, este vector tiene una magnitud $\Delta u_\theta \approx 1\ (\Delta\theta)$ y actúa en la dirección $-\mathbf{u}_r$; esto es, $\Delta\mathbf{u}_\theta = -\Delta_\theta\mathbf{u}_r$. Entonces,

$$\dot{\mathbf{u}}_\theta = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\mathbf{u}_\theta}{\Delta t} = -\left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t}\right)\mathbf{u}_r$$

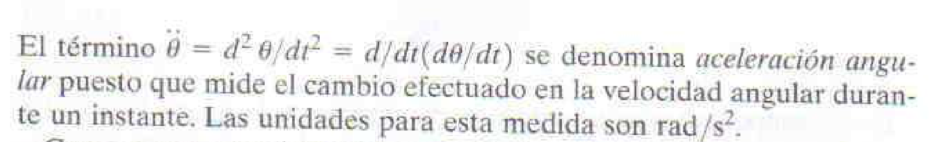
$$\dot{\mathbf{u}}_\theta = -\dot{\theta}\mathbf{u}_r \qquad (12\text{–}27)$$

Sustituyendo este resultado y la ecuación 12-23 en la ecuación anterior para $\mathbf{a}$, podemos escribir la aceleración en términos de componentes como

$$\mathbf{a} = a_r\mathbf{u}_r + a_\theta\mathbf{u}_\theta \qquad (12\text{–}28)$$

donde

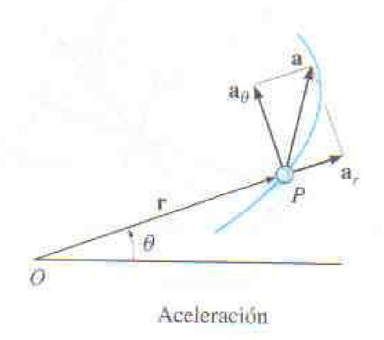
$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \qquad (12\text{–}29)$$


El término $\ddot{\theta} = d^2\theta/dt^2 = d/dt(d\theta/dt)$ se denomina *aceleración angular* puesto que mide el cambio efectuado en la velocidad angular durante un instante. Las unidades para esta medida son rad/s$^2$.

Como $\mathbf{a}_r$ y $\mathbf{a}_\theta$ son siempre perpendiculares entre sí, la *magnitud* de la aceleración es simplemente el valor positivo de

$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2} \qquad (12\text{–}30)$$

La *dirección* es determinada a partir de la suma vectorial de sus dos componentes. En general, $\mathbf{a}$ *no* será tangente a la trayectoria, figura 12-30*e*.



Aceleración

(e)

Fig. 12-30

**Coordenadas cilíndricas.** Si la partícula $P$ se mueve por una curva espacial como se muestra en la figura 12-31, entonces su ubicación puede ser especificada por las tres *coordenadas cilíndricas*, $r$, $\theta$, $z$. La coordenada $z$ es idéntica a la usada para coordenadas rectangulares. Como el vector unitario que define su dirección, $\mathbf{u}_z$, es constante, las derivadas con respecto al tiempo de este vector son cero, y por tanto la posición, la velocidad y la aceleración de la partícula pueden ser escritas en términos de sus coordenadas cilíndricas como sigue:

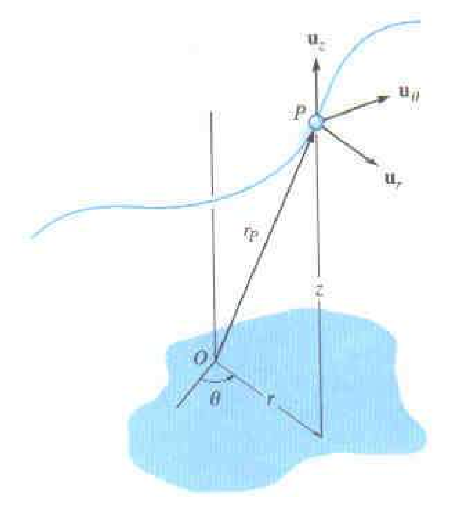



Fig. 12-31

$$\mathbf{r}_P = r\mathbf{u}_r + z\mathbf{u}_z$$
$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta + \dot{z}\mathbf{u}_z$$
$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta + \ddot{z}\mathbf{u}_z$$

**Derivadas con respecto al tiempo.** Las ecuaciones de la cinemática requieren que obtengamos las derivadas con respecto al tiempo $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dot{\theta}$, y $\ddot{\theta}$ para evaluar las componentes $r$ y $\theta$ de **v** y **a**. Generalmente ocurren dos tipos de problemas:

1. Si las coordenadas se especifican como ecuaciones paramétricas del tiempo, $r = r(t)$ y $\theta = \theta(t)$, entonces las derivadas con respecto al tiempo pueden encontrarse directamente. Por ejemplo, considere

$$r = 4t^2 \qquad \theta = (8t^3 + 6)$$
$$\dot{r} = 8t \qquad \dot{\theta} = 24t^2$$
$$\ddot{r} = 8 \qquad \ddot{\theta} = 48t$$

2. Si las ecuaciones paramétricas del tiempo no están dadas, entonces será necesario especificar la trayectoria $r = f(\theta)$ y encontrar la *relación* entre las derivadas con respecto al tiempo usando la regla de la cadena del cálculo. Considere los siguientes ejemplos.

$$r = 5\theta^2$$
$$\dot{r} = 10\theta\dot{\theta}$$
$$\ddot{r} = 10[(\dot{\theta})\dot{\theta} + \theta(\ddot{\theta})]$$
$$= 10\dot{\theta}^2 + 10\theta\ddot{\theta}$$




El movimiento en espiral de este joven puede ser determinado usando componentes cilíndricas. Aquí, la coordenada radial $r$ es constante, la coordenada transversal $\theta$ aumentará con el tiempo conforme el joven gire alrededor de la vertical, y su altura $z$ disminuirá con el tiempo.

o bien,

$$r^2 = 6\theta^3$$
$$2r\dot{r} = 18\theta^2\dot{\theta}$$
$$2[(\dot{r})\dot{r} + r(\ddot{r})] = 18[(2\theta\dot{\theta})\dot{\theta} + \theta^2(\ddot{\theta})]$$
$$\dot{r}^2 + r\ddot{r} = 9(2\theta\dot{\theta}^2 + \theta^2\ddot{\theta})$$

Si dos de las *cuatro* derivadas con respecto al tiempo $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dot{\theta}$, y $\ddot{\theta}$ son *conocidas*, entonces las otras dos se pueden obtener a partir de las ecuaciones para las primera y segunda derivadas de $r = f(\theta)$. Vea el ejemplo 12.19. Sin embargo, en algunos problemas, dos de estas derivadas pueden *no* ser conocidas, pero la magnitud de la velocidad o la aceleración de la partícula pueden ser especificadas. Si este es el caso, las ecuaciones 12-26 y 12-30 [$v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2$ y $a^2 = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2$] pueden usarse para obtener las relaciones necesarias que impliquen $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dot{\theta}$,. Vea el ejemplo 12.20.

## PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

### *Sistema coordenado*

- Las coordenadas polares son una buena opción para resolver problemas para los cuales los datos relativos al movimiento angular de la coordenada $r$ radial son dados para describir el movimiento de la partícula. Además, algunas trayectorias de movimiento pueden ser convenientemente descritas en términos de estas coordenadas.
- Para usar coordenadas polares, el origen se establece en un punto fijo, y la línea radial $r$ se dirige hacia la partícula.
- La coordenada transversal $\theta$ se mide desde una línea fija de referencia hasta la línea radial.

### *Velocidad y aceleración*

- Una vez que $r$ y las cuatro derivadas con respecto al tiempo $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dot{\theta}$, y $\ddot{\theta}$ han sido evaluadas en el instante considerado, sus valores pueden ser sustituidos en las ecuaciones 12-25 y 12-29 para obtener las componentes radial y transversal de **v** y **a**.
- Si es necesario tomar las derivadas con respecto al tiempo de $r = f(\theta)$, es muy importante usar la regla de la cadena del cálculo diferencial.
- El movimiento en tres dimensiones requiere de una simple ampliación del procedimiento anterior para incluir $\dot{z}$ y $\ddot{z}$.

Además de los ejemplos que siguen, ejemplos adicionales que implican el cálculo de $a_r$ y $a_\theta$ pueden encontrarse en las secciones "cinemáticas" de los ejemplos 13.10, 13.11 y 13.12.

## EJEMPLO 12.17

El juego de un parque de diversiones, mostrado en la figura 12-32*a*, consiste en una silla que gira en una trayectoria circular horizontal de radio $r$ tal que el brazo $OB$ tiene una velocidad angular $\dot{\theta}$ y aceleración angular $\ddot{\theta}$. Determine las componentes radial y transversal de la velocidad y la aceleración del pasajero. Desprecie el tamaño de éste en los cálculos.

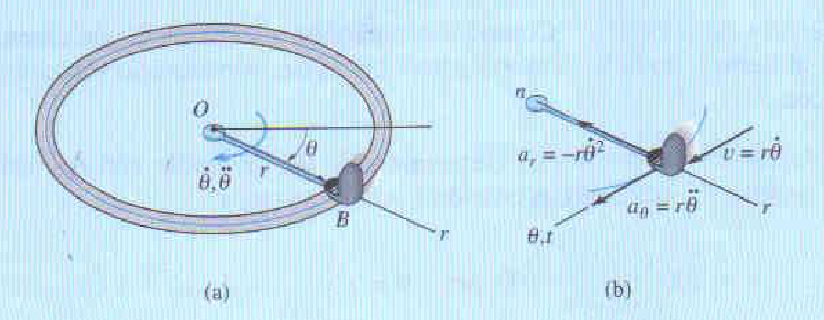



Fig. 12-32

### Solución

*Sistema coordenado.* Como el movimiento angular del brazo está dado, seleccionamos coordenadas polares para encontrar la solución, figura 12-32*a*. Aquí, $\theta$ no está relacionada con $r$, ya que el radio es constante para toda $\theta$.

*Velocidad y aceleración.* Las ecuaciones 12-25 y 12-29 se usarán para encontrar la solución, por lo que primero es necesario especificar las primera y segunda derivadas con respecto al tiempo de $r$ y $\theta$. Como $r$ es *constante*, tenemos

$$r = r \qquad \dot{r} = 0 \qquad \ddot{r} = 0$$

Entonces,

$$v_r = \dot{r} = 0 \qquad \textit{Resp.}$$

$$v_\theta = r\dot{\theta} \qquad \textit{Resp.}$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -r\dot{\theta}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

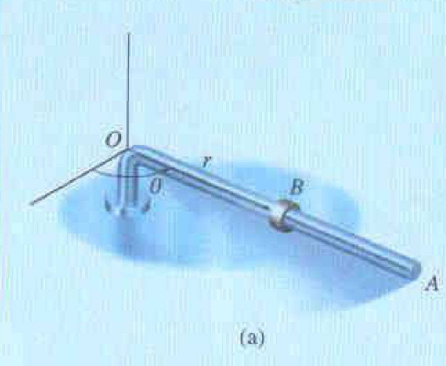
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = r\ddot{\theta} \qquad \textit{Resp.}$$

Estos resultados se muestran en la figura 12-32*b*. También se muestran los ejes $n, t$, que en este caso especial de movimiento circular son *colineales* con los ejes $r$ y $\theta$, respectivamente. En particular, advierta que $v = v_\theta = v_t = r\dot{\theta}$. También,

$$-a_r = a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(r\dot{\theta})^2}{r} = r\dot{\theta}^2$$

$$a_\theta = a_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(r\dot{\theta}) = \frac{dr}{dt}\dot{\theta} + r\frac{d\dot{\theta}}{dt} = 0 + r\ddot{\theta}$$

## EJEMPLO 12.18

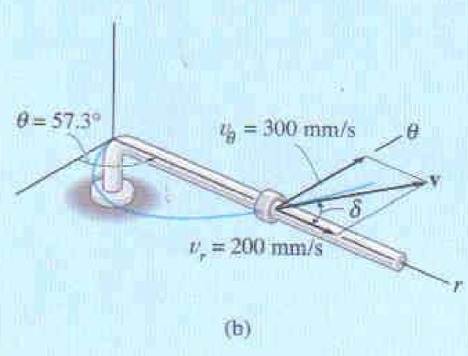



(a)

La barra *OA* que aparece en la figura 12-33*a* está girando en el plano horizontal de manera tal que $\theta = (t^3)$ rad. Al mismo tiempo, el collar *B* se desliza hacia fuera a lo largo de *OA* de modo que $r = (100t^2)$ mm. Si en ambos casos *t* está en segundos, determine la velocidad y la aceleración del collar cuando $t = 1$ s.

### Solución

***Sistema coordenado.*** Como las ecuaciones paramétricas con respecto al tiempo de la trayectoria están dadas, no es necesario relacionar *r* con *θ*.




(b)

***Velocidad y aceleración.*** Determinando las derivadas con respecto al tiempo y evaluándolas cuando $t = 1$ s, tenemos

$$r = 100t^2\Big|_{t=1\,\text{s}} = 100 \text{ mm} \qquad \theta = t^3\Big|_{t=1\,\text{s}} = 1 \text{ rad} = 57.3^\circ$$

$$\dot{r} = 200t\Big|_{t=1\,\text{s}} = 200 \text{ mm/s} \qquad \dot{\theta} = 3t^2\Big|_{t=1\,\text{s}} = 3 \text{ rad/s}$$

$$\ddot{r} = 200\Big|_{t=1\,\text{s}} = 200 \text{ mm/s}^2 \qquad \ddot{\theta} = 6t\Big|_{t=1\,\text{s}} = 6 \text{ rad/s}^2.$$

Como se muestra en la figura 12-33*b*,

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta \\ &= 200\mathbf{u}_r + 100(3)\mathbf{u}_\theta \\ &= \{200\mathbf{u}_r + 300\mathbf{u}_\theta\} \text{ mm/s} \end{aligned}$$

La magnitud de *v* es

$$v = \sqrt{(200)^2 + (300)^2} = 361 \text{ mm/s} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\delta = \tan^{-1}\left(\frac{300}{200}\right) = 56.3^\circ \qquad \delta + 57.3^\circ = 114^\circ \qquad \textit{Resp.}$$

θ = 57.3° φ a θ $a_\theta = 1800$ mm/s² $a_r = 700$ mm/s² r

(c)

**Fig. 12-33**

Como se muestra en la figura 12-33*c*,

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta \\ &= [200 - 100(3)^2]\mathbf{u}_r + [100(6) + 2(200)3]\mathbf{u}_\theta \\ &= \{-700\mathbf{u}_r + 1800\mathbf{u}_\theta\} \text{ mm/s}^2 \end{aligned}$$

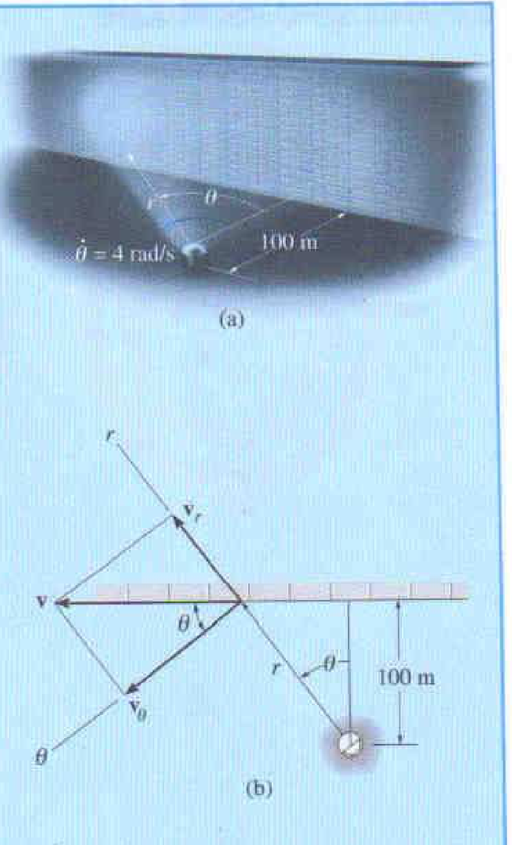
La magnitud de **a** es

$$a = \sqrt{(700)^2 + (1800)^2} = 1930 \text{ mm/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

$$\phi = \tan^{-1}\left(\frac{1800}{700}\right) = 68.7^\circ \qquad (180^\circ - \phi) + 57.3^\circ = 169^\circ \qquad \textit{Resp.}$$

## EJEMPLO 12.19

El faro que se muestra en la figura 12-34*a* arroja un punto de luz a lo largo de la cara de una pared que está localizada a 100 m del faro. Determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración con que el punto parece viajar por la pared en el instante $\theta = 45°$. El faro está girando a razón constante de $\dot{\theta} = 4$ rad/s.




### Solución

***Sistema coordenado.*** Usaremos coordenadas polares para resolver este problema ya que la razón angular del faro está dada. Para encontrar las derivadas necesarias con respecto al tiempo primero es necesario relacionar $r$ con $\theta$. A partir de la figura 12-34*a*, esta relación es

$$r = 100/\cos\theta = 100\sec\theta$$

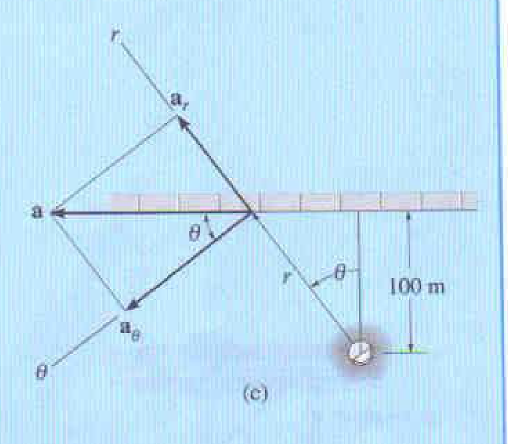
***Velocidad y aceleración.*** Usando la regla de la cadena del cálculo, recordando que $d(\sec\theta) = \sec\theta\tan\theta\, d\theta$, y $d(\tan\theta) = \sec^2\theta\, d\theta$, tenemos

$$\dot{r} = 100(\sec\theta\tan\theta)\dot{\theta}$$
$$\ddot{r} = 100(\sec\theta\tan\theta)\dot{\theta}(\tan\theta)\dot{\theta} + 100\sec\theta(\sec^2\theta)\dot{\theta}(\dot{\theta})$$
$$+ 100\sec\theta\tan\theta(\ddot{\theta})$$
$$= 100\sec\theta\tan^2\theta(\dot{\theta})^2 + 100\sec^3\theta(\dot{\theta})^2 + 100(\sec\theta\tan\theta)\ddot{\theta}$$

Como $\dot{\theta} = 4$ rad/s = constante, entonces $\ddot{\theta} = 0$, y las ecuaciones anteriores cuando $\theta = 45°$, son

$$r = 100\sec 45° = 141.4$$
$$\dot{r} = 400\sec 45°\tan 45° = 565.7$$
$$\ddot{r} = 1600(\sec 45°\tan^2 45° + \sec^3 45°) = 6788.2$$

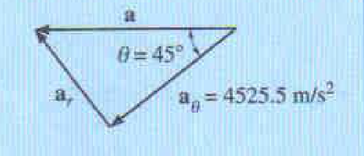
Como se muestra en la figura 12-34*b*,




$$\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{u}_r + r\dot{\theta}\mathbf{u}_\theta$$
$$= 565.7\mathbf{u}_r + 141.4(4)\mathbf{u}_\theta$$
$$= \{565.7\mathbf{u}_r + 565.7\mathbf{u}_\theta\}\text{ m/s}$$
$$v = \sqrt{v_r^2 + v_\theta^2} = \sqrt{(565.7)^2 + (565.7)^2}$$
$$= 800\text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

Como se muestra en la figura 12-34*c*,

$$\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\mathbf{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\mathbf{u}_\theta$$
$$= [6788.2 - 141.4(4)^2]\mathbf{u}_r + [141.4(0) + 2(565.7)4]\mathbf{u}_\theta$$
$$= \{4525.5\mathbf{u}_r + 4525.5\mathbf{u}_\theta\}\text{ m/s}^2$$
$$a = \sqrt{a_r^2 + a_\theta^2} = \sqrt{(4525.5)^2 + (4525.5)^2}$$
$$= 6400\text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

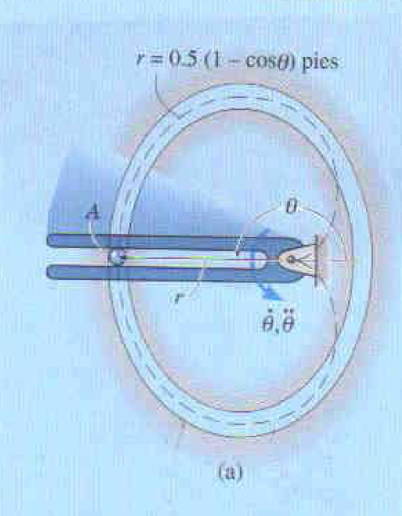



(d)

Fig. 12-34

*Nota:* También es posible encontrar $a$ sin tener que calcular $\ddot{r}$ (o $a_r$). Como se muestra en la figura 12-34*d*, como $a_\theta = 4525.5\text{ m/s}^2$, entonces por resolución vectorial, $a = 4525.5/\cos 45° = 6400\text{ m/s}^2$.

## EJEMPLO 12.20




(a)

Debido a la rotación de la barra ahorquillada, la bola $A$ en la figura 12-35$a$ viaja alrededor de la trayectoria ranurada, una porción de la cual tiene forma de cardioide, $r = 0.5(1 - \cos\theta)$ pies, donde $\theta$ está en radianes. Si la velocidad de la bola es $v = 4$ pies/s y su aceleración es $a = 30$ pies/s$^2$ en el instante $\theta = 180°$, determine la velocidad angular $\dot{\theta}$ y la aceleración angular $\ddot{\theta}$ de la barra.

### Solución

***Sistema coordenado.*** Esta trayectoria es poco común, y matemáticamente es mejor expresarla usando coordenadas polares, como se hace aquí, en vez de coordenadas rectangulares. Además, $\dot{\theta}$ y $\ddot{\theta}$ deben ser determinadas, por lo que la selección de las coordenadas $r$, $\theta$ es una opción obvia.

***Velocidad y aceleración.*** La determinación de las derivadas con respecto al tiempo de $r$ usando la regla de la cadena del cálculo nos da

$$r = 0.5(1 - \cos\theta)$$
$$\dot{r} = 0.5(\operatorname{sen}\theta)\dot{\theta}$$
$$\ddot{r} = 0.5(\cos\theta)\dot{\theta}(\dot{\theta}) + 0.5(\operatorname{sen}\theta)\ddot{\theta}$$

Evaluando esos resultados en $\theta = 180°$, tenemos

$$r = 1 \text{ pie} \qquad \dot{r} = 0 \qquad \ddot{r} = -0.5\dot{\theta}^2$$

Como $v = 4$ pies/s, usando la ecuación 12-26 para determinar $\dot{\theta}$ resulta

$$v = \sqrt{(\dot{r})^2 + (r\dot{\theta})^2}$$
$$4 = \sqrt{(0)^2 + (1\dot{\theta})^2}$$
$$\dot{\theta} = 4 \text{ rad/s}$$

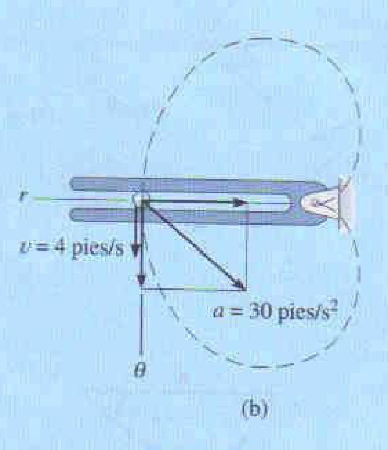
*Resp.*

De manera similar, $\ddot{\theta}$ puede hallarse aplicando la ecuación 12-30.

$$a = \sqrt{(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)^2 + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})^2}$$
$$30 = \sqrt{[-0.5(4)^2 - 1(4)^2]^2 + [1\ddot{\theta} + 2(0)(4)]^2}$$
$$(30)^2 = (-24)^2 + \ddot{\theta}^2$$
$$\ddot{\theta} = 18 \text{ rad/s}^2$$

*Resp.*

Los vectores **a** y **v** se muestran en la figura 12-35$b$.




(b)

**Fig. 12-35**

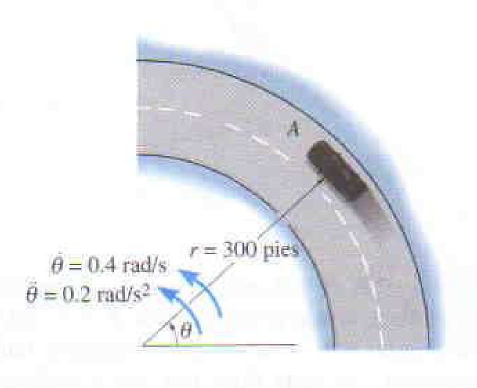
# PROBLEMAS

*12-136. La razón de cambio de la aceleración con respecto al tiempo se denomina tirón (*jerk*), y se usa a menudo como medio para medir la incomodidad de los pasajeros. Calcule este vector, $\dot{\mathbf{a}}$, en términos de sus componentes cilíndricas, usando la ecuación 12-32.

12-137. Si la posición de una partícula es descrita por las coordenadas polares $r = 4(1 + \text{sen } t)$ m y $\theta = (2e^{-t})$ rad, donde $t$ está en segundos y el argumento del seno está en radianes, determine las componentes radial y tangencial de la velocidad y la aceleración de la partícula cuando $t = 2$ s.

12-138. Una partícula se mueve por una trayectoria circular con radio de 4 pulg. de manera tal que su posición en función del tiempo está dada por $\theta = \cos 2t$, donde $\theta$ está en radianes y $t$ en segundos. Determine la magnitud de la aceleración de la partícula cuando $\theta = 30°$.

12-139. Un automóvil está viajando por la curva circular de radio $r = 300$ pies. En el instante mostrado, su razón angular de rotación es $\dot{\theta} = 0.4$ rad/s, la cual está creciendo a razón de $\ddot{\theta} = 0.2$ rad/s$^2$. Determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración del automóvil en este instante.




Prob. 12–139

*12-140. Si una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria tal que $r = (2 \cos t)$ pies y $\theta = (t/2)$ rad, donde $t$ está en segundos, grafique la trayectoria $r = f(\theta)$ y determine las componentes radial y transversal de la velocidad y la aceleración de la partícula.

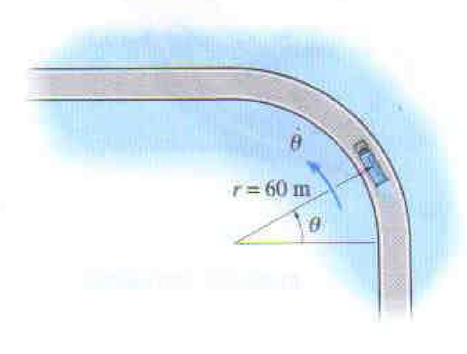
12-141. Si la posición de una partícula está descrita mediante las coordenadas polares $r = (2 \text{ sen } 2\theta)$ m y $\theta = (4t)$ rad, donde $t$ está en segundos, determine las componentes radial y tangencial de su velocidad y su aceleración cuando $t = 1$ s.

12-142. Una partícula se mueve por una trayectoria circular con radio de 400 mm. Su posición en función del tiempo está dada por $\theta = (2t^2)$ rad, donde $t$ está en segundos. Determine la magnitud de la aceleración de la partícula cuando $\theta = 30°$. La partícula parte del reposo cuando $\theta = 0°$.

12-143. Una partícula se mueve en el plano $x-y$ de modo que su posición está definida mediante $\mathbf{r} = \{2t\mathbf{i} + 4t^2\mathbf{j}\}$ pies, donde $t$ está en segundos. Determine las componentes radial y tangencial de la velocidad y la aceleración de la partícula cuando $t = 2$ s.

*12-144. Un camión está viajando por la curva horizontal circular de radio $r = 60$ m con rapidez constante $v = 20$ m/s. Determine la razón angular de rotación $\dot{\theta}$ de la línea radial $r$ y la magnitud de la aceleración del camión.

12-145. Un camión está viajando por la curva horizontal circular de radio $r = 60$ m con rapidez de 20 m/s, la cual está aumentando a 3 m/s$^2$. Determine las componentes radial y transversal de la aceleración del camión.



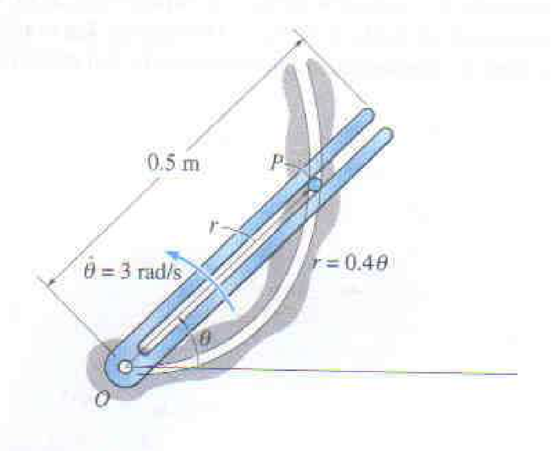

Probs. 12–144/145

**12-146.** Una partícula se está moviendo a lo largo de una trayectoria circular que tiene radio de 6 pulg. y es tal que su posición como función del tiempo está dada por $\theta = \text{sen } 3t$, donde $\theta$ está en radianes, el argumento para el seno está en grados, y $t$ está en segundos. Determine la aceleración de la partícula en $\theta = 30°$. La partícula parte del reposo en $\theta = 0°$.

**12-147.** El eslabón ranurado está articulado en $O$, y como resultado de su velocidad angular constante $\dot{\theta} = 3$ rad/s, impulsa la partícula $P$ por una corta distancia a lo largo de la guía espiral, $r = (0.4\ \theta)$ m, donde $\theta$ está en radianes. Determine las componentes radial y transversal de la velocidad y la aceleración de $P$ en el instante $\theta = \pi/3$ radianes.

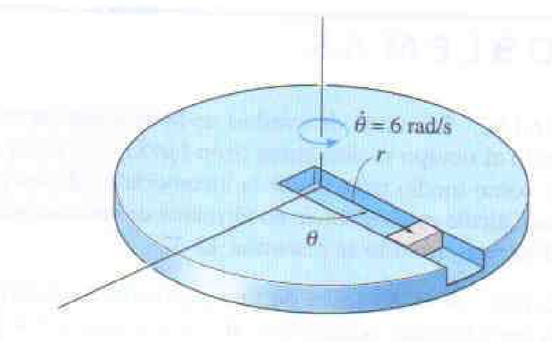
***12-148.** Resuelva el problema 12-147 si el eslabón ranurado tiene una aceleración angular $\ddot{\theta} = 8$ rad/s$^2$ cuando $\dot{\theta} = 3$ rad/s en $\theta = \pi/3$ radianes.

**12-149.** El eslabón ranurado está unido mediante un pasador colocado en $O$, y como resultado de la velocidad angular constante $\dot{\theta} = 3$ rad/s, mueve la partícula $P$ una corta distancia por la guía en espiral $r = (0.4\ \theta)$ m, donde $\theta$ está en radianes. Determine la velocidad y la aceleración de la partícula en el instante en que deja la ranura del eslabón, es decir, cuando $r = 0.5$ m.



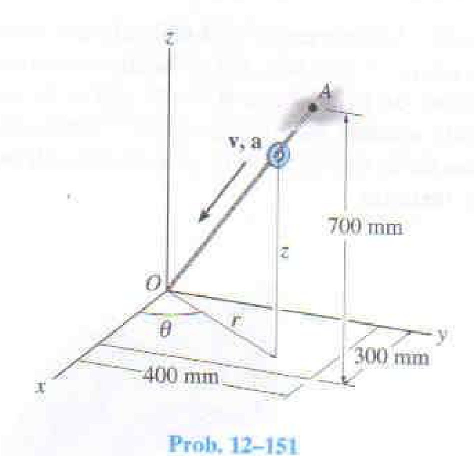

Probs. 12–147/148/149

**12-150.** Un bloque se mueve hacia fuera a lo largo de la ranura de la plataforma con rapidez $\dot{r} = (4t)$ m/s, donde $t$ está en segundos. La plataforma gira a razón constante de 6 rad/s. Si el bloque parte del reposo en el centro, determine las magnitudes de su velocidad y su aceleración cuando $t = 1$ s.



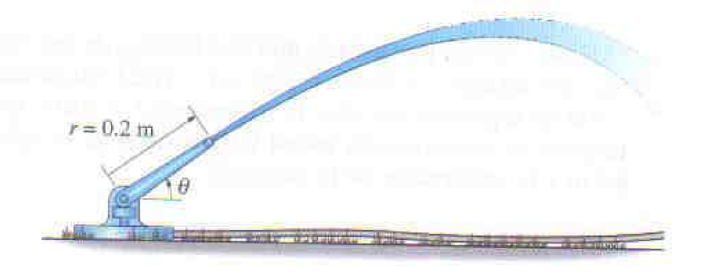

Prob. 12–150

**12-151.** La pequeña roldana se desliza hacia abajo por la cuerda $OA$. Cuando está en el punto medio, su rapidez es de 200 mm/s y su aceleración de 10 mm/s$^2$. Exprese la velocidad y la aceleración de la roldana en este punto en términos de sus componentes cilíndricas.



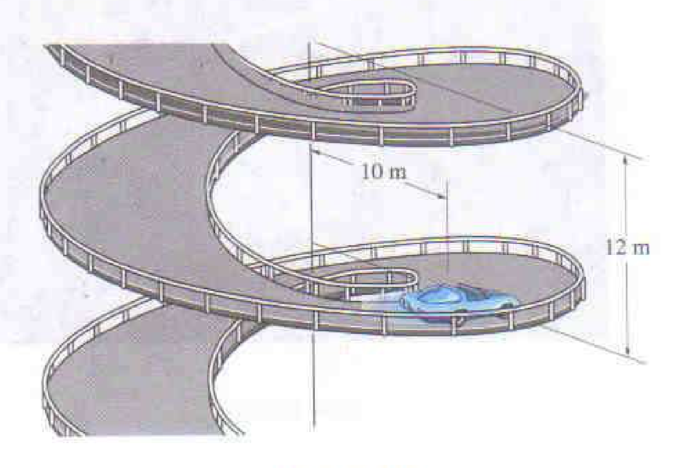

Prob. 12–151

***12-152.** En el instante mostrado, el rociador de agua está girando con rapidez angular $\dot{\theta} = 2$ rad/s y aceleración angular $\ddot{\theta} = 3$ rad/s$^2$. Si la tobera se halla en el plano vertical y el agua fluye por ella a razón constante de 3 m/s, determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración de una partícula de agua cuando ésta sale por el extremo abierto; $r = 0.2$ m.

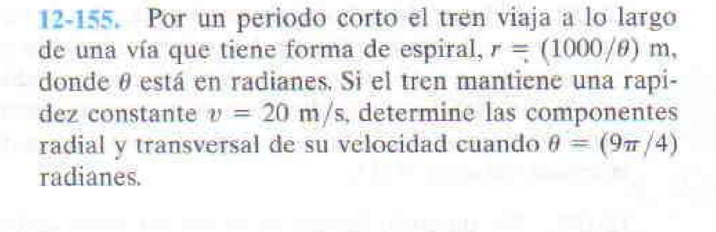



Prob. 12–152

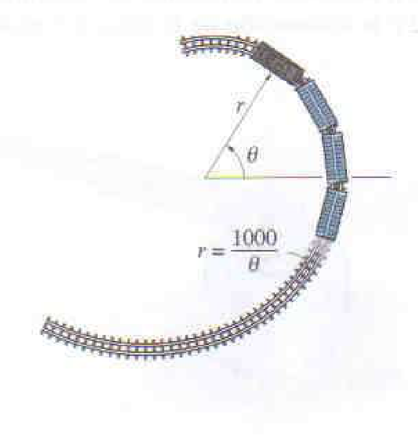
**12-153.** El automóvil está viajando a lo largo desde un piso de estacionamiento por una rampa cilíndrica espiral con rapidez constante de $v = 1.5$ m/s. Si la rampa desciende una distancia de 12 m en cada revolución completa, $\theta = 2\pi$ rad, determine la magnitud de la aceleración del automóvil al moverse por la rampa; $r = 10$ m. *Sugerencia*: Para parte de la solución, advierta que en cualquier punto la tangente a la rampa está a un ángulo de $\phi = \tan^{-1}(12/[2\pi(10)]) = 10.81°$ desde la horizontal. Use esto para determinar las componentes de velocidad $v_\theta$ y $v_z$, que a su vez se usan para determinar $\dot{\theta}$ y $\dot{z}$.




Prob. 12–153

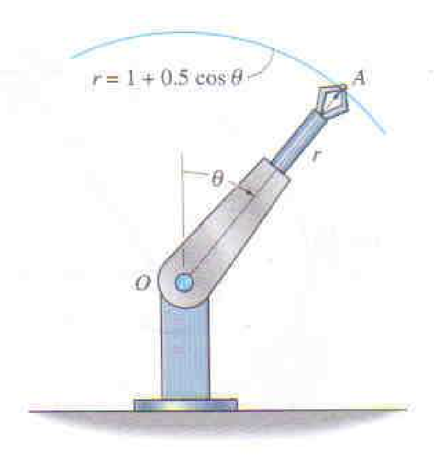


**12-155.** Por un periodo corto el tren viaja a lo largo de una vía que tiene forma de espiral, $r = (1000/\theta)$ m, donde $\theta$ está en radianes. Si el tren mantiene una rapidez constante $v = 20$ m/s, determine las componentes radial y transversal de su velocidad cuando $\theta = (9\pi/4)$ radianes.



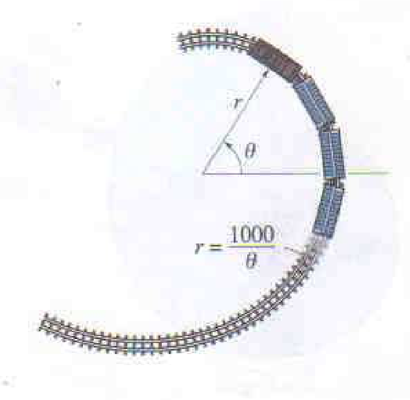

Prob. 12–155

**12-154.** Debido a la acción telescópica, el extremo del brazo robótico industrial se extiende a lo largo de la trayectoria del caracol $r = (1 + 0.5 \cos\theta)$ m. En el instante $\theta = \pi/4$, el brazo tiene una rotación angular $\dot{\theta} = 0.6$ rad/s, la cual está aumentando a $\ddot{\theta} = 0.25$ rad/s$^2$. Determine las componentes radial y transversal de la velocidad y la aceleración del objeto $A$ sostenido en su tenaza en este instante.




Prob. 12–154

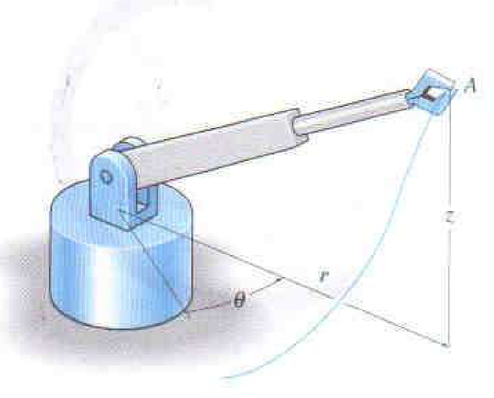
*12-156. Por un periodo corto el tren viaja a lo largo de una vía que tiene forma de espiral, $r = (1000/\theta)$ m, donde $\theta$ está en radianes. Si la razón angular es constante, $\dot{\theta} = 0.2$ rad/s, determine las componentes radial y transversal de su velocidad y su aceleración cuando $\theta = (9\pi/4)$ radianes.




Prob. 12–156

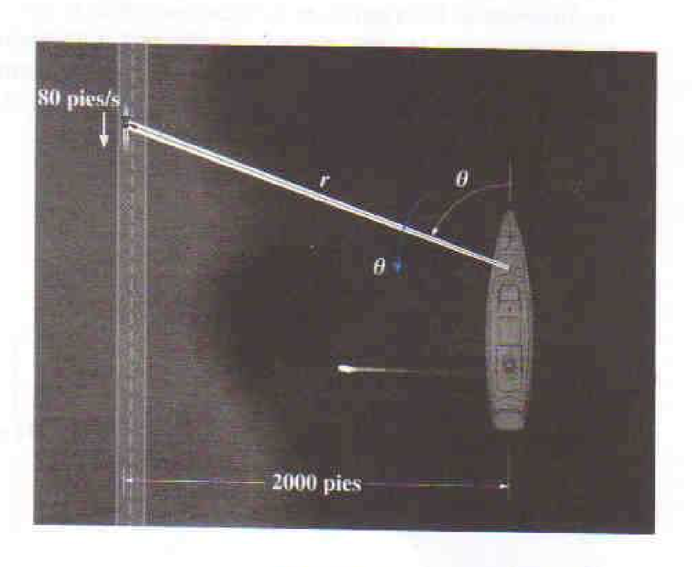
**12-157.** El brazo del robot tiene una longitud fija de manera que $r = 3$ pies y su tenaza $A$ se mueve a lo largo de la trayectoria $z = (3 \text{ sen } 4\theta)$ pies, donde $\theta$ está en radianes. Si $\theta = (0.5t)$ rad, donde $t$ está en segundos, determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración de la tenaza cuando $t = 3$ s.

**12-158.** Por un corto tiempo, el brazo del robot se extiende a razón constante tal que $\dot{r} = 1.5$ pies/s cuando $r = 3$ pies, $z = (4t^2)$ pies, y $\theta = 0.5t$ radianes, donde $t$ está en segundos. Determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración de la tenaza $A$ cuando $t = 3$ s.




**Probs. 12–157/158**

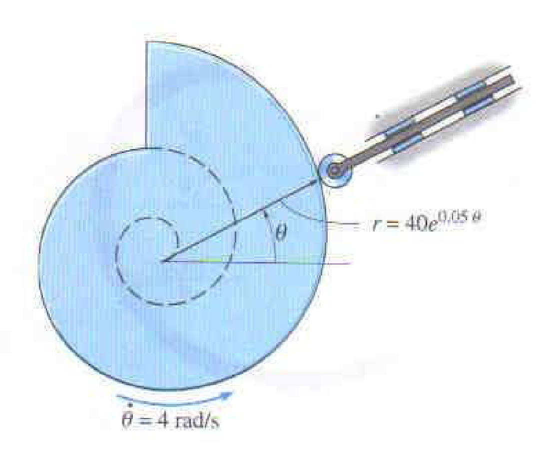
**12-161.** El reflector del bote anclado a 2000 pies de la costa es dirigido al automóvil que está viajando a lo largo de un camino recto con rapidez constante de 80 pies/s. Determine la razón angular de rotación de la luz cuando el automóvil está a $r = 3000$ pies del bote.




**Prob. 12–161**

**12-159.** La superficie parcial de la leva es la de una espiral logarítmica $r = (40e^{0.05\theta})$ mm, donde $\theta$ está en radianes. Si la leva está girando con razón angular constante de $\dot{\theta} = 4$ rad/s, determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración de la barra seguidora en el instante $\theta = 30°$.

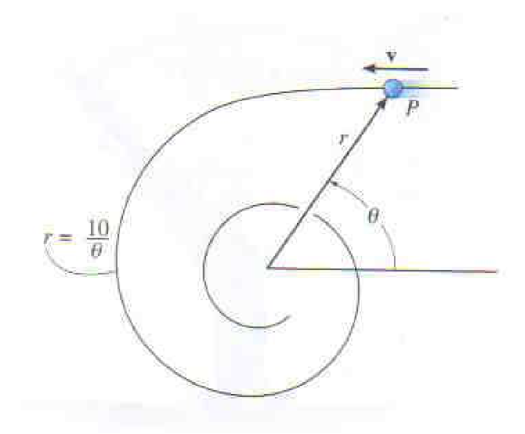
***12-160.** Resuelva el problema 12-159 si la leva tiene una aceleración angular de $\ddot{\theta} = 2$ rad/s$^2$ cuando su velocidad angular es $\dot{\theta} = 4$ rad/s en $\theta = 30°$.




**Probs. 12–159/160**

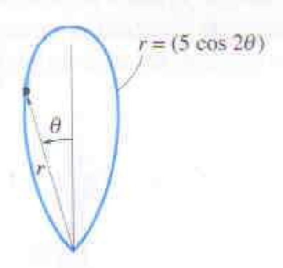
**12-162.** Si el automóvil mostrado en el problema 12-161 está acelerando a 15 pies/s$^2$ en el instante $r = 3000$ pies, determine la aceleración angular $\ddot{\theta}$ de la luz requerida en este instante.

**12-163.** Una partícula $P$ se mueve por la trayectoria espiral $r = (10/\theta)$ pies, donde $\theta$ está en radianes. Si la partícula mantiene una rapidez constante de $v = 20$ pies/s, determine las magnitudes $v_r$ y $v_\theta$ como funciones de $\theta$ y evalúe cada una en $\theta = 1$ rad.



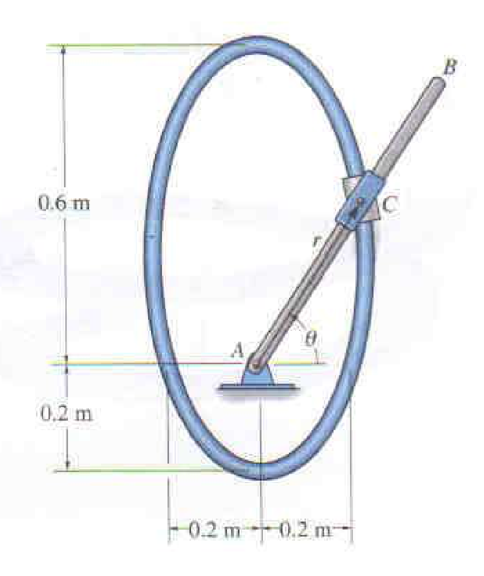

**Prob. 12–163**

*12-164. Una partícula viaja por la porción de la "rosa de cuatro pétalos" definida mediante la ecuación $r = (5 \cos 2\theta)$ m. Si la velocidad angular de la línea coordenada radial es $\dot{\theta} = (3t^2)$ rad/s, donde $t$ está en segundos, determine las componentes radial y transversal de la velocidad y la aceleración de la partícula en el instante $\theta = 30°$. Cuando $t = 0$, $\theta = 0$.



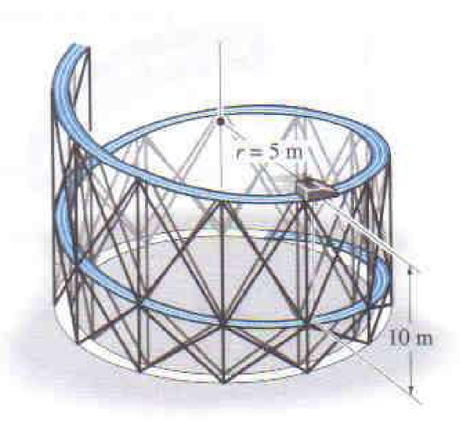

Prob. 12–164

■12-165. El doble collar $C$ está conectado mediante un pasador de manera tal que un collar se desliza sobre una barra fija y el otro sobre una barra giratoria $AB$. Si la velocidad angular de $AB$ está dada por $\dot{\theta} = (e^{0.5t^2})$, donde $t$ está en segundos, y la trayectoria definida por la barra fija es $r = |0.4 \text{ sen } \theta + 0.2|$ m, determine las componentes radial y transversal de la velocidad y la aceleración del collar cuando $t = 1$ s. Cuando $t = 0$, $\theta = 0°$. Use la regla de Simpson para determinar $\theta$ en $t = 1$ s.



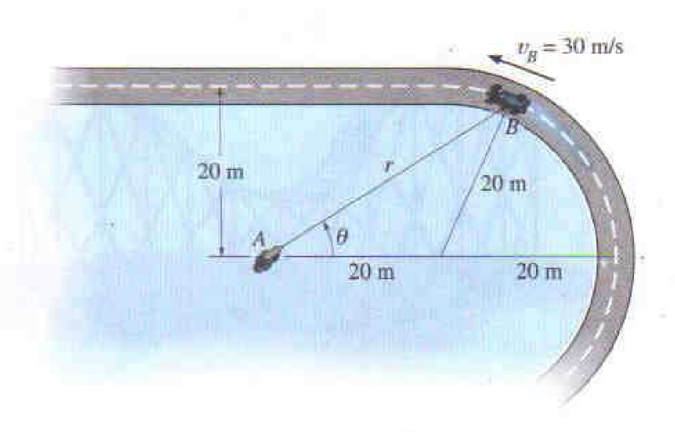

Prob. 12–165

12-166. El carro viaja hacia abajo por la rampa en espiral con rapidez constante $v = 6$ m/s. Si la vía desciende una distancia de 10 m en cada revolución $\theta = 2\pi$ rad, determine la magnitud de la aceleración del carro al moverse por la vía que tiene $r = 5$ m. *Sugerencia:* Para parte de la solución, advierta que en cualquier punto la tangente a la rampa está a un ángulo $\phi = \tan^{-1}[10/2\pi(5)] = 17.66°$ desde la horizontal. Use esto para determinar las componentes $v_\theta$ y $v_z$ de la velocidad, que a su vez son usadas para determinar $\dot{\theta}$ y $\dot{z}$.



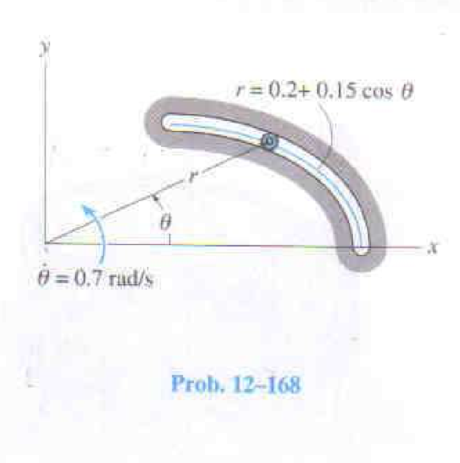

Prob. 12–166

12-167. Un camarógrafo está de pie en el punto $A$ y sigue el movimiento de un carro de carreras, $B$, que viaja alrededor de una pista curva con rapidez constante de 30 m/s. Determine la razón angular $\dot{\theta}$ con que el camarógrafo debe girar para mantener la cámara dirigida al carro en el instante $\theta = 30°$.



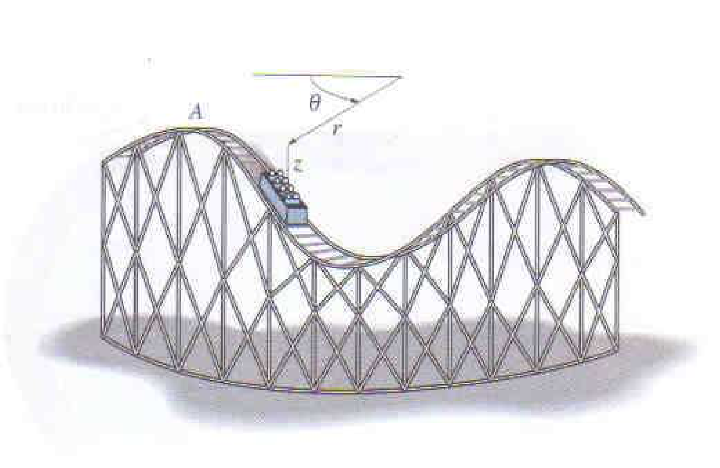

Prob. 12–167

***12-168.** El pasador sigue la trayectoria descrita por la ecuación $r = (0.2 + 0.15 \cos \theta)$ m. En el instante $\theta = 30°$, $\dot{\theta} = 0.7$ rad/s y $\ddot{\theta} = 0.5$ rad/s$^2$. Determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración del pasador en este instante. Desprecie el tamaño del pasador.



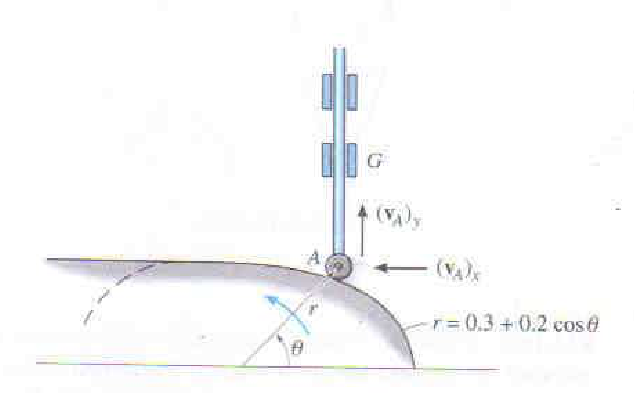

Prob. 12–168

**12-169.** Por un corto tiempo, la posición del carro de la montaña rusa a lo largo de su trayectoria está definida mediante las ecuaciones $r = 25$ m, $\theta = (0.3t)$ rad, y $z = (-8 \cos \theta)$ m, donde $t$ está en segundos. Determine la magnitud de la velocidad y la aceleración del carro cuando $t = 4$ s.



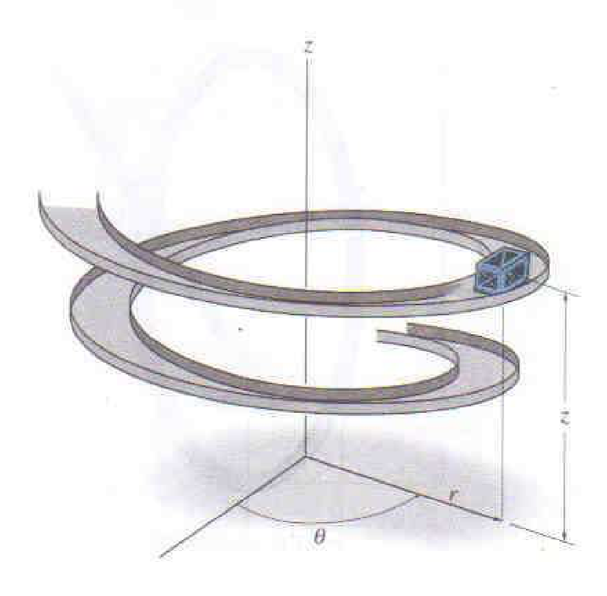

Prob. 12–169

**12-170.** El mecanismo de una máquina está construido de manera que el rodillo situado en $A$ sigue la superficie de la leva descrita por la ecuación $r = (0.3 + 0.2 \cos \theta)$ m. Si $\dot{\theta} = 0.5$ rad/s y $\ddot{\theta} = 0$, determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración del rodillo cuando $\theta = 30°$. Desprecie el tamaño del rodillo. Calcule también las componentes de velocidad $(\mathbf{v}_A)_x$ y $(\mathbf{v}_A)_y$ del rodillo en ese instante. La barra a la que el rodillo está unido permanece vertical y puede deslizarse hacia arriba o hacia abajo a lo largo de las guías mientras que éstas se trasladan horizontalmente hacia la izquierda.




Prob. 12–170

**12-171.** La caja se desliza a lo largo de la rampa en espiral de manera tal que $r = (0.5z)$ pies y $z = (100 - 0.1t^2)$ pies, donde $t$ está en segundos. Si la razón de rotación con respecto al eje $z$ es $\dot{\theta} = 0.04\pi t$ rad/s, determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración de la caja en el instante $z = 10$ pies.




Prob. 12–171

## 12.9 Análisis del movimiento absoluto dependiente de dos partículas

En algunos tipos de problemas el movimiento de una partícula *dependerá* del movimiento correspondiente de otra partícula. Esta dependencia ocurre comúnmente si las partículas están interconectadas por cuerdas inextensibles que se encuentren enrolladas alrededor de poleas. Por ejemplo, el movimiento del bloque $A$ hacia abajo a lo largo del plano inclinado en la figura 12-36 causará un movimiento correspondiente del bloque $B$ hacia arriba en el otro plano inclinado. Podemos mostrar esto matemáticamente especificando primero la ubicación de los bloques usando las *coordenadas de posición* $s_A$ y $s_B$. Advierta que cada uno de los ejes coordenados es (1) referenciado desde un punto *fijo* ($O$) o línea *fija de referencia (datum)*, (2) medido a lo largo de cada plano inclinado en la dirección del movimiento del bloque $A$ y del bloque $B$, y (3) tiene sentido positivo de $C$ a $A$ y de $D$ a $B$. Si la longitud total de la cuerda es $l_T$, las coordenadas de posición están relacionadas por la ecuación

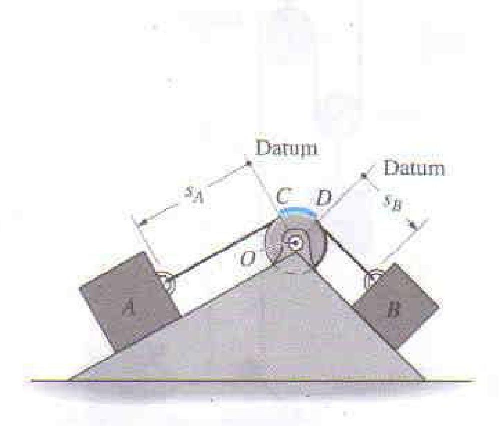



Fig. 12–36

$$s_A + l_{CD} + s_B = l_T$$

Aquí $l_{CD}$ es la longitud de la cuerda que pasa sobre el arco $CD$. Tomando la derivada con respecto al tiempo de esta expresión, y observando que $l_{CD}$ y $l_T$ *permanecen constantes*, mientras que $s_A$ y $s_B$ miden las longitudes de los segmentos cambiantes de la cuerda, tenemos

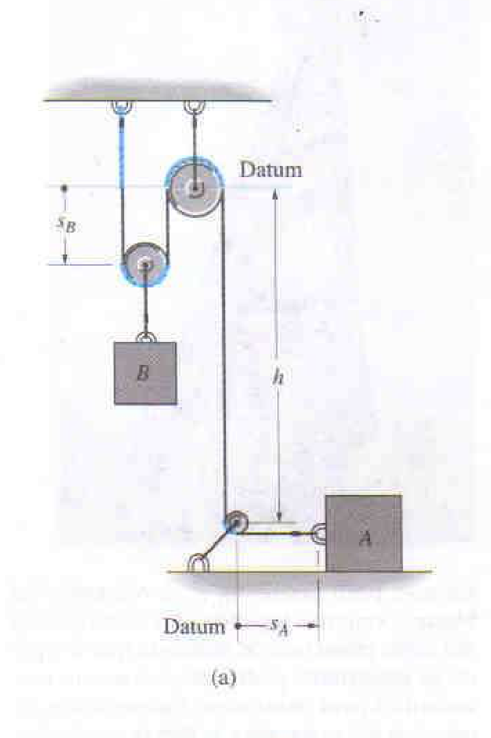
$$\frac{ds_A}{dt} + \frac{ds_B}{dt} = 0 \qquad \text{o} \qquad v_B = -v_A$$

El signo negativo indica que cuando el bloque $A$ tiene velocidad hacia abajo, esto es, en la dirección de la $s_A$ positiva, genera una velocidad correspondiente hacia arriba del bloque $B$, es decir, $B$ se mueve en la dirección $s_B$ negativa.

De manera similar, la diferenciación con respecto al tiempo de las velocidades resulta en la relación entre las aceleraciones, es decir,

$$a_B = -a_A$$

Un ejemplo más complicado que implica movimiento dependiente de dos bloques se muestra en la figura 12-37*a*. En este caso, la posición del bloque $A$ está especificada mediante $s_A$, y la posición del *extremo* de la cuerda del cual el bloque $B$ está suspendido es definida por $s_B$. Aquí hemos elegido ejes coordenados que son (1) referidos a puntos fijos o datums, (2) medidos en la dirección del movimiento de cada bloque, y (3) positivos hacia la derecha ($s_A$) y positivos hacia abajo ($s_B$). Durante el movimiento, los segmentos azules de la cuerda que aparece en la figura 12-37*a* *permanecen constantes*. Si $l$ representa la longitud total de cuerda menos estos segmentos, entonces las coordenadas de posición pueden ser relacionadas mediante la ecuación




(a)

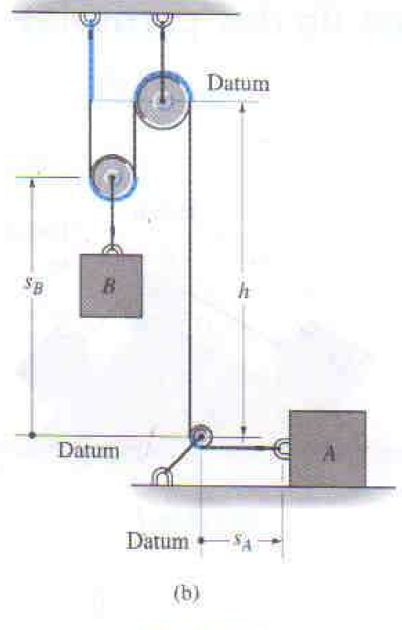
Fig. 12–37

$$2s_B + h + s_A = l$$

Como $l$ y $h$ son constantes durante el movimiento, las dos derivadas con respecto al tiempo son

$$2v_B = -v_A \qquad 2a_B = -a_A$$

Por consiguiente, cuando $B$ se mueve hacia abajo ($+s_B$), $A$ se mueve hacia la izquierda ($-s_A$) con dos veces el movimiento.




(b)

Fig. 12-37



En este pozo petrolero, el movimiento del bloque viajero depende del movimiento del cable conectado al malacate que lo opera. Es importante poder relacionar esos movimientos para determinar los requisitos de potencia del malacate y la fuerza en el cable ocasionada por el movimiento acelerado.

Este ejemplo también puede resolverse definiendo la posición del bloque $B$ desde el centro de la polea del fondo (un punto fijo), figura 12-37*b*. En este caso

$$2(h - s_B) + h + s_A = l$$

La diferenciación con respecto al tiempo resulta en

$$2v_B = v_A \quad 2a_B = a_A$$

Aquí los signos son los mismos. ¿Por qué?

## PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

El método anterior de relacionar el movimiento dependiente de una partícula con el movimiento de otra puede ser efectuado usando escalares algebraicos o coordenadas de posición siempre que cada partícula se mueva a lo largo de una trayectoria rectilínea. Cuando es este el caso, sólo cambiarán las magnitudes de la velocidad y la aceleración de las partículas, no sus líneas de dirección. El siguiente procedimiento es requerido.

### *Ecuación de la coordenada de posición*

- Establezca coordenadas de posición que tengan su origen en un punto *fijo* o datum.
- Las coordenadas están dirigidas a lo largo de la trayectoria del movimiento y se extienden hacia un punto que tiene el mismo movimiento que cada una de las partículas.
- *No* es *necesario* que el *origen* sea el *mismo* para cada una de las coordenadas; sin embargo, es *importante* que cada eje coordenado seleccionado esté dirigido a lo largo de la *trayectoria del movimiento* de la partícula.
- Usando geometría o trigonometría, relacione las coordenadas con la longitud total de la cuerda, $l_T$, o con esa porción de cuerda, $l$, que *excluye* los segmentos que no cambian de longitud cuando las partículas se mueven —tales como segmentos de arco enrollados sobre las poleas.
- Si un problema implica un *sistema* de dos o más cuerdas enrolladas alrededor de poleas, entonces la posición de un punto sobre una cuerda debe ser relacionada con la posición de un punto sobre otra cuerda usando el procedimiento anterior. Se escriben ecuaciones separadas para una longitud fija de cada cuerda del sistema y las posiciones de las dos partículas son entonces relacionadas mediante esas ecuaciones (vea los ejemplos 12.22 y 12.23).

### *Derivadas con respecto al tiempo*

- Dos derivadas sucesivas con respecto al tiempo de las ecuaciones de la coordenada de posición dan las ecuaciones de velocidad y aceleración requeridas que relacionan los movimientos de las partículas.
- En estas ecuaciones, los signos de los términos serán consistentes con aquellos que especifiquen los sentidos positivo y negativo de las coordenadas de posición.

## EJEMPLO 12.21

Determine la rapidez del bloque $A$ que se ilustra en la figura 12-38 si el bloque $B$ tiene una rapidez hacia arriba de 6 pies/s.

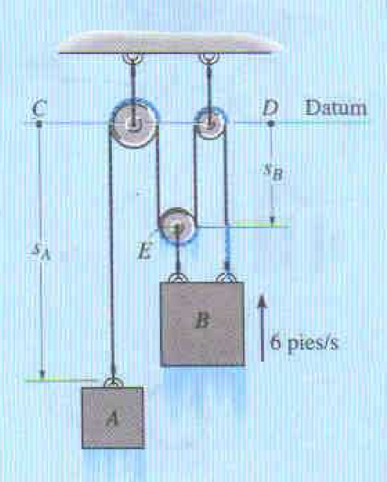



Fig. 12-38

### Solución

*Ecuación de la coordenada de posición.* Hay *una cuerda* en este sistema con segmentos que están cambiando de longitud. Se usarán las coordenadas de posición $s_A$ y $s_B$ ya que cada una es medida desde un punto fijo ($C$ o $D$) y se extiende a lo largo de cada *trayectoria del movimiento* de cada bloque. En particular, $s_B$ está dirigida al punto $E$ puesto que el movimiento de $B$ y $E$ es el *mismo*.

Los segmentos azules de la cuerda mostrada en la figura 12-38 permanecen con longitud constante y no tienen que ser considerados cuando los bloques se mueven. La longitud restante de la cuerda, $l$, también es constante y está relacionada con las cambiantes coordenadas de posición $s_A$ y $s_B$ mediante la ecuación

$$s_A + 3s_B = l$$

*Derivada con respecto al tiempo.* Tomando la derivada con respecto al tiempo obtenemos

$$v_A + 3v_B = 0$$

de modo que cuando $v_B = -6$ pies/s (hacia arriba),

$$v_A = 18 \text{ pies/s} \downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

## EJEMPLO 12.22

Determine la rapidez del bloque $A$ que se ilustra en la figura 12-39 si el bloque $B$ tiene una rapidez hacia arriba de 6 pies/s.

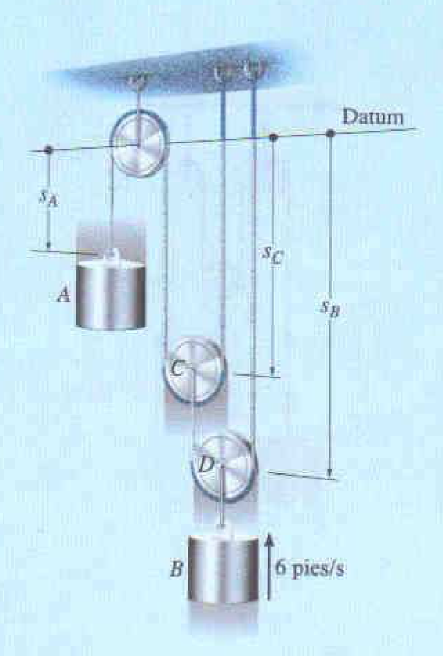



Fig. 12-39

### Solución

*Ecuación de la coordenada de posición.* Como se muestra, las posiciones de los bloques $A$ y $B$ son definidas usando coordenadas $s_A$ y $s_B$. Ya que el sistema tiene *dos* cuerdas que cambian de longitud, será necesario usar una tercera coordenada, $s_C$, para relacionar $s_A$ con $s_B$. En otras palabras, la longitud de una de las cuerdas puede ser expresada en términos de $s_A$ y $s_C$, y la longitud de la otra cuerda puede ser expresada en términos de $s_B$ y $s_C$.

Los segmentos en azul de las cuerdas mostradas en la figura 12-39 no tienen que ser considerados en el análisis. ¿Por qué? Para las longitudes restantes de cuerda, digamos $l_1$ y $l_2$, tenemos

$$s_A + 2s_C = l_1 \qquad s_B + (s_B - s_C) = l_2$$

Al eliminar $s_C$ resulta una ecuación que define las posiciones de ambos bloques, es decir,

$$s_A + 4s_B = 2l_2 + l_1$$

*Derivada con respecto al tiempo.* La derivada con respecto al tiempo da

$$v_A + 4v_B = 0$$

de manera que cuando $v_B = -6$ pies/s (hacia arriba),

$$v_A = +24 \text{ pies/s} = 24 \text{ pies/s} \downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

## EJEMPLO 12.23

Determine la rapidez con que se eleva el bloque $B$ mostrado en la figura 12-40 si el extremo de la cuerda en $A$ es jalado hacia abajo con rapidez de 2 m/s.

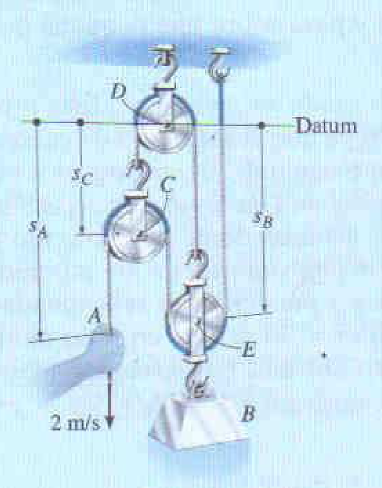



Fig. 12–40

### Solución

*Ecuación de la coordenada de posición.* La posición de $A$ está definida mediante $s_A$, y la posición del bloque $B$ es especificada por $s_B$ ya que el punto $E$ sobre la polea tendrá el *mismo movimiento* que el bloque. Ambas coordenadas son medidas desde un datum horizontal que pasa por el pasador *fijo* en la polea $D$. Como el sistema consta de *dos* cuerdas, las coordenadas $s_A$ y $s_B$ no pueden relacionarse directamente. En vez de ello, estableciendo una tercera coordenada de posición, $s_C$, podemos expresar la longitud de una de las cuerdas en términos de $s_B$ y $s_C$, y la longitud de la otra cuerda en términos de $s_A$, $s_B$ y $s_C$.

Excluyendo los segmentos que aparecen en azul $l_1$ y $l_2$ (junto con el gancho y las dimensiones del eslabón) pueden ser expresadas como

$$s_C + s_B = l_1$$

$$(s_A - s_C) + (s_B - s_C) + s_B = l_2$$

Eliminando $s_C$ resulta

$$s_A + 4s_B = l_2 + 2l_1$$

Tal como se requiere, esta ecuación relaciona la posición $s_B$ del bloque $B$ con la posición $s_A$ del punto $A$.

*Derivada con respecto al tiempo.* La derivada con respecto al tiempo da

$$v_A + 4v_B = 0$$

de modo que cuando $v_A = 2$ m/s (hacia abajo),

$$v_B = -0.5 \text{ m/s} = 0.5 \text{ m/s} \uparrow \qquad \textit{Resp.}$$

## EJEMPLO 12.24

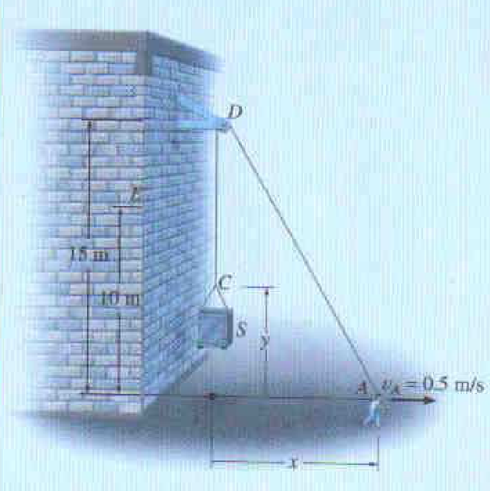



Fig. 12-41

Un hombre ubicado en $A$ está levantando una caja fuerte $S$, como se muestra en la figura 12-41, caminando hacia la derecha con velocidad constante $v_A = 0.5$ m/s. Determine la velocidad y la aceleración de la caja fuerte cuando alcanza la elevación localizada en $E$. La cuerda tiene 30 m de longitud y pasa sobre una pequeña polea en $D$.

### Solución

***Ecuación de la coordenada de posición.*** Este problema es diferente a los ejemplos previos ya que el segmento de cuerda $DA$ cambia tanto en dirección como en magnitud. Sin embargo, los extremos de la cuerda, que definen las posiciones de $S$ y $A$, son especificados por medio de las coordenadas $x$ y $y$ medidas desde un punto fijo y *dirigidas a lo largo de las trayectorias del movimiento* de los extremos de la cuerda.

Las coordenadas $x$ y $y$ pueden estar relacionadas ya que la cuerda tiene una longitud fija $l = 30$ m, que en todo momento es igual a la longitud del segmento $DA$ más $CD$. Usando el teorema de Pitágoras para determinar $l_{DA}$, tenemos $l_{DA} = \sqrt{(15)^2 + x^2}$; y $l_{CD} = 15 - y$. Por consiguiente,

$$l = l_{DA} + l_{CD}$$

$$30 = \sqrt{(15)^2 + x^2} + (15 - y)$$

$$y = \sqrt{225 + x^2} - 15 \qquad (1)$$

***Derivadas con respecto al tiempo.*** Tomando la derivada con respecto al tiempo y usando la regla de la cadena, donde $v_S = dy/dt$ y $v_A = dx/dt$, resulta

$$v_S = \frac{dy}{dt} = \left[\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{225 + x^2}}\right]\frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{225 + x^2}}v_A. \qquad (2)$$

En $y = 10$ m, $x$ es determinada a partir de la ecuación 1, esto es, $x = 20$ m. Por consiguiente, a partir de la ecuación 2 con $v_A = 0.5$ m/s,

$$v_S = \frac{20}{\sqrt{225 + (20)^2}}(0.5) = 0.4 \text{ m/s} = 400 \text{ mm/s}\uparrow \qquad \textit{Resp.}$$

La aceleración es determinada tomando la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 2. Como $v_A$ es constante, entonces $a_A = dv_A/dt = 0$, y tenemos

$$a_S = \frac{d^2y}{dt^2} = \left[\frac{-x(dx/dt)}{(225 + x^2)^{3/2}}\right]xv_A + \left[\frac{1}{\sqrt{225 + x^2}}\right]\left(\frac{dx}{dt}\right)v_A + \left[\frac{1}{\sqrt{225 + x^2}}\right]x\frac{dv_A}{dt} = \frac{225v_A^2}{(225 + x^2)^{3/2}}$$

En $x = 20$ m, con $v_A = 0.5$ m/s, la aceleración es

$$a_S = \frac{225(0.5 \text{ m/s})^2}{[225 + (20 \text{ m})^2]^{3/2}} = 0.00360 \text{ m/s}^2 = 3.60 \text{ mm/s}^2\uparrow \qquad \textit{Resp.}$$

Advierta que la velocidad constante en $A$ causa que el otro extremo $C$ de la cuerda tenga una aceleración, ya que $\mathbf{v}_A$ causa que el segmento $DA$ cambie su dirección así como su longitud.

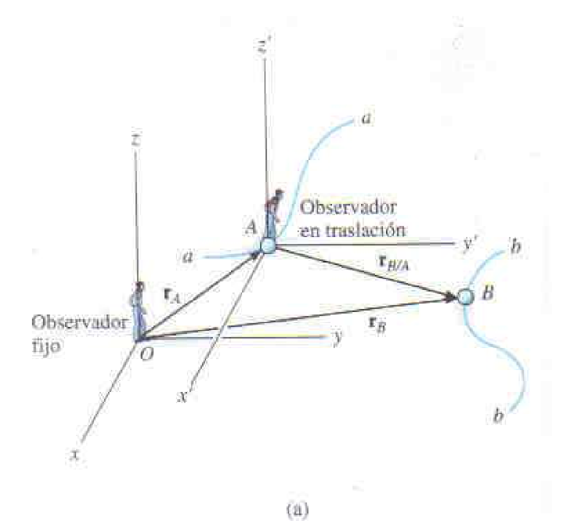
## 12.10 Análisis del movimiento relativo de dos partículas usando ejes en traslación

En todo este capítulo el movimiento absoluto de una partícula ha sido determinado usando un solo marco de referencia fijo para las mediciones. Sin embargo, hay muchos casos en donde la trayectoria del movimiento para una partícula es complicada y puede ser factible analizar el movimiento en partes usando dos o más marcos de referencia. Por ejemplo, el movimiento de una partícula localizada en la punta de la hélice de un avión, en vuelo, es más fácilmente descrita si se observa primero el movimiento del avión desde una referencia fija y luego se superpone (vectorialmente) el movimiento circular de la partícula medido desde una referencia ubicada en el avión. Cualquier tipo de coordenadas (rectangulares, cilíndricas, etc.) pueden elegirse para describir esos dos movimientos diferentes.

Para el análisis, en esta sección sólo serán considerados *marcos de referencia en traslación*. El análisis del movimiento relativo de partículas usando marcos de referencia en rotación será tratado en las secciones 16.8 y 20.4, ya que tal análisis depende del conocimiento previo de la cinemática de los segmentos de línea.

**Posición.** Considere las partículas $A$ y $B$ que se mueven a lo largo de las trayectorias arbitrarias *aa* y *bb*, respectivamente, como se muestra en la figura 12-42*a*. La *posición absoluta* de cada partícula $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$ es medida desde el origen común $O$ del marco de referencia fijo $x, y, z$. El origen de un segundo marco de referencia $x', y', z'$ está unido a, y se mueve con, la partícula $A$. A los ejes de este marco *sólo les es permitido trasladarse* con respecto al marco fijo. La *posición relativa* de "$B$ con respecto a $A$" es designada mediante un *vector de posición relativa* $\mathbf{r}_{B/A}$. Usando la suma vectorial, los tres vectores mostrados en la figura 12-42*a* pueden ser relacionados mediante la ecuación*

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A} \qquad (12\text{–}33)$$



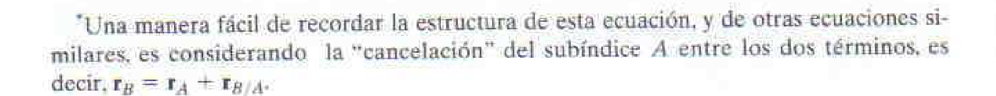

(a)

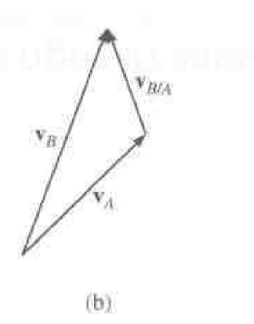
Fig. 12–42

**Velocidad.** Una ecuación que relaciona las velocidades de las partículas puede ser obtenida tomando la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 12-33, es decir,

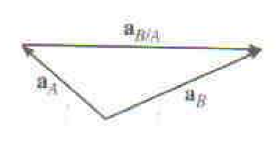
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \qquad (12\text{–}34)$$

Aquí, $\mathbf{v}_B = d\mathbf{r}_B/dt$ y $\mathbf{v}_A = d\mathbf{r}_A/dt$ se refieren a *velocidades absolutas*, ya que éstas son observadas desde el marco fijo, mientras que la *velocidad relativa* $\mathbf{v}_{B/A} = d\mathbf{r}_{B/A}/dt$ es observada desde el marco en traslación. Es


*Una manera fácil de recordar la estructura de esta ecuación, y de otras ecuaciones similares, es considerando la "cancelación" del subíndice $A$ entre los dos términos, es decir, $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$.

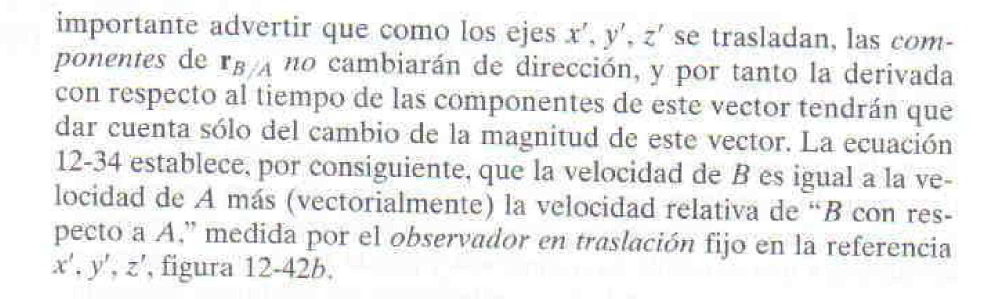



(b)




(c)

Fig. 12–42



importante advertir que como los ejes $x', y', z'$ se trasladan, las *componentes* de $\mathbf{r}_{B/A}$ *no* cambiarán de dirección, y por tanto la derivada con respecto al tiempo de las componentes de este vector tendrán que dar cuenta sólo del cambio de la magnitud de este vector. La ecuación 12-34 establece, por consiguiente, que la velocidad de $B$ es igual a la velocidad de $A$ más (vectorialmente) la velocidad relativa de "$B$ con respecto a $A$," medida por el *observador en traslación* fijo en la referencia $x', y', z'$, figura 12-42*b*.

**Aceleración.** La derivada con respecto al tiempo de la ecuación 12-34 resulta en una relación vectorial similar entre las *aceleraciones absoluta* y *relativa* de las partículas $A$ y $B$.

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} \tag{12–35}$$

Aquí, $\mathbf{a}_{B/A}$ es la aceleración de $B$ vista por el observador localizado en $A$ y trasladándose con el marco de referencia $x', y', z'$. La suma vectorial se muestra en la figura 12-42*c*.

## PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

- Al aplicar la ecuación de posición relativa, $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$, primero es necesario especificar las ubicaciones de los ejes fijos $x, y, z$, y de los ejes en traslación $x', y', z'$.
- Usualmente, el origen $A$ de los ejes en traslación se ubica en un punto que tiene una *posición conocida*, $\mathbf{r}_A$, figura 12-42*a*.
- Una representación gráfica de la suma vectorial $\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$ puede ser mostrada, y tanto las cantidades conocidas como las desconocidas pueden señalarse en el croquis.
- Como la suma vectorial forma un triángulo, puede haber cuando mucho *dos incógnitas*, representadas por las magnitudes y/o las direcciones de las cantidades vectoriales.
- Estas incógnitas pueden encontrarse gráficamente usando trigonometría (ley de los senos, ley de los cosenos), o resolviendo cada uno de los tres vectores $\mathbf{r}_B$, $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_{B/A}$ en componentes rectangulares o cartesianas, generando así un conjunto de ecuaciones escalares.
- Las ecuaciones de movimiento relativo $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$ y $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$ son aplicadas de la misma manera que antes, excepto que en este caso el origen $O$ de los ejes fijos $x, y, z$ no tiene que ser especificado, figuras 12-42*b* y 12-42*c*.



Al volar muy cerca uno de otro, los pilotos de estos aviones a chorro deben ser conscientes de sus posiciones y velocidades relativas en todo momento para evitar una colisión.

## EJEMPLO 12.25

Un tren, viajando con rapidez constante de 60 mi/h, cruza sobre un camino como se muestra en la figura 12-43*a*. Si el automóvil *A* viaja a 45 mi/h a lo largo del camino, determine la magnitud y la dirección de la velocidad relativa del tren con respecto al automóvil.

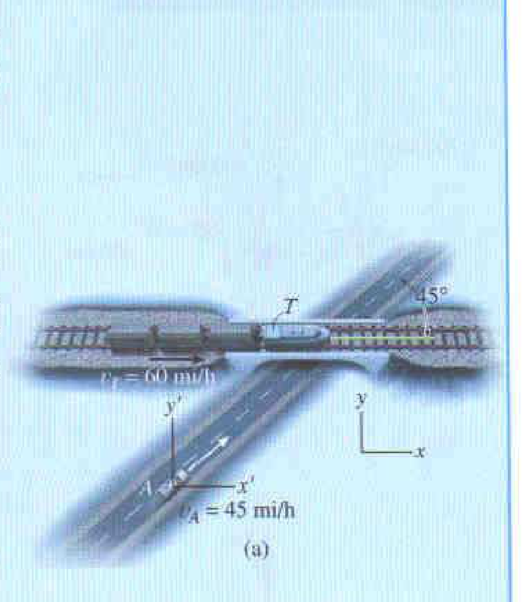
### Solución I

***Análisis vectorial.*** La velocidad relativa $\mathbf{v}_{T/A}$ es medida desde los ejes en traslación $x'$, $y'$ unidos al automóvil, figura 12-43*a*. Esta velocidad se determina a partir de $\mathbf{v}_T = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{T/A}$. Como $\mathbf{v}_T$ y $\mathbf{v}_A$ son conocidas *tanto* en magnitud *como* en dirección, las incógnitas resultan ser las componentes $x$ y $y$ de $\mathbf{v}_{T/A}$. Usando los ejes $x$, $y$ en la figura 12-43*a* y un análisis vectorial cartesiano, tenemos

$$\mathbf{v}_T = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{T/A}$$

$$60\mathbf{i} = (45 \cos 45^\circ \, \mathbf{i} + 45 \operatorname{sen} 45^\circ \, \mathbf{j}) + \mathbf{v}_{T/A}$$

$$\mathbf{v}_{T/A} = \{28.2\mathbf{i} - 31.8\mathbf{j}\} \text{ mi/h} \qquad \textit{Resp.}$$




(a)

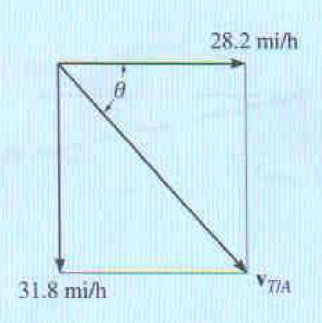
La magnitud de $\mathbf{v}_{T/A}$ es entonces

$$v_{T/A} = \sqrt{(28.2)^2 + (-31.8)^2} = 42.5 \text{ mi/h} \qquad \textit{Resp.}$$

A partir de la dirección de cada componente, figura 12-43*b*, la dirección de $\mathbf{v}_{T/A}$ definida desde el eje $x$ es

$$\tan \theta = \frac{(v_{T/A})_y}{(v_{T/A})_x} = \frac{31.8}{28.2}$$

$$\theta = 48.5^\circ \qquad \textit{Resp.}$$




(b)

Advierta que la suma vectorial mostrada en la figura 12-43*b* indica el sentido correcto de $\mathbf{v}_{T/A}$. Esta figura anticipa la respuesta y puede ser usada para verificarla.

### Solución II

***Análisis escalar.*** Las componentes desconocidas de $\mathbf{v}_{T/A}$ también pueden ser determinadas aplicando un análisis escalar. Supondremos que esas componentes actúan en las direcciones $x$ y $y$ *positivas*. Entonces,

$$\mathbf{v}_T = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{T/A}$$

$$\left[\begin{matrix}60 \text{ mi/h}\\ \rightarrow\end{matrix}\right] = \left[\begin{matrix}45 \text{ mi/h}\\ \measuredangle 45^\circ\end{matrix}\right] + \left[\begin{matrix}(v_{T/A})_x\\ \rightarrow\end{matrix}\right] + \left[\begin{matrix}(v_{T/A})_y\\ \uparrow\end{matrix}\right]$$

Resolviendo cada vector en sus componentes $x$ y $y$ resulta

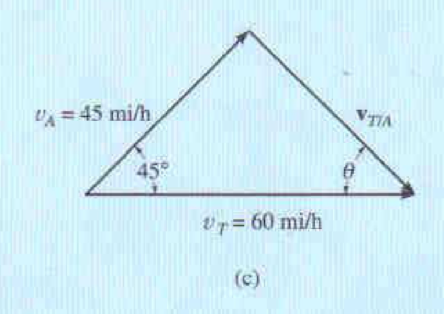
$(\overset{+}{\rightarrow})$ $\qquad 60 = 45 \cos 45^\circ + (v_{T/A})_x + 0$

$(+\uparrow)$ $\qquad 0 = 45 \operatorname{sen} 45^\circ + 0 + (v_{T/A})_y$

Al resolver las ecuaciones, obtenemos los resultados previos,

$$(v_{T/A})_x = 28.2 \text{ mi/h} = 28.2 \text{ mi/h} \rightarrow$$

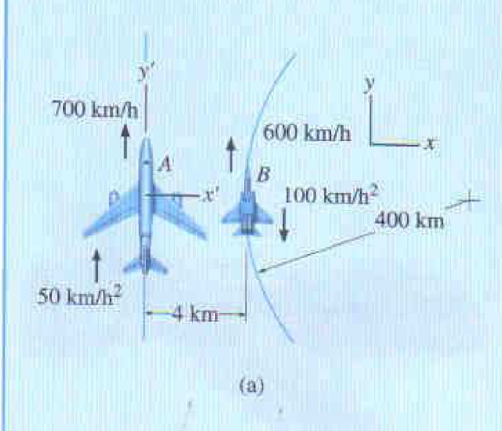
$$(v_{T/A})_y = -31.8 \text{ mi/h} = 31.8 \text{ mi/h} \downarrow \qquad \textit{Resp.}$$



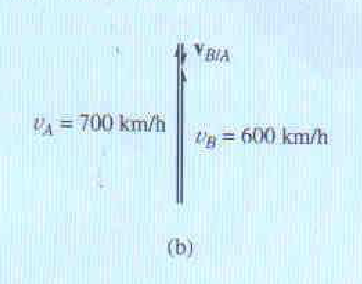

(c)

**Fig. 12–43**

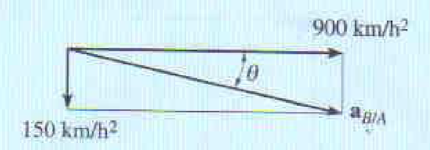
## EJEMPLO 12.26



(a)



(b)



(c)

Fig. 12-44

El avión $A$ mostrado en la figura 12-44$a$ vuela a lo largo de una trayectoria recta, mientras que el avión $B$ lo hace por una trayectoria circular con radio de curvatura $\rho_B = 400$ km. Determine la velocidad y la aceleración de $B$ medidas por el piloto de $A$.

### Solución

**Velocidad.** Los ejes $x$, $y$ están localizados en un punto fijo arbitrario. Como el movimiento relativo al avión $A$ va a ser determinado, el *marco de referencia x′, y′ de traslación* está unido a él, figura 12-44$a$. Aplicando la ecuación de la velocidad relativa en forma escalar, ya que los vectores de velocidad de ambos aviones son paralelos en el instante mostrado, tenemos

$$(+\uparrow) \qquad v_B = v_A + v_{B/A}$$
$$600 = 700 + v_{B/A}$$
$$v_{B/A} = -100 \text{ km/h} = 100 \text{ km/h} \downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

La suma vectorial se muestra en la figura 12-44$b$.

**Aceleración.** El avión $B$ tiene componentes tangencial y normal de aceleración, ya que está volando por una *trayectoria curva*. A partir de la ecuación 12-20, la magnitud de la componente normal es

$$(a_B)_n = \frac{v_B^2}{\rho} = \frac{(600 \text{ km/h})^2}{400 \text{ km}} = 900 \text{ km/h}^2$$

Aplicando la ecuación de aceleración relativa, tenemos

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$
$$900\mathbf{i} - 100\mathbf{j} = 50\mathbf{j} + \mathbf{a}_{B/A}$$

Así,

$$\mathbf{a}_{B/A} = \{900\mathbf{i} - 150\mathbf{j}\} \text{ km/h}^2$$

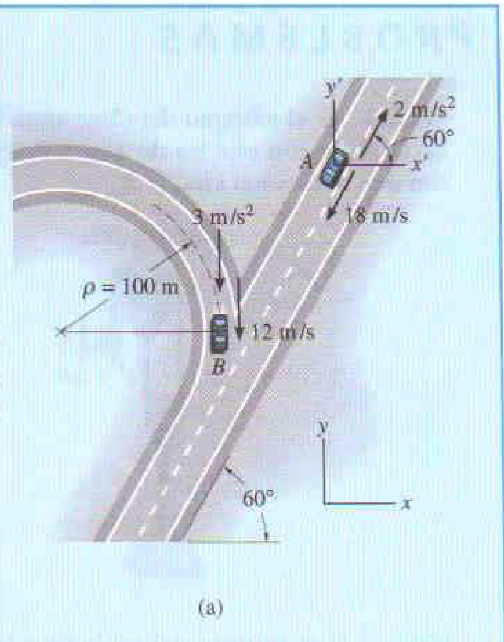
A partir de la figura 12-44$c$, la magnitud y la dirección de $\mathbf{a}_{B/A}$ son, por tanto,

$$a_{B/A} = 912 \text{ km/h}^2 \quad \theta = \tan^{-1}\frac{150}{900} = 9.46° \;\measuredangle^{\theta} \qquad \textit{Resp.}$$

Advierta que la solución a este problema es posible usando un marco de referencia en traslación, ya que el piloto en el avión $A$ está "trasladándose". Sin embargo, la observación del avión $A$ con respecto al piloto del avión $B$, debe ser obtenida usando un conjunto de ejes en *rotación* unidos al avión $B$. (Por supuesto, esto supone que el piloto de $B$ está fijo en el marco en rotación, de modo que no gira sus ojos para seguir el movimiento de $A$.) El análisis de este caso se proporciona en el ejemplo 16.21.

## EJEMPLO 12.27

En el instante mostrado en la figura 12-45 los automóviles $A$ y $B$ están viajando con rapidez de 18 y 12 m/s, respectivamente. También en este instante, $A$ tiene una disminución en rapidez de 2 m/s$^2$, y $B$ tiene un incremento en rapidez de 3 m/s$^2$. Determine la velocidad y la aceleración de $B$ con respecto a $A$.



(a)

### Solución

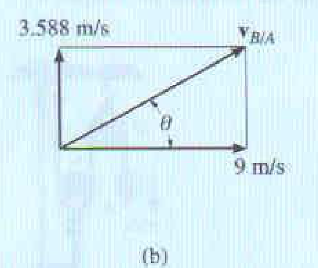
*Velocidad.* Los ejes fijos $x$, $y$ son establecidos en un punto sobre el suelo y los ejes en traslación $x'$, $y'$ están unidos al automóvil $A$, figura 12-45*a*. ¿Por qué? La velocidad relativa es determinada mediante $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$. ¿Cuáles son las dos incógnitas? Usando un análisis vectorial cartesiano, tenemos

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$
$$-12\mathbf{j} = (-18\cos 60°\mathbf{i} - 18\,\text{sen}\,60°\mathbf{j}) + \mathbf{v}_{B/A}$$
$$\mathbf{v}_{B/A} = \{9\mathbf{i} + 3.588\mathbf{j}\}\text{ m/s}$$

Entonces,

$$v_{B/A} = \sqrt{(9)^2 + (3.588)^2} = 9.69\text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

Observando que $\mathbf{v}_{B/A}$ tiene componentes $+\mathbf{i}$ y $+\mathbf{j}$, figura 12-45*b*, su dirección es



(b)

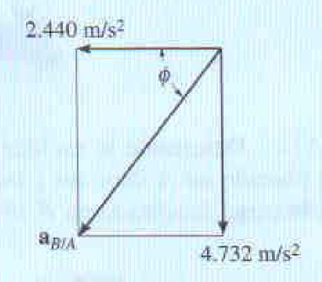
$$\tan\theta = \frac{(v_{B/A})_y}{(v_{B/A})_x} = \frac{3.588}{9}$$
$$\theta = 21.7° \measuredangle \qquad \textit{Resp.}$$

*Aceleración.* El automóvil $B$ tiene componentes tangencial y normal de aceleración. ¿Por qué? La magnitud de la componente normal es

$$(a_B)_n = \frac{v_B^2}{\rho} = \frac{(12\text{ m/s})^2}{100\text{ m}} = 1.440\text{ m/s}^2$$

Aplicando la ecuación para la aceleración relativa obtenemos

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$
$$(-1.440\mathbf{i} - 3\mathbf{j}) = (2\cos 60°\mathbf{i} + 2\,\text{sen}\,60°\mathbf{j}) + \mathbf{a}_{B/A}$$
$$\mathbf{a}_{B/A} = \{-2.440\mathbf{i} - 4.732\mathbf{j}\}\text{ m/s}^2$$



(c)

Aquí $\mathbf{a}_{B/A}$ tiene componentes $-\mathbf{i}$ y $-\mathbf{j}$. Entonces, a partir de la figura 12-45*c*,

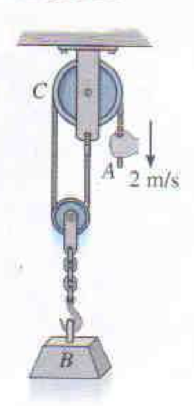
$$a_{B/A} = \sqrt{(2.440)^2 + (4.732)^2} = 5.32\text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$
$$\tan\phi = \frac{(a_{B/A})_y}{(a_{B/A})_x} = \frac{4.732}{2.440}$$
$$\phi = 62.7° \qquad \textit{Resp.}$$

Fig. 12–45

¿Es posible obtener la aceleración relativa de $\mathbf{a}_{A/B}$ usando este método? Refiérase al comentario formulado al final del ejemplo 12.26.

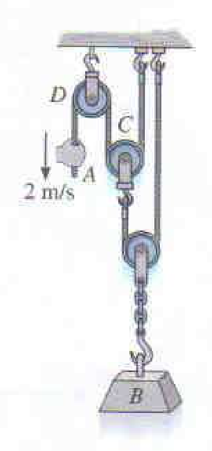
## PROBLEMAS

*12-172. Si el extremo del cable situado en $A$ es jalado hacia abajo con rapidez de 2 m/s, determine la rapidez con que se eleva el bloque $B$.



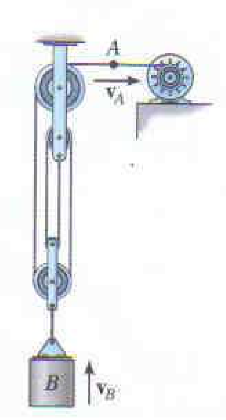

Prob. 12-172

12-173. Si el extremo del cable situado en $A$ es jalado hacia abajo con rapidez de 2 m/s, determine la rapidez con que se levanta el bloque $B$.



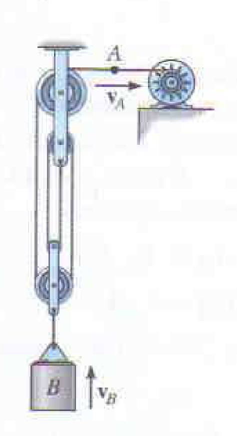

Prob. 12-173

12-174. Determine la rapidez constante con que el cable ubicado en $A$ debe ser jalado por el motor para elevar la carga localizada en $B$ 15 pies en 5 segundos.



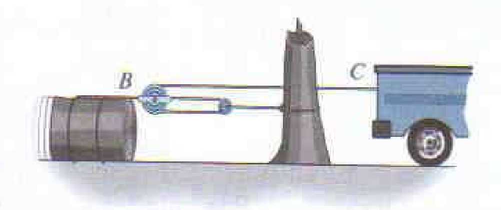

Prob. 12-174

12-175. Determine el tiempo necesario para que la carga situada en $B$ alcance una rapidez de 8 m/s, partiendo del reposo, si el cable es jalado hacia el motor con una aceleración de 0.2 m/s$^2$.



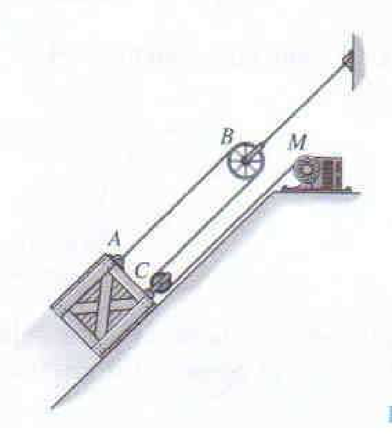

Prob. 12-175

*12-176. Determine el desplazamiento del tronco si el camión colocado en $C$ jala el cable 4 pies hacia la derecha.



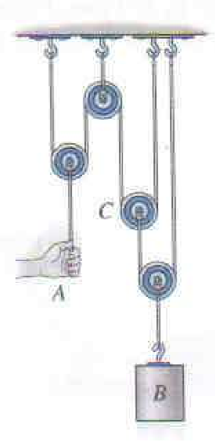

Prob. 12-176

12-177. La caja está siendo levantada por el plano inclinado usando el motor $M$ y el arreglo de cuerda y polea mostrado. Determine la rapidez con que la cuerda debe ser jalada por el motor para mover la caja hacia arriba por el plano con una rapidez constante de 4 pies/s.



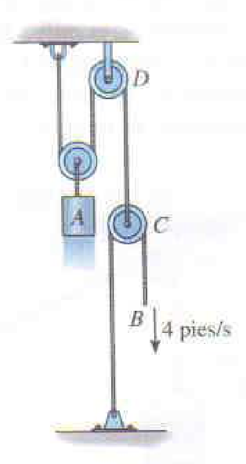

Prob. 12-177

**12-178.** Determine el desplazamiento del bloque situado en $B$ si $A$ es jalado hacia abajo 4 pies.



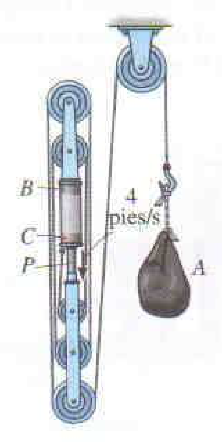

Prob. 12-178

**12-179.** El cable localizado en $B$ es jalado hacia abajo a 4 pies/s, y está desacelerando a 2 pies/s$^2$. Determine la velocidad y la aceleración del bloque $A$ en este instante.




Prob. 12-179

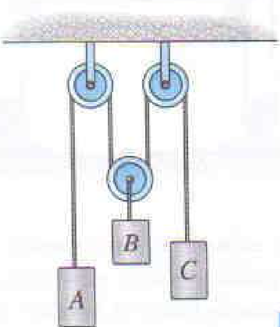
***12-180.** El arreglo de poleas mostrado está diseñado para levantar materiales. Si $BC$ *permanece fijo* mientras el émbolo $P$ es empujado hacia abajo con rapidez de 4 pies/s, determine la rapidez de la carga en $A$.




Prob. 12-180

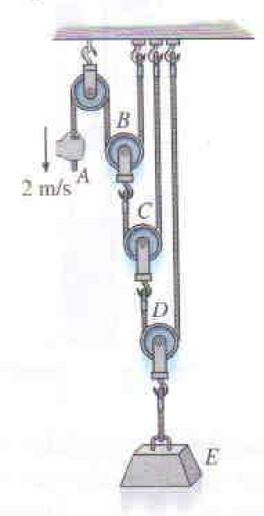
**12-181.** Si el bloque $A$ se está moviendo hacia abajo con rapidez de 4 pies/s mientras $C$ se mueve hacia arriba a 2 pies/s, determine la rapidez del bloque $B$.

**12-182.** Si el bloque $A$ se está moviendo hacia abajo a 6 pies/s mientras el bloque $C$ se mueve hacia abajo a 18 pies/s, determine la velocidad relativa del bloque $B$ con respecto a $C$.




Probs. 12-181/182

**12-183.** Si el extremo del cable localizado en $A$ está siendo jalado con rapidez de 2 m/s, determine la rapidez con que se eleva el bloque $E$.



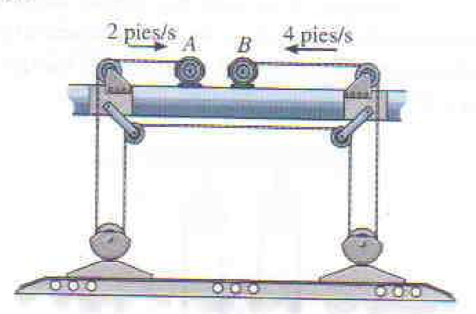

Prob. 12-183

***12-184.** Si el bloque $A$ del sistema de poleas se está moviendo hacia abajo con rapidez de 4 pies/s mientras el bloque $C$ se está moviendo hacia arriba a 2 pies/s, determine la rapidez del bloque $B$.



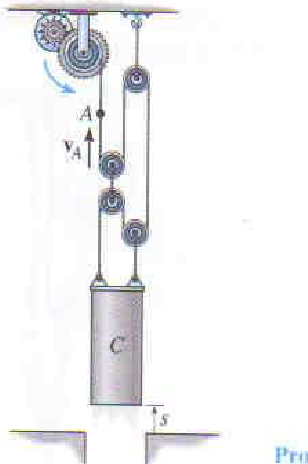

Prob. 12-184

**12-185.** La grúa se usa para izar la carga. Si los motores colocados en $A$ y $B$ están jalando el cable con rapidez de 2 y 4 pies/s, respectivamente, determine la rapidez de la carga.



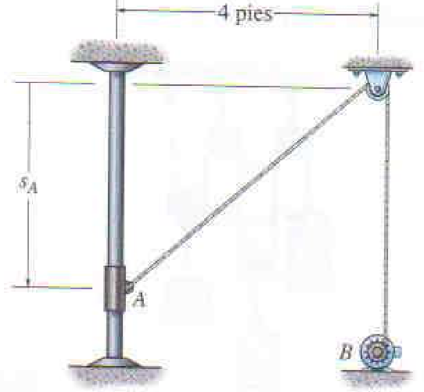

Prob. 12-185

**12-186.** El cilindro $C$ está siendo levantado usando el sistema de cable y poleas mostrado. Si el punto A sobre el cable es jalado hacia el tambor con rapidez de 2 m/s, determine la rapidez del cilindro.



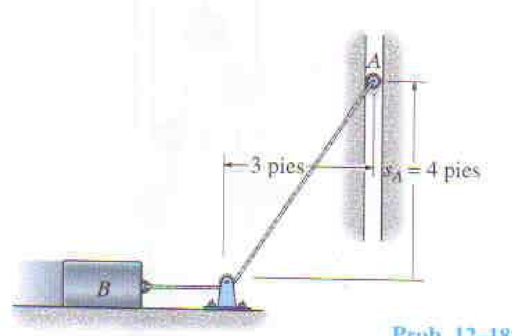

Prob. 12-186

**12-187.** El movimiento del collar instalado en $A$ es controlado por un motor situado en $B$ de manera tal que cuando el collar está en $s_A = 3$ pies, se mueve hacia arriba a 2 pies/s y desacelera a 1 pie/s$^2$. Determine la velocidad y la aceleración del cable al ser jalado dentro del motor $B$ en este instante.



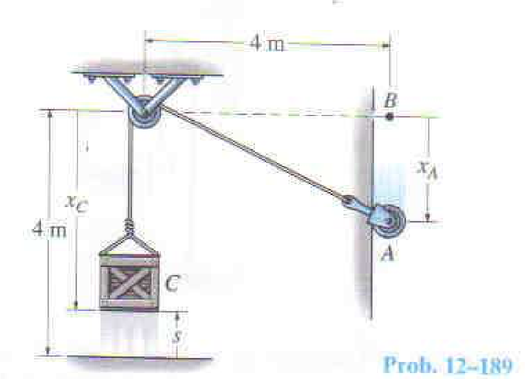

Prob. 12-187

***12-188.** El rodillo colocado en $A$ se mueve hacia arriba con velocidad $v_A = 3$ pies/s y tiene aceleración $a_A = 4$ pies/s$^2$ cuando $s_A = 4$ pies. Determine la velocidad y la aceleración del bloque $B$ en este instante.



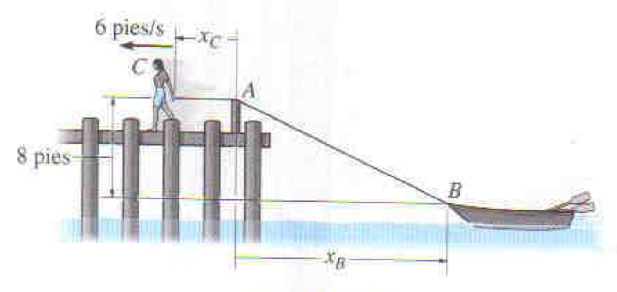

Prob. 12-188

**12-189.** La caja $C$ está siendo elevada al moverse el rodillo colocado en $A$ hacia abajo con rapidez constante de $v_A = 2$ m/s a lo largo de la guía. Determine la velocidad y la aceleración de la caja en el instante $s = 1$ m. Cuando el rodillo está en $B$, la caja descansa sobre el suelo. Desprecie el tamaño de la polea en los cálculos. *Sugerencia:* Relacione las coordenadas $x_C$ y $x_A$ usando la geometría del problema, luego tome las primera y segunda derivadas con respecto al tiempo.



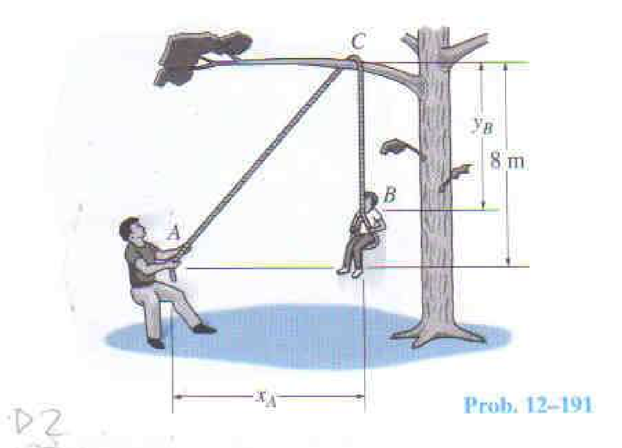

Prob. 12-189

**12-190.** La niña ubicada en $C$ está de pie cerca del borde del muelle y jala la cuerda *horizontalmente* con rapidez constante de 6 pies/s. Determine qué tan rápido se acerca el bote al muelle en el instante en que la longitud de la cuerda $AB$ es de 50 pies.




Prob. 12-190

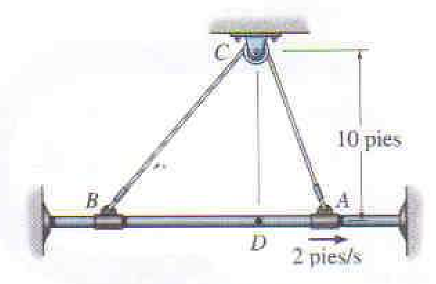
**12-191.** El hombre jala al niño hacia la rama $C$ del árbol caminando hacia atrás. Si él parte del reposo cuando $x_A = 0$ y se mueve hacia atrás con aceleración constante $a_A = 0.2\ \text{m/s}^2$, determine la rapidez del niño en el instante $y_B = 4$ m. Desprecie el tamaño de la rama. Cuando $x_A = 0$, $y_B = 8$ m, de manera que $A$ y $B$ coinciden, es decir, la cuerda es de 16 m de longitud.




Prob. 12–191

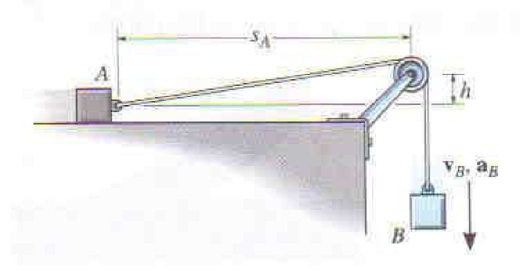
D2

*12-192. Los collares $A$ y $B$ están conectados a la cuerda que pasa sobre la pequeña polea en $C$. Cuando $A$ está ubicado en $D$, $B$ está 24 pies a la izquierda de $D$. Si $A$ se mueve con rapidez constante de 2 pies/s hacia la derecha, determine la rapidez de $B$ cuando $A$ está 4 pies a la derecha de $D$.



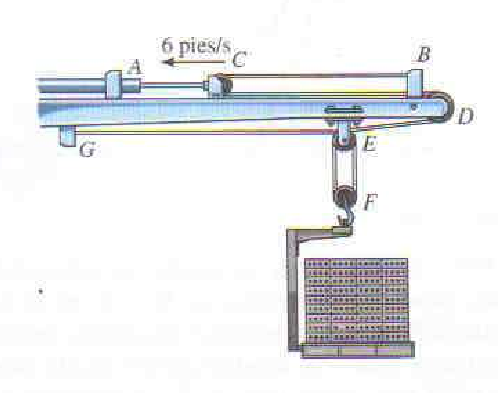

Prob. 12–192

**12-193.** Si el bloque $B$ se está moviendo hacia abajo con velocidad $v_B$ y tiene aceleración $a_B$, determine la velocidad y la aceleración del bloque $A$ en términos de los parámetros mostrados.



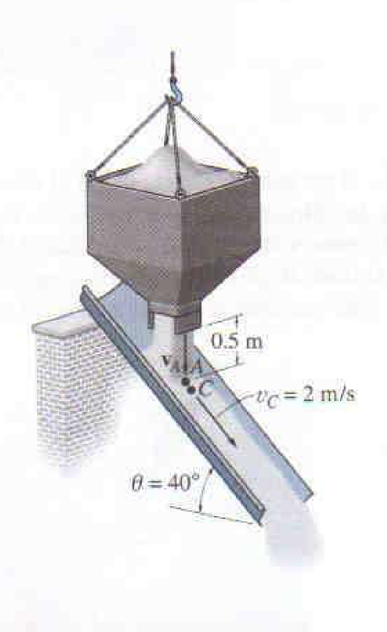

Prob. 12–193

**12-194.** El movimiento vertical de la carga es producido por el movimiento del pistón ubicado en $A$ sobre el brazo. Determine la distancia que el pistón o polea en $C$ debe moverse hacia la izquierda para elevar la carga 2 pies. El cable está unido en $B$, pasa sobre la polea en $C$, luego por $D$, $E$, $F$, de nuevo alrededor de $E$, y queda unido en $G$.



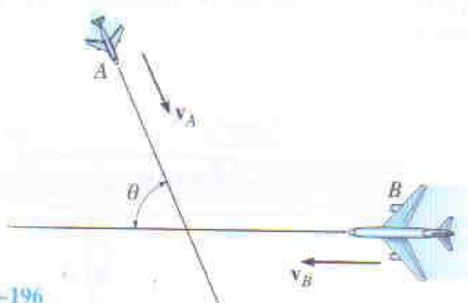

Prob. 12–194

**12-195.** La arena cae del reposo 0.5 m verticalmente sobre un canalón. Si entonces se desliza con velocidad $v_C = 2$ m/s por el canalón, determine la velocidad relativa de la arena justo al caer sobre el canalón en el punto $A$ con respecto a la arena que se desliza hacia abajo por el canalón. Éste forma un ángulo de 40° con la horizontal.




Prob. 12–195

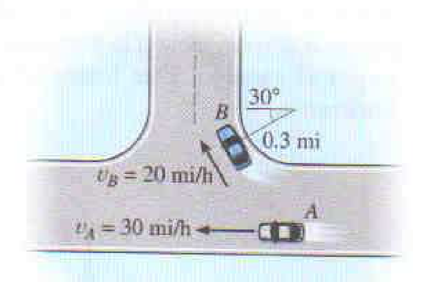
*12-196. Dos aviones $A$ y $B$ están volando a la misma altura. Si sus velocidades son $v_A = 600$ km/h y $v_B = 500$ km/h de manera tal que el ángulo entre sus cursos en línea recta es $\theta = 75°$, determine la velocidad del avión $B$ con respecto al avión $A$.




Prob. 12-196

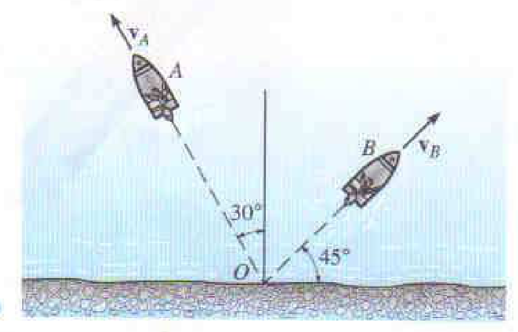
12-197. En el instante mostrado, los automóviles $A$ y $B$ están viajando con rapidez de 30 y 20 mi/h, respectivamente. Si $B$ está incrementando su rapidez en 1200 mi/h$^2$, mientras $A$ mantiene una rapidez constante, determine la velocidad y la aceleración de $B$ con respecto a $A$.

12-198. En el instante mostrado, los automóviles $A$ y $B$ están viajando con rapidez de 30 y 20 mi/h, respectivamente. Si $A$ está incrementando su rapidez a 400 mi/h$^2$, mientras que la rapidez de $B$ está disminuyendo a 80 mi/h$^2$, determine la velocidad y la aceleración de $B$ con respecto a $A$.



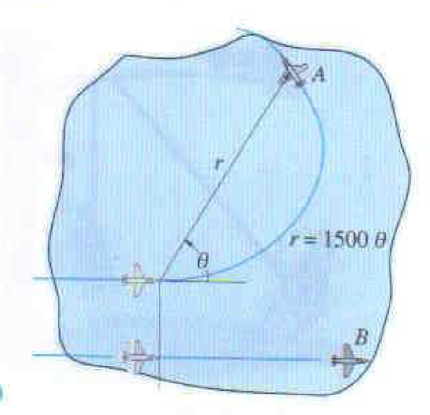

Probs. 12-197/198

12-199. Dos botes dejan la orilla al mismo tiempo y viajan en las direcciones mostradas. Si $v_A = 20$ pies/s y $v_B = 15$ pies/s, determine la rapidez del bote $A$ con respecto al bote $B$. ¿Cuánto tiempo después de dejar la orilla los botes estarán a 800 pies uno de otro?



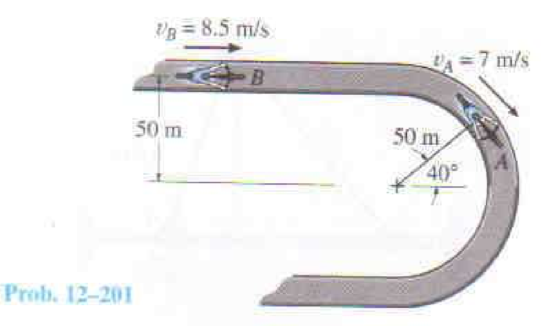

Prob. 12-199

*12-200. Dos aviones $A$ y $B$ están volando uno al lado del otro con rapidez constante de 900 km/h. Manteniendo esta rapidez, el avión $A$ comienza a viajar por una trayectoria espiral $r = (1500\theta)$ km, donde $\theta$ está en radianes, mientras que el avión $B$ continúa volando en línea recta. Determine la rapidez del avión $A$ con respecto al avión $B$ cuando $r = 750$ km.



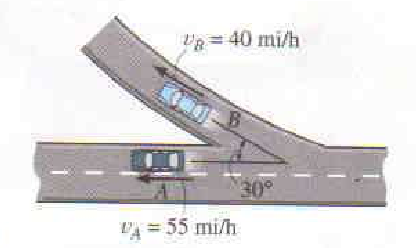

Prob. 12-200

12-201. En el instante mostrado, el ciclista en $A$ está viajando a 7 m/s alrededor de la curva de la pista mientras incrementa su rapidez en 0.5 m/s$^2$. El ciclista en $B$ está viajando a 8.5 m/s a lo largo de una porción recta de la pista e incrementa su rapidez en 0.7 m/s$^2$. Determine la velocidad relativa y la aceleración relativa de $A$ con respecto a $B$ en este instante.



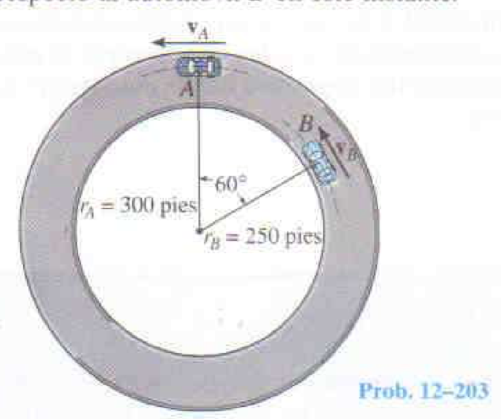

Prob. 12-201

12-202. En el instante mostrado, los automóviles $A$ y $B$ están viajando con velocidades de 55 y 40 mi/h, respectivamente. Si $B$ está incrementando su rapidez en 1200 mi/h$^2$, mientras que $A$ mantiene una rapidez constante, determine la velocidad y la aceleración de $B$ con respecto a $A$. El automóvil $B$ se mueve por una curva que tiene un radio de curvatura de 0.5 millas.



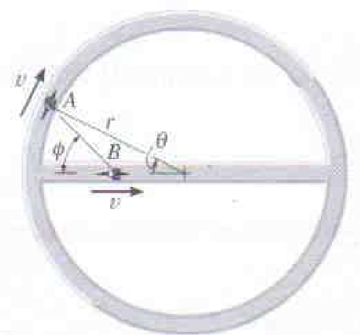

Prob. 12-202

12-203. Los automóviles $A$ y $B$ están viajando alrededor de la pista circular. En el instante mostrado, $A$ tiene una rapidez de 90 pies/s y la está incrementando a razón de 15 pies/s$^2$, mientras que $B$ tiene rapidez de 105 pies/s y la está desacelerando a razón de 25 pies/s$^2$. Determine la velocidad relativa y la aceleración relativa del automóvil $A$ con respecto al automóvil $B$ en este instante.



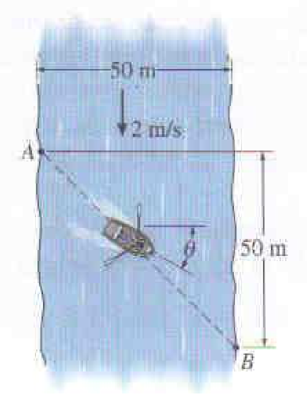

Prob. 12–203

*12-204. Los dos ciclistas $A$ y $B$ viajan con la misma rapidez constante $v$. Determine la rapidez de $A$ con respecto a $B$ si $A$ viaja por la pista circular, mientras que $B$ lo hace a lo largo del diámetro del círculo.




Prob. 12–204

12-205. Un hombre puede remar un bote a 5 m/s en aguas tranquilas. Él quiere cruzar un río de 50 m de ancho para llegar al punto $B$, 50 m aguas abajo. Si el río fluye con velocidad de 2 m/s, determine la rapidez del bote y el tiempo necesario para efectuar el cruce.



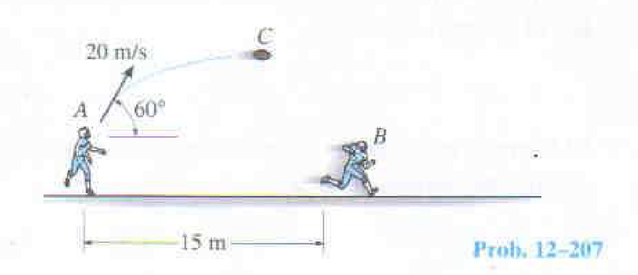

Prob. 12–205

12-206. Un pasajero en un automóvil observa que las gotas de agua forman un ángulo de 30° con la horizontal cuando el automóvil viaja hacia delante con rapidez de 60 km/h. Calcule la velocidad terminal (constante) $\mathbf{v}_r$ de la lluvia si se supone que cae verticalmente.



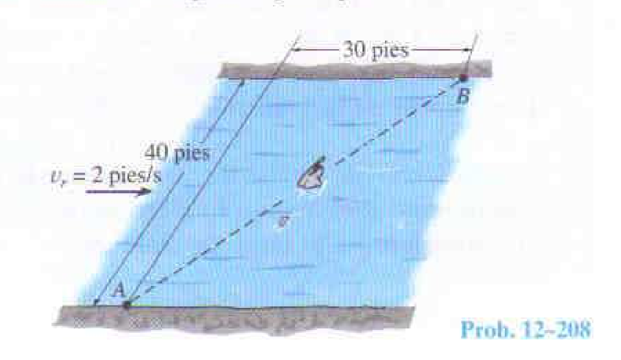

Prob. 12–206

12-207. En un instante dado, el jugador situado en $A$ lanza una pelota $C$ con velocidad de 20 m/s en la dirección mostrada. Determine la rapidez constante con que el jugador localizado en $B$ debe correr para que pueda recibir la pelota a la misma elevación a la que fue lanzada. Calcule también la velocidad relativa y la aceleración relativa de la pelota con respecto a $B$ en el instante en que el jugador la recibe. El jugador $B$ está a 15 m de $A$ cuando $A$ lanza la pelota.




Prob. 12–207

*12-208. Un hombre puede nadar a 4 pies/s en aguas tranquilas. Él desea cruzar el río de 40 pies de ancho para llegar al punto $B$ que está 30 pies aguas abajo. Si el río fluye con velocidad de 2 pies/s, determine la rapidez del hombre y el tiempo que necesita para efectuar el cruce. *Nota*: Mientras está en el agua él no debe dirigirse hacia $B$ para alcanzar este punto. ¿Por qué?




Prob. 12–208

# PROYECTOS DE DISEÑO

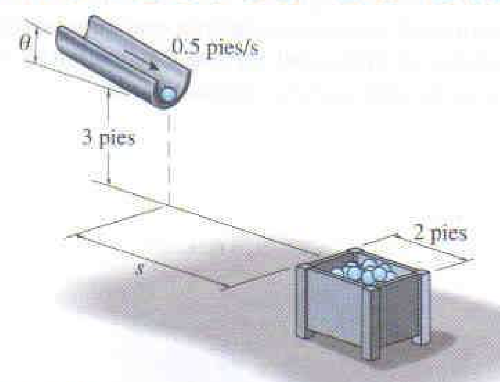



Fig. 12–1D

**12–1D. DISEÑO DE UN DISPOSITIVO SEPARADOR DE CANICAS**

Las canicas salen del canalón de producción a 0.5 pies/s. Determine el rango para el ángulo $0 \leq \theta \leq 30°$ para una posición seleccionada $s$ con la cual se determine la colocación de la tolva con respecto al extremo del canalón. Presente un dibujo del dispositivo donde muestre la trayectoria seguida por las canicas.

## REPASO DEL CAPÍTULO

- *Cinemática rectilínea.* La cinemática rectilínea se refiere al movimiento que ocurre a lo largo de una línea recta. Una coordenada $s$ de posición especifica la ubicación de la partícula sobre la línea, y el desplazamiento $\Delta s$ es el cambio de esta posición.

  La velocidad promedio es una cantidad vectorial, definida como el desplazamiento dividido entre el intervalo de tiempo.

$$\mathbf{v}_{\text{prom}} = \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$$

  Esto es diferente a la rapidez promedio, la cual es un escalar y es la distancia total viajada dividida entre el tiempo de viaje.

$$(v_{sp})_{\text{prom}} = \frac{s_T}{\Delta t}$$

  El tiempo, la posición, la velocidad instantánea y la aceleración instantánea están relacionados mediante las ecuaciones diferenciales

$$v = ds/dt \qquad a = dv/dt \qquad a\,ds = v\,dv$$

  Si se sabe que la aceleración es constante, entonces, por integración de esas ecuaciones se obtiene

$$v = v_0 + a_c t$$
$$s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2} a_c t^2$$
$$v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$$

- *Soluciones gráficas.* Si el movimiento es errático, entonces puede ser descrito mediante una gráfica. Si una de estas gráficas está dada, entonces las otras pueden ser establecidas usando las relaciones diferenciales, $v = ds/dt$, $a = dv/dt$, o $a\,ds = v\,dv$. Por ejemplo, si se conoce la gráfica $v-t$, entonces los valores de la gráfica $s-t$ son determinados a partir de $\Delta s = \int v\,dt$ = incrementos de área bajo la gráfica $v-t$. Los valores de la gráfica $a-t$ son determinados a partir de $a = dv/dt$ = pendiente de la gráfica $v-t$.

- *Movimiento curvilíneo, x, y, z.* Para este caso, el movimiento a lo largo de la trayectoria es resuelto en movimiento rectilíneo a lo largo de los ejes $x$, $y$, $z$. La ecuación de la trayectoria se usa para relacionar el movimiento a lo largo de cada eje.

- *Movimiento de un proyectil.* El movimiento de vuelo libre de un proyectil sigue una trayectoria parabólica. Tiene velocidad constante en la dirección horizontal y aceleración constante de $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ o $32.2 \text{ pies/s}^2$ en la dirección vertical. Dos cualesquiera de las tres ecuaciones para aceleración constante son aplicables en la dirección vertical, y en la dirección horizontal sólo es aplicable $x = x_0 + (v_0)_x t$.

- *Movimiento curvilíneo n, t.* Si los ejes normal y tangencial se usan para el análisis, entonces **v** está siempre en la dirección $t$ positiva. La aceleración tiene dos componentes. La componente tangencial, $\mathbf{a}_t$, toma en cuenta el cambio en la magnitud de la velocidad; una disminución de ésta es en la dirección $t$ negativa, y un aumento es en la dirección $t$ positiva. La componente normal $\mathbf{a}_n$ toma en cuenta el cambio en la dirección de la velocidad. Esta componente está siempre en la dirección $n$ positiva.

- *Movimiento curvilíneo, r, θ, z.* Si la trayectoria del movimiento es expresada en coordenadas polares, entonces las componentes de la velocidad y de la aceleración pueden ser escritas como

$$v_r = \dot{r} \qquad a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$
$$v_\theta = r\dot{\theta} \qquad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$

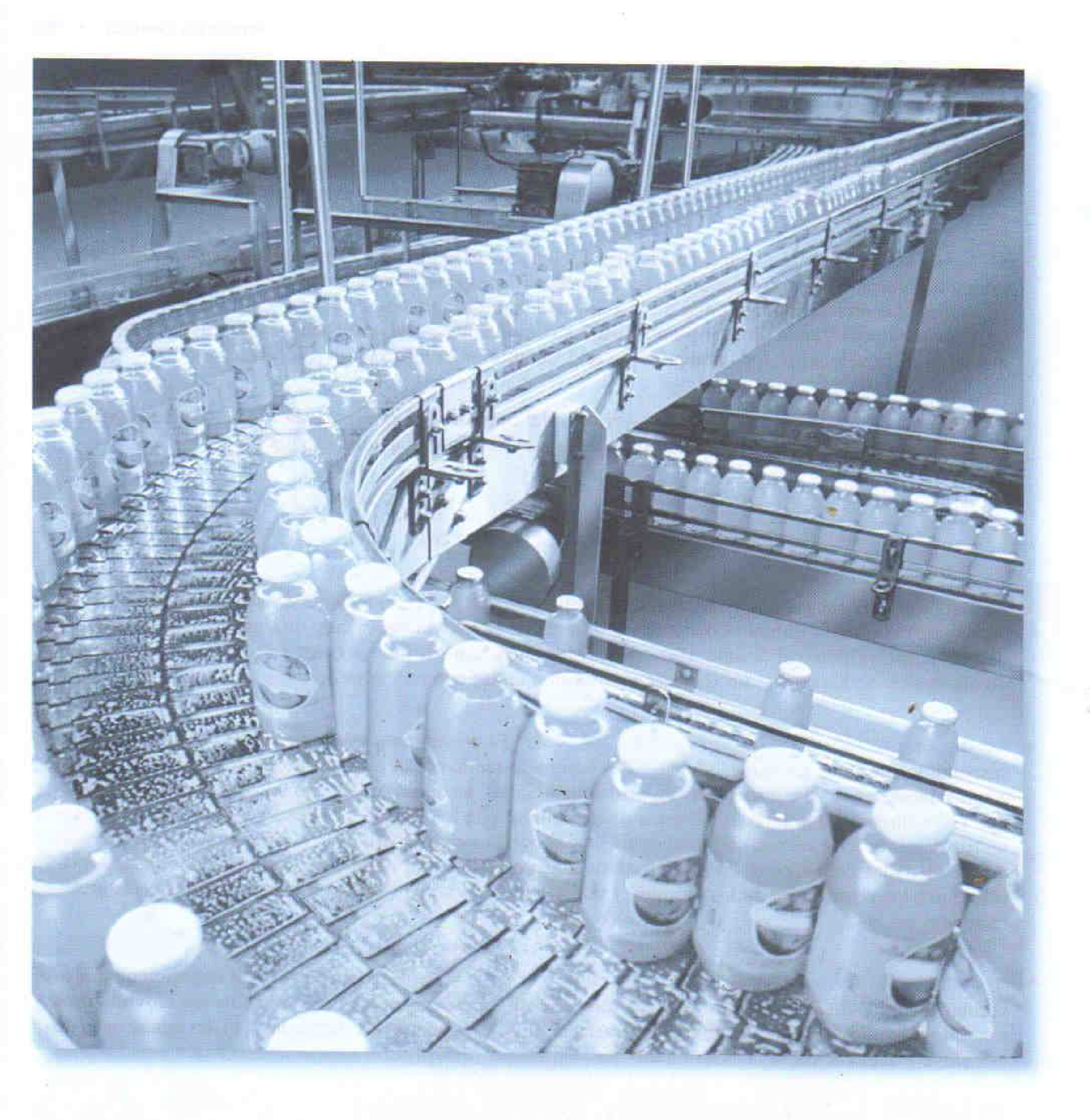
Para aplicar estas ecuaciones, es necesario determinar $r, \dot{r}, \ddot{r}, \dot{\theta}, \ddot{\theta}$ en el instante considerado. Si la trayectoria $r = f(\theta)$ está dada, entonces debe usarse la regla de la cadena del cálculo diferencial para obtener las derivadas con respecto al tiempo. Una vez que los datos son sustituidos dentro de las ecuaciones, el signo algebraico de los resultados indicará la dirección de las componentes de $v$ o $a$ a lo largo de cada eje.

- *Movimiento absoluto dependiente de dos partículas.* El movimiento dependiente de bloques que están suspendidos de poleas y cables puede ser relacionado mediante la geometría del sistema. Esto se hace estableciendo primero coordenadas de posición, medidas desde un origen fijo a cada bloque de manera que estén dirigidas a lo largo de la línea de movimiento de los bloques. Usando geometría y/o trigonometría, las coordenadas son entonces relacionadas con la longitud del cable para formular una ecuación de coordenadas de posición. La primera derivada con respecto al tiempo de esta ecuación da una relación entre las velocidades de los bloques, y una segunda derivada resulta en la relación entre sus aceleraciones.

- *Análisis del movimiento relativo usando ejes en traslación.* Si dos partículas $A$ y $B$ experimentan movimientos independientes, entonces esos movimientos pueden ser relacionados con sus movimientos relativos. Usando un conjunto de ejes en traslación unidos a una de las partículas ($A$), las ecuaciones de velocidad y aceleración se convierten en

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

En movimiento plano, cada una de estas ecuaciones produce dos ecuaciones escalares, una en $x$ y la otra en la dirección $y$. Para encontrar la solución, los vectores pueden ser expresados en forma cartesiana o las componentes escalares en $x$ y $y$ pueden ser escritas directamente.



El diseño de bandas transportadoras para una planta embotelladora requiere conocer las fuerzas que actúan sobre ellas y la capacidad para predecir el movimiento de las botellas que transportan.

CAPÍTULO 13

# Cinética de una partícula: Fuerza y aceleración

## OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Establecer las leyes de Newton sobre el movimiento y la atracción gravitatoria y definir masa y peso.
- Analizar el movimiento acelerado de una partícula usando la ecuación de movimiento con diferentes sistemas coordenados.
- Investigar el movimiento bajo una fuerza central y aplicarlo a problemas en mecánica del espacio.

## 13.1 Leyes del movimiento de Newton

Muchas de las tempranas nociones sobre dinámica fueron modificadas después de 1590 cuando Galileo efectuó experimentos para estudiar los movimientos de péndulos y cuerpos en caída libre. Las conclusiones extraídas de esos experimentos proporcionaron cierta información acerca de los efectos de las fuerzas que actúan sobre cuerpos en movimiento. Sin embargo, las leyes generales del movimiento de un cuerpo sometido a fuerzas no fueron conocidas sino hasta 1687, cuando Isaac Newton presentó tres leyes básicas que rigen el movimiento de una partícula. Estas tres leyes del movimiento pueden ser enunciadas como sigue:

***Primera ley:*** *Una partícula originalmente en reposo, o moviéndose en línea recta con velocidad constante, permanecerá en este estado siempre que no esté sometida a una fuerza desbalanceada.*

***Segunda ley:*** *Una partícula sobre la que actúa una fuerza* ***F*** *desbalanceada experimenta una aceleración* ***a*** *que tiene la misma dirección que la fuerza y magnitud directamente proporcional a la fuerza.**

***Tercera ley:*** *Las fuerzas mutuas de acción y reacción entre dos partículas son iguales, opuestas y colineales.*

*Dicho de otra manera, la fuerza desbalanceada que actúa sobre la partícula es proporcional a la razón de cambio con respecto al tiempo del *momentum* lineal (o cantidad de movimiento) de la partícula. Vea el pie de página † en la siguiente página.

Las leyes primera y tercera fueron usadas ampliamente en el desarrollo de los conceptos de la estática. Aunque estas leyes también son consideradas en dinámica, la segunda ley del movimiento de Newton constituye la base para la mayor parte de este estudio, ya que esta ley relaciona el movimiento acelerado de una partícula con las fuerzas que actúan sobre ella.

Las mediciones de fuerza y aceleración pueden ser registradas en un laboratorio de manera que, de acuerdo con la segunda ley, si una fuerza **F** conocida desbalanceada es aplicada a una partícula, la aceleración **a** de la partícula puede ser medida. Como la fuerza y la aceleración son directamente proporcionales, la constante de proporcionalidad $m$ puede ser determinada a partir de la razón $m = F/a$.* El escalar positivo $m$ se denomina *masa* de la partícula. Como es constante durante cualquier aceleración, $m$ proporciona una medida cuantitativa de la resistencia de la partícula a un cambio en su velocidad.

Si la masa de la partícula es $m$, la segunda ley del movimiento de Newton puede ser escrita en forma matemática como

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

Esta ecuación, que se llama *ecuación de movimiento*, es una de las formulaciones más importantes en mecánica.† Como se indicó, su validez se basa únicamente en *evidencia experimental*. Sin embargo, en 1905 Albert Einstein desarrolló la teoría de la relatividad y puso límites al uso de la segunda ley de Newton para describir el movimiento general de una partícula. Por medio de experimentos se probó que el *tiempo* no es una cantidad absoluta como lo suponía Newton; como resultado, la ecuación de movimiento falla en predecir el comportamiento exacto de una partícula, especialmente cuando la rapidez de la partícula se acerca a la rapidez de la luz (0.3 Gm/s). Los desarrollos de la mecánica cuántica efectuados por Erwin Schrödinger y otros indican, además, que conclusiones obtenidas al usar esta ecuación también son inválidas cuando las partículas tienen el tamaño de un átomo y se mueven cerca una de otra. Sin embargo, en la mayoría de los casos, esos requisitos relativos a la rapidez y el tamaño de la partícula no se encuentran en los problemas de ingeniería, por lo que sus efectos no serán considerados en este libro.

*Recuerde que las unidades de fuerza en el SI y de masa en el sistema FPS son derivadas de esta ecuación, donde $\text{N} = \text{kg} \cdot \text{m/s}^2$ y $\text{slug} = \text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{pie}$ (vea la Sec. 1.3 del libro de *Estática*). Sin embargo, si las unidades de fuerza, masa, longitud y tiempo fuesen *todas* seleccionadas arbitrariamente, entonces es necesario escribir $F = kma$, donde $k$ (una constante sin dimensiones) tendrá que ser determinada experimentalmente para preservar la igualdad.

†Como $m$ es constante, también podemos escribir $\mathbf{F} = d(m\mathbf{v})/dt$, donde $m\mathbf{v}$ es el *momentum* lineal de la partícula.

**Ley de la atracción gravitatoria de Newton.** Poco después de formular sus tres leyes del movimiento, Newton postuló una ley que rige la atracción mutua entre dos partículas cualesquiera. En forma matemática, esta ley puede ser expresada como

$$F = G\frac{m_1 m_2}{r^2} \tag{13–1}$$

donde

$F$ = fuerza de atracción entre las dos partículas

$G$ = constante universal de gravitación; de acuerdo con evidencia experimental, $G = 66.73(10^{-12})\ \text{m}^3/(\text{kg}\cdot\text{s}^2)$

$m_1, m_2$ = masa de cada una de las dos partículas

$r$ = distancia entre los centros de las dos partículas

Dos partículas o cuerpos cualesquiera tienen una fuerza atractiva gravitatoria mutua actuando entre ellos. Sin embargo, en el caso de una partícula ubicada en o cerca de la superficie de la Tierra, la única fuerza gravitatoria que tiene magnitud considerable es aquella existente entre la Tierra y la partícula. Esta fuerza se llama "peso" y, para nuestros fines, será la única fuerza gravitatoria que consideraremos.

**Masa y peso.** La *masa* es una propiedad de la materia por medio de la cual podemos comparar la respuesta de un cuerpo con la de otro. Como se indicó líneas arriba, esta propiedad se manifiesta como una atracción gravitatoria entre dos cuerpos y proporciona una medida cuantitativa de la resistencia de la materia a un cambio de velocidad. La masa es una cantidad *absoluta* ya que su medición puede efectuarse en cualquier sitio. Sin embargo, el peso de un cuerpo *no* es *absoluto* ya que es medido en un campo gravitatorio, y por consiguiente su magnitud depende de dónde se efectúe la medición. A partir de la ecuación 13-1, podemos desarrollar una expresión general para encontrar el peso $W$ de una partícula que tenga masa $m_1 = m$. Sea $m_2$ la masa de la Tierra y $r$ la distancia entre el centro de la Tierra y la partícula. Entonces, si $g = Gm_2/r^2$, tenemos

$$W = mg$$

Por comparación con $F = ma$, llamamos $g$ a la aceleración debida a la gravedad. Para la mayoría de los cálculos de ingeniería, $g$ está medida en un punto sobre la superficie de la Tierra localizado al nivel del mar y a una latitud de 45°, siendo considerada ésta la "ubicación estándar".

La masa y el peso de un cuerpo son medidos en forma diferente en los sistemas de unidades SI y FPS, y el método para definir estas unidades debe ser entendido claramente.

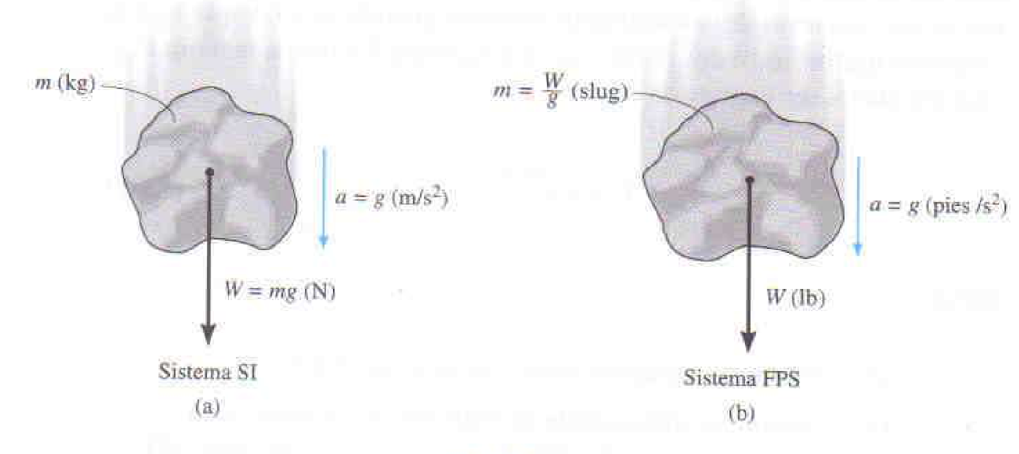



Fig. 13–1

**Sistema de unidades SI.** En el SI la masa del cuerpo es especificada en kilogramos, y el peso debe ser calculado usando la ecuación de movimiento, $F = ma$. Por tanto, si un cuerpo tiene masa $m$ (kg) y está ubicado en un punto donde la aceleración debida a de la gravedad es $g$ (m/s²), entonces el peso es expresado en *newtons* como $W = mg$ (N), figura 13-1*a*. En particular, si el cuerpo está situado en la "ubicación estándar", la aceleración de la gravedad es $g = 9.80665 \text{ m/s}^2$. Para los cálculos se usará el valor $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, de manera que

$$W = mg \text{ (N)} \qquad (g = 9.81 \text{ m/s}^2) \tag{13–2}$$

Por tanto, un cuerpo con masa de 1 kg tiene un peso de 9.81 N; un cuerpo de 2 kg pesa 19.62 N, etcétera.

**Sistema de unidades FPS.** En el sistema FPS el peso de un cuerpo es especificado en libras, y la masa debe ser calculada con $F = ma$. Por tanto, si un cuerpo tiene un peso $W$ (lb) y está ubicado en un punto donde la aceleración de la gravedad es $g$ (pies/s²), entonces la masa es expresada en *slugs* como $m = W/g$ (slug), figura 13-1*b*. Como la aceleración de la gravedad en la ubicación estándar es de aproximadamente 32.2 pies/s² (= 9.81 m/s²), la masa del cuerpo medida en slugs es

$$m = \frac{W}{g} \text{(slug)} \qquad (g = 32.2 \text{ pies/s}^2) \tag{13–3}$$

Por tanto, un cuerpo que pese 32.2 lb tiene una masa de 1 slug; un cuerpo de 64.4 lb tiene masa de 2 slugs, etcétera.

## 13.2 La ecuación de movimiento

Cuando más de una fuerza actúa sobre una partícula, la fuerza resultante es determinada mediante una suma vectorial de todas las fuerzas, esto es, $\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F}$. Para este caso más general, la ecuación de movimiento puede escribirse como

$$\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a} \tag{13–4}$$

Para ilustrar cómo se aplica esta ecuación, considere la partícula $P$ mostrada en la figura 13-2*a*, la cual tiene masa $m$ y está sometida a la acción de dos fuerzas, $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. Gráficamente, podemos tomar en cuenta la magnitud y la dirección de cada fuerza que actúa sobre la partícula dibujando el *diagrama de cuerpo libre* de la partícula, figura 13-2*b*. Como la *resultante* de esas fuerzas *produce* el vector $m\mathbf{a}$, su magnitud y su dirección pueden ser representadas gráficamente en el *diagrama cinético*, mostrado en la figura 13-2*c*.* El signo de igual escrito entre los diagramas simboliza la equivalencia *gráfica* entre el diagrama de cuerpo libre y el diagrama cinético, es decir, $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. † En particular, advierta que si $\mathbf{F}_R = \Sigma\mathbf{F} = \mathbf{0}$, entonces la aceleración es también cero, de modo que la partícula permanecerá en *reposo* o moviéndose en una trayectoria recta con *velocidad constante*. Tales son las condiciones del *equilibrio estático*, o primera ley del movimiento de Newton.

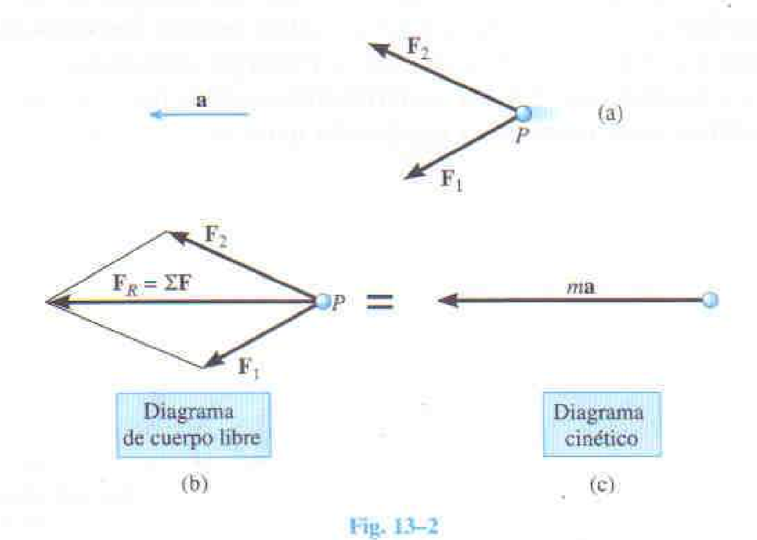



Fig. 13–2

*Recuerde que el diagrama de cuerpo libre considera a la partícula libre de su entorno y muestra todas las fuerzas que actúan sobre la partícula. El diagrama cinético corresponde al movimiento de la partícula causado por las fuerzas.

† La ecuación de movimiento también puede ser reescrita en la forma $\Sigma\mathbf{F} - m\mathbf{a} = \mathbf{0}$. El vector $-m\mathbf{a}$ se llama *vector de fuerza de inercia*. Si éste es tratado de la misma manera que un "vector fuerza", entonces el estado de "equilibrio" creado se denomina *equilibrio dinámico*. Este método de aplicación a menudo es referido como el *principio D'Alembert*, llamado así en honor del matemático francés Jean le Rond d'Alembert.

**Marco inercial de referencia.** Siempre que la ecuación de movimiento es aplicada, se requiere que las mediciones de la aceleración se efectúen desde un *marco de referencia inercial o newtoniano. Un sistema coordenado de tal tipo no gira y está fijo o se traslada en una dirección dada con velocidad constante (aceleración cero)*. Esta definición garantiza que la *aceleración* de la partícula medida por observadores colocados en dos marcos inerciales de referencia diferentes será siempre la *misma*. Por ejemplo, considere la partícula $P$ moviéndose con una aceleración absoluta $\mathbf{a}_P$ a lo largo de una trayectoria recta como se muestra en la figura 13-3. Si el observador está *fijo* en el marco inercial de referencia $x$, $y$, esta aceleración, $\mathbf{a}_P$, será medida por él independientemente de la dirección y la magnitud de la velocidad $\mathbf{v}_O$ del marco de referencia. Por otra parte, si el observador está *fijo* en el marco de referencia no inercial $x'$, $y'$, figura 13-3, no medirá para la aceleración de la partícula el valor $\mathbf{a}_P$. En vez de ello, si el marco está *acelerando* en $\mathbf{a}_{O'}$, parecerá que la partícula tiene aceleración $\mathbf{a}_{P/O'} = \mathbf{a}_P - \mathbf{a}_{O'}$. Además, si el marco está *girando*, como indica la flecha curva, entonces parecerá que la partícula se mueve por una *trayectoria curva*, en cuyo caso parecerá que la partícula tiene otras componentes de aceleración (vea la Sec. 16.8). En cualquier caso, la aceleración medida desde este observador no puede ser usada en la ley del movimiento de Newton para determinar las fuerzas que actúan sobre la partícula.

Al estudiar los movimientos de cohetes y satélites es justificable considerar el marco de referencia inercial como fijo a las estrellas, mientras que los problemas de dinámica que implican movimientos en o cerca de la superficie de la Tierra pueden ser resueltos usando un marco inercial supuesto fijo a la Tierra. Aun cuando la Tierra gira alrededor de su propio eje y también del Sol, las aceleraciones creadas por esas rotaciones son relativamente pequeñas y pueden ser ignoradas en la mayoría de los cálculos.

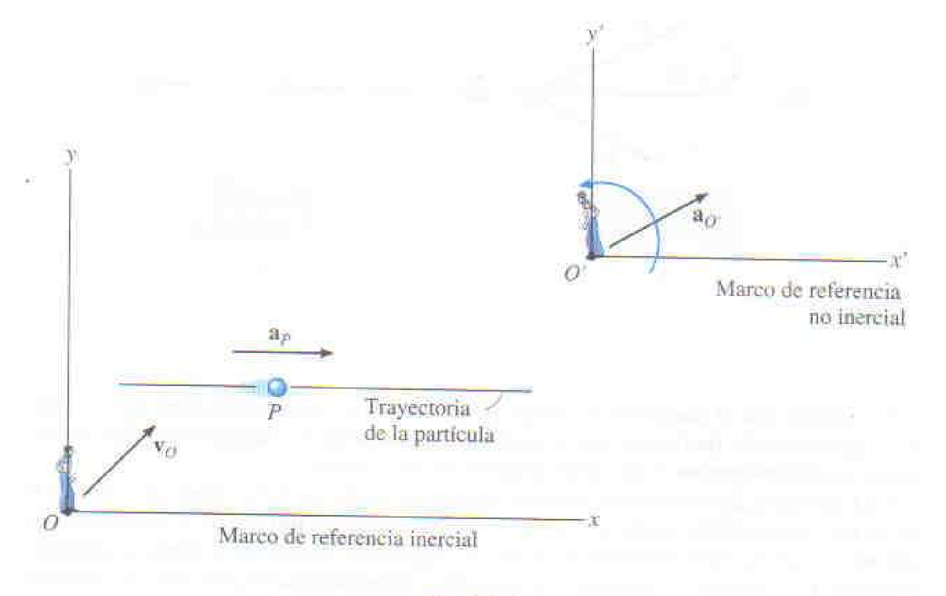
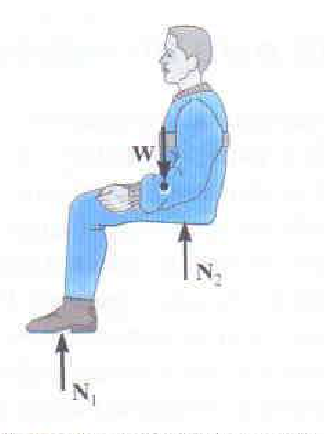



Fig. 13-3





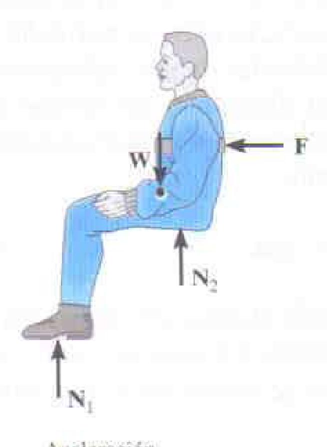

En reposo o a velocidad constante

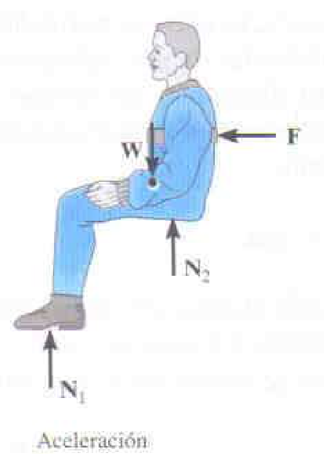
Fig. 1

Todos estamos familiarizados con la sensación que se percibe al ir sentado en un automóvil que está sometido a una aceleración hacia delante. La gente piensa a menudo que tal sensación es causada por una "fuerza" que actúa sobre ella y tiende a empujarla hacia atrás en sus asientos; sin embargo, no es así. Más bien, esto ocurre debido a la inercia o resistencia de la masa corporal a un cambio de velocidad.

Considere al pasajero que muestra la figura 1, el cual está sujeto con correas al asiento de un trineo cohete. Si el trineo está en reposo o moviéndose con velocidad constante, entonces ninguna fuerza es ejercida sobre la espalda del sujeto, como se muestra en su diagrama de cuerpo libre.





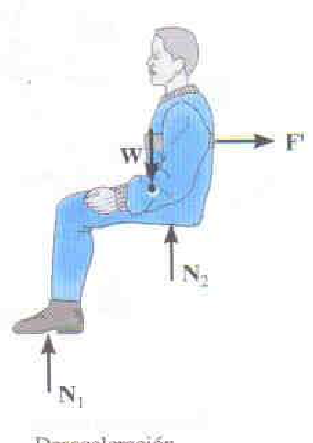



Aceleración

Fig. 2

Cuando el empuje del motor del cohete ocasiona que el vehículo acelere, el asiento sobre el que está sentado el pasajero ejerce una fuerza **F** sobre él que lo empuja hacia delante, figura 2. En la fotografía, advierta que la inercia de la cabeza resiste este cambio en el movimiento (aceleración), por lo que su cabeza se mueve hacia atrás contra el asiento y su cara, que no es rígida, tiende a deformarse.






Desaceleración

Fig. 3

Durante la desaceleración, figura 3, la fuerza del cinturón del asiento **F'** tiende a detener al sujeto, por lo que su cabeza deja de estar en contacto con el respaldo del asiento y su cara se deforma, de nuevo debido a su inercia o tendencia a continuar moviéndose hacia delante. Ninguna fuerza lo jala hacia delante, aunque ésta es la sensación que él percibe.

## 13.3 Ecuación de movimiento para un sistema de partículas

La ecuación de movimiento será ampliada ahora para incluir un sistema de $n$ partículas aisladas dentro de una región cerrada en el espacio, como se muestra en la figura 13-4*a*. En particular, no hay restricción en el modo en que las partículas están conectadas, y como resultado el siguiente análisis se aplicará igualmente bien al movimiento de un sistema sólido, líquido o gaseoso. En el instante considerado, la partícula arbitraria $i$-ésima, con masa $m_i$, está sometida a un sistema de fuerzas internas y a una fuerza resultante externa. La *fuerza resultante interna*, representada simbólicamente por $\mathbf{f}_i$, es determinada a partir de las fuerzas que las otras partículas ejercen sobre la partícula $i$-ésima. Usualmente estas fuerzas son desarrolladas por contacto directo, aunque la suma se amplía a todas las $n$ partículas incluidas dentro de la frontera señalada por la línea discontinua. La *fuerza resultante externa* $\mathbf{F}_i$ representa, por ejemplo, el efecto de fuerzas gravitatorias, eléctricas, magnéticas o de contacto entre la partícula $i$-ésima y cuerpos adyacentes o partículas *no* incluidas dentro del sistema.

Los diagramas de cuerpo libre y cinético para la partícula $i$-ésima se muestran en la figura 13-4*b*. Aplicando la ecuación de movimiento se obtiene

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}; \qquad \mathbf{F}_i + \mathbf{f}_i = m_i\mathbf{a}_i$$

Cuando la ecuación de movimiento sea aplicada a cada una de las otras partículas del sistema, resultarán ecuaciones similares. Si todas esas ecuaciones se suman *vectorialmente*, obtenemos

$$\Sigma \mathbf{F}_i + \Sigma \mathbf{f}_i = \Sigma m_i\mathbf{a}_i$$

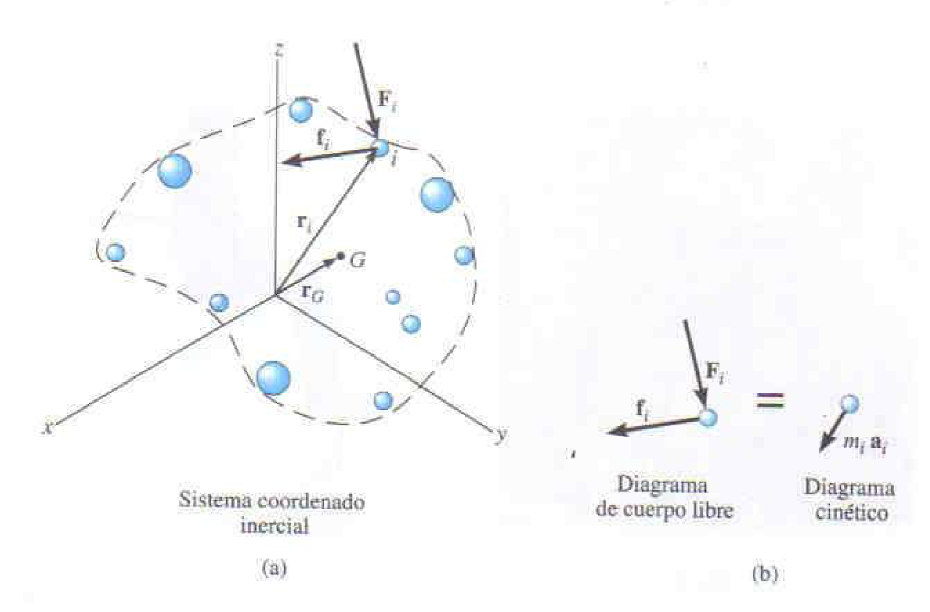



Fig. 13–4

La suma de las fuerzas internas, si se lleva a cabo, será igual a cero, ya que todas las fuerzas internas entre partículas ocurren en pares iguales colineales pero opuestos. En consecuencia, sólo quedarán la suma de las fuerzas externas, y por tanto la ecuación de movimiento, escrita para el sistema de partículas, toma la forma

$$\Sigma \mathbf{F}_i = \Sigma m_i \mathbf{a}_i \tag{13–5}$$

Si $\mathbf{r}_G$ es un vector posición que localiza el *centro de masa G* de las partículas, figura 13-4*a*, entonces, por definición del centro de masa, $m\mathbf{r}_G = \Sigma m_i \mathbf{r}_i$, donde $m = \Sigma m_i$ es la masa total de todas las partículas. Al diferenciar esta ecuación dos veces con respecto al tiempo, y suponiendo que ninguna masa está entrando o saliendo del sistema, resulta

$$m\mathbf{a}_G = \Sigma m_i \mathbf{a}_i$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación 13-5, obtenemos

$$\boxed{\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}_G} \tag{13–6}$$

Por consiguiente, la suma de las fuerzas externas que actúan sobre el sistema de partículas es igual a la masa total de las partículas multiplicada por la aceleración de su centro de masa $G$. Como en realidad todas las partículas deben tener un tamaño finito para poseer masa, la ecuación 13-6 justifica aplicar la ecuación de movimiento a un *cuerpo* que es representado por una sola partícula.

## PUNTOS IMPORTANTES

- La ecuación de movimiento se basa en evidencia experimental y es válida sólo cuando se aplica desde un marco de referencia inercial.
- La ecuación de movimiento establece que la *fuerza desbalanceada* sobre una partícula ocasiona que ésta se acelere.
- Un marco inercial de referencia no gira, en vez de ello, tiene ejes que se trasladan con velocidad constante o están en reposo.
- La masa es una propiedad de la materia que proporciona una medida cuantitativa de su resistencia a un cambio de velocidad. Es una cantidad absoluta.
- El peso es una fuerza causada por la gravedad de la Tierra. No es absoluta sino que depende de la altitud de la masa con respecto a la superficie de la Tierra.

## 13.4 Ecuaciones de movimiento: Coordenadas rectangulares

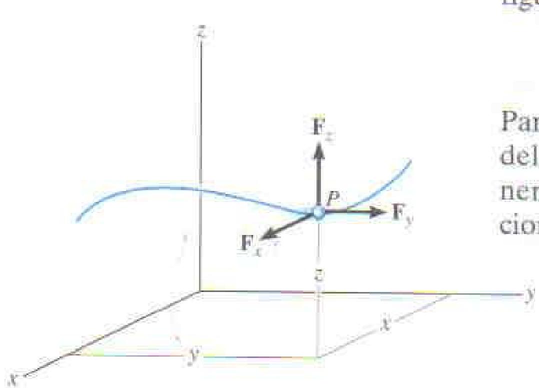



Fig. 13–5

Cuando una partícula se mueve con respecto a un marco de referencia inercial $x, y, z$, las fuerzas que actúan sobre la partícula, así como su aceleración, pueden ser expresadas en términos de sus componentes **i, j, k**, figura 13-5. Aplicando la ecuación de movimiento, tenemos

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$\Sigma F_x\mathbf{i} + \Sigma F_y\mathbf{j} + \Sigma F_z\mathbf{k} = m(a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k})$$

Para que esta ecuación se satisfaga, las respectivas componentes **i, j, k** del lado izquierdo deben ser iguales a las correspondientes componentes del lado derecho. En consecuencia, podemos escribir las tres ecuaciones escalares siguientes:

$$\Sigma F_x = ma_x$$
$$\Sigma F_y = ma_y \qquad (13–7)$$
$$\Sigma F_z = ma_z$$

En particular, si la partícula está restringida a moverse sólo en el plano $x$-$y$, entonces las primeras dos de estas ecuaciones se usan para especificar el movimiento.

### PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

Las ecuaciones de movimiento se usan para resolver problemas que requieren una relación entre las fuerzas que actúan sobre una partícula y el movimiento acelerado que tales fuerzas causan.

*Diagrama de cuerpo libre*

- Seleccione el sistema coordenado inercial. A menudo se eligen coordenadas $x, y, z$ o rectangulares para analizar problemas en los cuales la partícula tiene *movimiento rectilíneo*.
- Una vez establecidas las coordenadas, dibuje el diagrama de cuerpo libre de la partícula. Dibujar este diagrama es *muy importante* ya que proporciona una representación gráfica que toma en cuenta *todas las fuerzas* ($\Sigma\mathbf{F}$) que actúan sobre la partícula, y entonces hace posible resolver esas fuerzas en sus componentes $x, y, z$.
- La dirección y el sentido de la aceleración **a** de la partícula también deben ser establecidos. Si los sentidos de sus componentes son desconocidos, por así convenir matemáticamente, suponga que tienen la *misma dirección* que la de los ejes coordenados inerciales *positivos*.
- La aceleración puede ser representada como el vector $m\mathbf{a}$ en el diagrama cinético.*
- Identifique las incógnitas en el problema.

*En este texto, es una convención usar siempre el diagrama cinético como ayuda gráfica al desarrollar las pruebas y la teoría. En los ejemplos, la aceleración de la partícula o sus componentes serán mostradas con vectores en color azul cerca del diagrama de cuerpo libre.

### *Ecuaciones de movimiento*

- Si las fuerzas pueden ser resueltas directamente a partir del diagrama de cuerpo libre, aplique las ecuaciones de movimiento en su forma de componente escalar.
- Si la geometría del problema parece complicada, lo que a menudo ocurre en tres dimensiones, puede usarse análisis vectorial cartesiano para encontrar la solución.
- *Fricción.* Si una partícula en movimiento está en contacto con una superficie rugosa, puede ser necesario usar la *ecuación de fricción*, la cual relaciona el coeficiente de fricción cinética $\mu_k$ con las magnitudes de las fuerzas de fricción y normal $\mathbf{F}_f$ y $\mathbf{N}$ que actúan en las superficies de contacto, es decir, $F_f = \mu_k N$. Recuerde que en el diagrama de cuerpo libre $\mathbf{F}_f$ siempre actúa oponiéndose al movimiento de la partícula con respecto a la superficie de contacto. Si la partícula está a punto de moverse con movimiento relativo, entonces debe usarse el coeficiente de fricción estática.
- *Resorte.* Si la partícula está conectada a un *resorte elástico* con masa despreciable, la fuerza $F_s$ en el resorte puede ser relacionada con la deformación del resorte mediante la ecuación $F_s = ks$. Aquí, $k$ es la rigidez del resorte medida como una fuerza por unidad de longitud, y $s$ es la elongación o compresión definido como la diferencia entre la longitud deformada $l$ y la longitud no deformada $l_0$, es decir, $s = l - l_0$.

### *Cinemática*

- Si la velocidad o posición de la partícula debe ser encontrada, será necesario aplicar las ecuaciones cinemáticas apropiadas una vez que la aceleración de la partícula sea determinada a partir de $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$.
- Si *la aceleración es una función del tiempo*, use $a = dv/dt$ y $v = ds/dt$ que, al integrar, dan la velocidad y la posición de la partícula.
- Si *la aceleración es una función del desplazamiento*, integre $a\,ds = v\,dv$ para obtener la velocidad como una función de la posición.
- Si *la aceleración es constante*, use $v = v_0 + a_ct$, $s = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}a_ct^2$, $v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$ para determinar la velocidad o posición de la partícula.
- Si el problema implica el movimiento dependiente de varias partículas, use el método presentado en la sección 12.9 para relacionar sus aceleraciones.
- En todos los casos, asegúrese de que las direcciones coordenadas positivas inerciales usadas para escribir las ecuaciones cinemáticas son las mismas que las utilizadas para escribir las ecuaciones de movimiento; de otra manera, la solución simultánea de las ecuaciones será errónea.
- Si la solución de una componente vectorial desconocida da un escalar negativo, ello indica que la componente actúa en dirección opuesta a la que se supuso.

## EJEMPLO 13.1

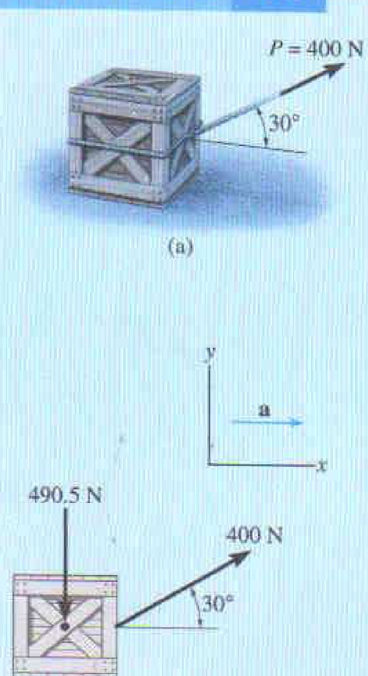



Fig. 13-6

La caja de 50 kg mostrada en la figura 13-6*a* descansa sobre un plano horizontal para el cual el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.3$. Si la caja está sometida a una fuerza de 400 N como se muestra, determine su velocidad en 3 s partiendo del reposo.

### Solución

Usando las ecuaciones de movimiento, podemos relacionar la aceleración de la caja con la fuerza que causa el movimiento. La velocidad de la caja puede entonces ser determinada usando cinemática.

*Diagrama de cuerpo libre.* El peso de la caja es $W = mg = 50$ kg $(9.81 \text{ m/s}^2) = 490.5$ N. Como se muestra en la figura 13-6*b*, la fuerza de fricción tiene una magnitud $F = /_k N_C$ y actúa hacia la izquierda, ya que se opone al movimiento de la caja. Se supone que la aceleración **a** actúa horizontalmente en la dirección $x$ positiva. Hay dos incógnitas, $N_C$ y $a$. (También podemos usar el procedimiento alternativo de dibujar el diagrama de cuerpo libre de la caja y los diagramas cinéticos, figura 13-6*c*, antes de aplicar las ecuaciones de movimiento.)

*Ecuaciones de movimiento.* Usando los datos mostrados en el diagrama de cuerpo libre, tenemos

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = ma_x; \qquad 400 \cos 30^\circ - 0.3N_C = 50a \qquad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = ma_y; \quad N_C - 490.5 + 400 \text{ sen } 30^\circ = 0 \qquad (2)$$

Despejando $N_C$ de la ecuación 2, sustituyendo el resultado en la ecuación 1, y despejando $a$ obtenemos

$$N_C = 290.5 \text{ N}$$

$$a = 5.19 \text{ m/s}^2$$

*Cinemática.* Advierta que la aceleración es *constante*, ya que la fuerza aplicada **P** es constante. Como la velocidad inicial es cero, la velocidad de la caja en 3 s es

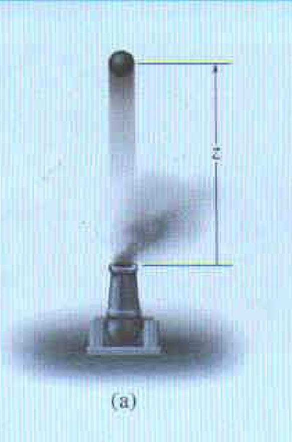
$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad v = v_0 + a_c t$$
$$= 0 + 5.19(3)$$
$$= 15.6 \text{ m/s} \rightarrow \qquad \textit{Resp.}$$

490.5 N
400 N
30°
=
50**a**
F = 0.3 N_C
N_C

(c)

## EJEMPLO 13.2

Un proyectil de 10 kg es disparado verticalmente hacia arriba desde el suelo, con velocidad inicial de 50 m/s, figura 13-7*a*. Determine la altura máxima que alcanzará este proyectil si (a) la resistencia atmosférica es despreciada y (b) la resistencia atmosférica es medida como $F_D = (0.01v^2)$ N, donde $v$ es la rapidez en cualquier instante medida en m/s.

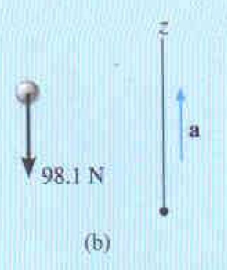


(a)

**Solución**

En ambos casos, la fuerza conocida que actúa sobre el proyectil puede ser relacionada con su aceleración mediante la ecuación de movimiento. La cinemática puede ser usada entonces para relacionar la aceleración con la posición del proyectil.

***Parte (a) Diagrama de cuerpo libre.*** Como se muestra en la figura 13-7*b*, el peso del proyectil es $W = mg = 10(9.81) = 98.1$ N. Supondremos que la aceleración **a** desconocida actúa hacia arriba en la dirección *z positiva.*



(b)

***Ecuación de movimiento***

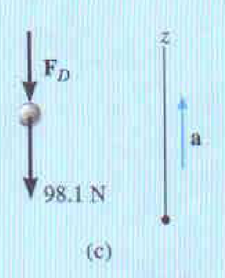
$$+\uparrow \Sigma F_z = ma_z; \qquad -98.1 = 10a, \qquad a = -9.81 \text{ m/s}^2$$

El resultado indica que el proyectil, igual que todo objeto que tenga movimiento de vuelo libre cerca de la superficie de la Tierra, está sometido a una aceleración *constante* hacia abajo de 9.81 m/s$^2$.

***Cinemática.*** Inicialmente, $z_0 = 0$ y $v_0 = 50$ m/s, y a la altura máxima $z = h$, $v = 0$. Como la aceleración es *constante*, entonces

$$(+\uparrow) \qquad v^2 = v_0^2 + 2a_c(z - z_0)$$
$$0 = (50)^2 + 2(-9.81)(h - 0)$$
$$h = 127 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

***Parte (b) Diagrama de cuerpo libre.*** Como la fuerza $F_D = (0.01v^2)$ N tiende a retrasar el movimiento del proyectil hacia arriba, actúa hacia abajo como se muestra en el diagrama de cuerpo libre, figura 13-7*c*.



(c)

Fig. 13-7

***Ecuación de movimiento***

$$+\uparrow \Sigma F_z = ma_z; \qquad -0.01v^2 - 98.1 = 10a, \qquad a = -0.01v^2 - 9.81$$

***Cinemática.*** Aquí la aceleración *no* es *constante* ya que $F_D$ depende de la velocidad. Como $a = f(v)$, podemos relacionar $a$ con la posición usando

$$(+\uparrow)\ a\,dz = v\,dv; \quad (-0.001v^2 - 9.81)\,dz = v\,dv$$

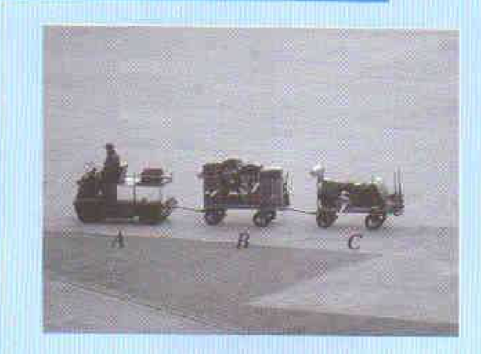
Al separar las variables e integrar, observando que inicialmente $z_0 = 0$, $v_0 = 50$ m/s (positiva hacia arriba), y en $z = h$, $v = 0$, tenemos

$$\int_0^h dz = -\int_{50}^0 \frac{v\,dv}{0.001v^2 + 9.81} = -500\ln(v^2 + 9810)\Big|_{50}^{0}$$
$$h = 114 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

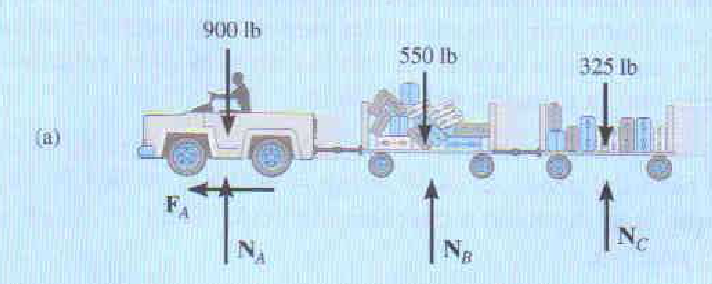
La respuesta indica una elevación menor que la obtenida en la parte (*a*) debido a la resistencia atmosférica.

*Advierta que si el proyectil fuese disparado hacia abajo, con $z$ positiva hacia abajo, la ecuación de movimiento sería entonces $-0.01v^2 + 98.1 = 10a$.

## EJEMPLO 13.3




El camión de equipaje $A$ mostrado en la fotografía tiene un peso de 900 lb y jala un carro $B$ de 550 lb y otro carro $C$ de 325 lb. Por un corto tiempo, la fuerza de fricción desarrollada en las ruedas del camión es $F_A = (40t)$ lb, donde $t$ está en segundos. Si el camión parte del reposo, determine su rapidez en 2 segundos. ¿Cuál es la fuerza horizontal de acoplamiento entre el camión y el carro $B$ en este instante? Desprecie el tamaño del camión y de los carros.




### Solución

***Diagrama de cuerpo libre.*** Como se muestra en la figura 13-8*a*, es la fuerza de fricción impulsiva la que da al camión y a los carros una aceleración. Aquí hemos considerado los tres vehículos.

***Ecuación de movimiento.*** Sólo tiene que ser considerado el movimiento en la dirección horizontal.

$$\stackrel{+}{\leftarrow} \Sigma F_x = ma_x; \qquad 40t = \left(\frac{900 + 550 + 325}{32.2}\right)a$$

$$a = 0.7256t$$

***Cinemática.*** Como la aceleración es una función del tiempo, la velocidad del camión se obtiene usando $a = dv/dt$ con la condición inicial de que $v_0 = 0$ en $t = 0$. Tenemos

$$\int_0^v dv = \int_0^2 0.7256t\, dt; \qquad v = 0.3628t^2\Big|_0^2 = 1.45 \text{ pies/s} \qquad \textit{Resp.}$$

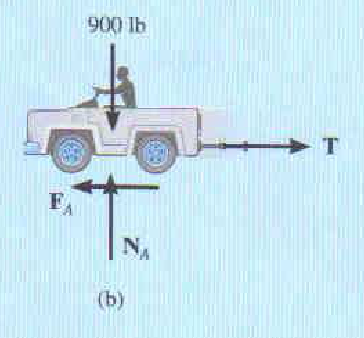



Fig. 13-8

***Diagrama de cuerpo libre.*** Para determinar la fuerza entre el camión y el carro $B$, podemos considerar un diagrama de cuerpo libre del camión de manera que podamos "exponer" la fuerza de acoplamiento **T** como externa al diagrama de cuerpo libre, figura 13-8*b*.

***Ecuación de movimiento.*** Cuando $t = 2$ s, entonces

$$\stackrel{+}{\leftarrow} \Sigma F_x = ma_x; \quad 40(2) - T = \left(\frac{900}{32.2}\right)[0.7256(2)]$$

$$T = 39.4 \text{ lb} \qquad \textit{Resp.}$$

Trate y obtenga este mismo resultado considerando un diagrama de cuerpo libre de los carros $B$ y $C$.

## EJEMPLO 13.4

Un collar liso $C$ de 2 kg, mostrado en la figura 13-9$a$, está unido a un resorte que tiene una rigidez $k = 3$ N/m y longitud no alargada de 0.75 m. Si el collar es liberado del reposo en $A$, determine su aceleración y la fuerza normal de la barra sobre el collar en el instante $y = 1$ m.

(a)

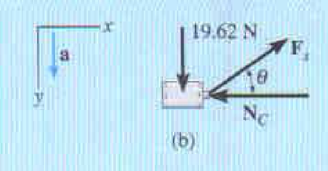
### Solución

***Diagrama de cuerpo libre.*** El diagrama de cuerpo libre del collar cuando está ubicado en la posición arbitraria $y$ se muestra en la figura 13-9$b$. Advierta que el peso es $W = 2(9.81) = 19.62$ N. Además, se *supone* que el collar está acelerando de manera que "**a**" actúa hacia abajo en la dirección $y$ *positiva*. Hay cuatro incógnitas: $N_C$, $F_s$, $a$ y $\theta$.

***Ecuaciones de movimiento***

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = ma_x; \qquad -N_C + F_s \cos\theta = 0 \qquad (1)$$

$$+\downarrow \Sigma F_y = ma_y; \qquad 19.62 - F_s \operatorname{sen}\theta = 2a \qquad (2)$$




(b)

**Fig. 13-9**

A partir de la ecuación 2 se ve que la aceleración depende de la magnitud y la dirección de la fuerza del resorte. Es posible encontrar $N_C$ y $a$ una vez que se conocen $F_s$ y $\theta$.

La magnitud de la fuerza en el resorte es una función de la elongación $s$ que hay en él, es decir, $F_s = ks$. Aquí la longitud sin deformar el resorte es $AB = 0.75$ m, figura 13-9$a$; por tanto, $S = CB - AB = \sqrt{y^2 + (0.75)^2} - 0.75$. Como $k = 3$ N/m, entonces

$$F_s = ks = 3\left(\sqrt{y^2 + (0.75)^2} - 0.75\right) \qquad (3)$$

A partir de la figura 13-9$a$, el ángulo $\theta$ es relacionado con $y$ por trigonometría.

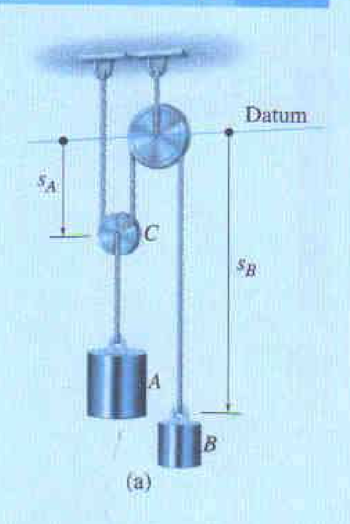
$$\tan\theta = \frac{y}{0.75} \qquad (4)$$

Sustituyendo $y = 1$ m en las ecuaciones 3 y 4 resulta $F_s = 1.50$ N y $\theta = 53.1°$. Estos resultados se sustituyen en las ecuaciones 1 y 2 y obtenemos

$$N_C = 0.900 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

$$a = 9.21 \text{ m/s}^2\downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

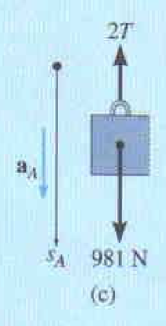
## EJEMPLO 13.5



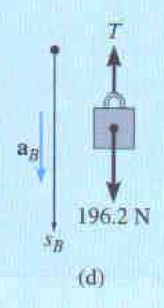
(a)



(b)



(c)



(d)

Fig. 13-10

El bloque $A$ de 100 kg mostrado en la figura 13-10$a$ es liberado del reposo. Si se desprecian las masas de poleas y cuerdas, determine la rapidez del bloque $B$ de 20 kg en 2 s.

### Solución

*Diagramas de cuerpo libre.* Como la masa de las poleas es *despreciada*, entonces, para la polea $C$, $ma = 0$, y podemos aplicar $\Sigma F_y = 0$ como se muestra en la figura 13-10$b$. Los diagramas de cuerpo libre para los bloques $A$ y $B$ se muestran en las figuras 13-10$c$ y $d$, respectivamente. Se puede ver que para que $A$ permanezca estático se requiere $T = 490.5$ N, mientras que para que $B$ permanezca estático se requiere $T = 196.2$ N. Por tanto, $A$ se moverá hacia abajo mientras $B$ sube. Aquí *supondremos* que ambos bloques aceleran hacia abajo, en la dirección de $+s_A$ y $+s_B$. Las tres incógnitas son $T$, $a_A$ y $a_B$.

*Ecuaciones de movimiento.*

Bloque $A$ (Fig. 13-10$c$):

$$+\downarrow \Sigma F_y = ma_y; \qquad 981 - 2T = 100a_A \tag{1}$$

Bloque $B$ (Fig. 13-10$d$):

$$+\downarrow \Sigma F_y = ma_y; \qquad 196.2 - T = 20a_B \tag{2}$$

*Cinemática.* La tercera ecuación necesaria se obtiene relacionando $a_A$ con $a_B$ mediante un análisis de movimiento dependiente. Usando el procedimiento desarrollado en la sección 12.9, las coordenadas $s_A$ y $s_B$ miden las posiciones de $A$ y $B$ desde el datum fijo, figura 13-10$a$. Se ve que

$$2s_A + s_B = l$$

donde $l$ es constante y representa la longitud vertical total de cuerda. Diferenciando esta expresión dos veces con respecto al tiempo resulta

$$2a_A = -a_B \tag{3}$$

Advierta que al escribir las ecuaciones 1, 2 y 3, la *dirección positiva se supuso siempre hacia abajo*. Es muy importante ser *consistente* en esta suposición ya que estamos buscando una solución simultánea de ecuaciones. La solución resulta en

$$T = 327.0 \text{ N}$$
$$a_A = 3.27 \text{ m/s}^2$$
$$a_B = -6.54 \text{ m/s}^2$$

Por tanto, cuando el bloque $A$ acelera *hacia abajo*, el bloque $B$ acelera *hacia arriba*. Como $a_B$ es constante, la velocidad del bloque $B$ en 2 s es entonces

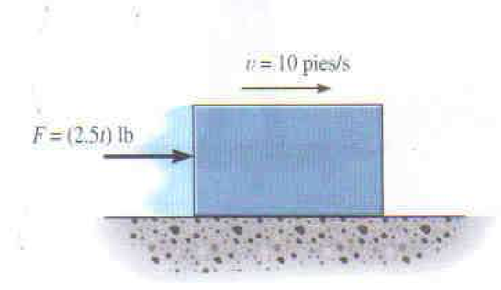
$$(+\downarrow) \qquad v = v_0 + a_B t$$
$$= 0 + (-6.54)(2)$$
$$= -13.1 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

El signo negativo indica que el bloque $B$ se está moviendo hacia arriba.

# PROBLEMAS

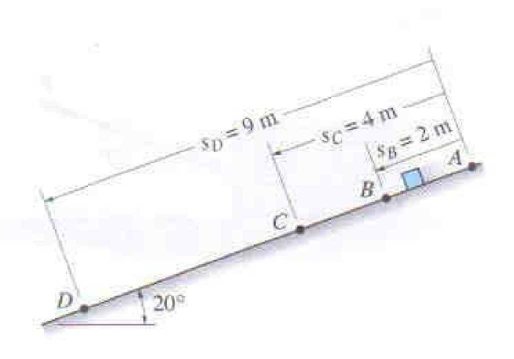
**13-1.** La Luna tiene una masa de $73.5(10^{21})$ kg y la Tierra tiene una masa de $5.98(10^{24})$ kg. Si sus centros están a $384(10^6)$ m, determine la fuerza de atracción gravitatoria entre los dos cuerpos.

**13-2.** El bloque de 10 lb tiene velocidad inicial de 10 pies/s sobre el plano liso. Si una fuerza $F = (2.5t)$ lb, donde $t$ está en segundos, actúa sobre el bloque por 3 s, determine la velocidad final del bloque y la distancia que recorre durante este tiempo.




Prob. 13–2

**13-3.** Usando un plano inclinado para retardar el movimiento de caída de un objeto, y efectuar así las observaciones más precisas, Galileo pudo determinar experimentalmente que la distancia que un objeto recorre en caída libre es proporcional al cuadrado del tiempo de viaje. Demuestre que este es el caso, es decir, $s \propto t^2$, determinando el tiempo $t_B$, $t_C$ y $t_D$ necesario para que un bloque de masa $m$ se deslice desde el reposo en $A$ hasta los puntos $B$, $C$ y $D$, respectivamente. Desprecie los efectos de la fricción.



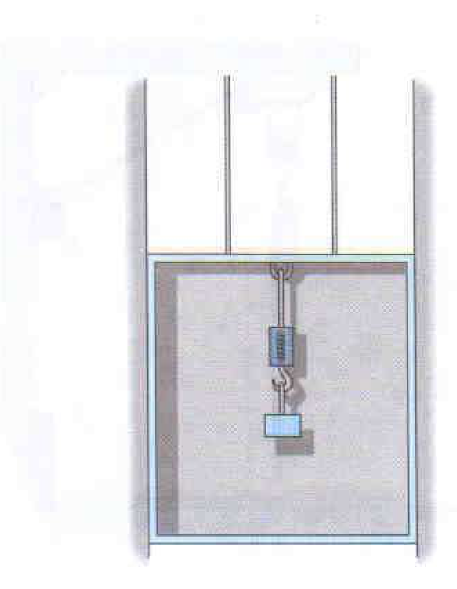

Prob. 13–3

***13-4.** La camioneta va viajando a 20 km/h cuando el cople del remolque colocado en $A$ falla. Si el remolque tiene una masa de 250 kg y viaja libremente 45 m antes de detenerse, determine la fuerza horizontal constante $F$ creada por la fricción de rodamiento que causa que el remolque se detenga.




Prob. 13–4

**13-5.** Un bloque con masa de 2 kg es colocado sobre una balanza de resorte ubicada en un elevador que se mueve hacia abajo. Si la lectura de la balanza, la cual la fuerza en el resorte, es de 20 N, determine la aceleración del elevador. Desprecie la masa de la balanza.



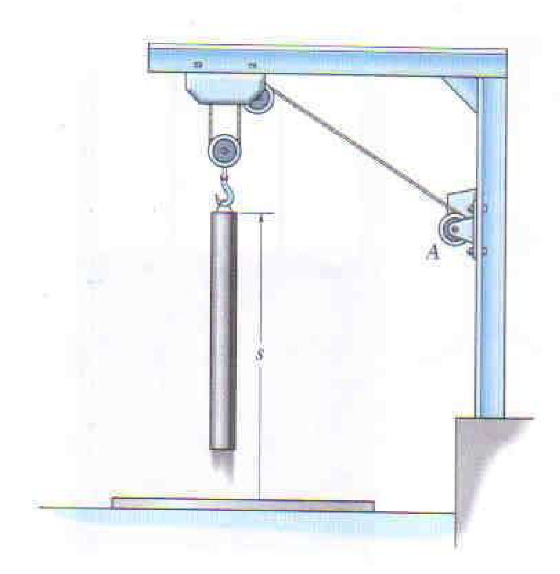
Prob. 13–5

13-6. El camión de equipajes $A$ tiene una masa de 800 kg y se usa para jalar los dos carros, cada carro tiene masa de 300 kg. Si la fuerza $F$ de tracción sobre el camión es $F = 480$ N, determine la aceleración inicial del camión. ¿Cuál es la aceleración del camión si el acoplamiento en $C$ falla repentinamente? Las ruedas del carro pueden rodar libremente. Desprecie la masa de las ruedas.



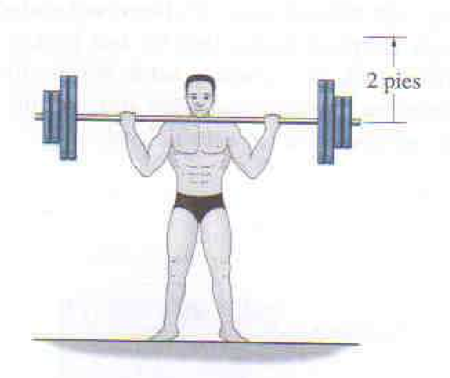

Prob. 13–6

13-7. El depósito de combustible de 500 kg para un reactor nuclear está siendo levantado desde el núcleo del reactor usando el sistema de poleas mostrado. El depósito es levantado con una aceleración constante de manera que $s = 0$ y $v = 0$ cuando $t = 0$, y $s = 2.5$ m cuando $t = 1.5$ s. Determine la tensión en el cable colocado en $A$ durante el movimiento.

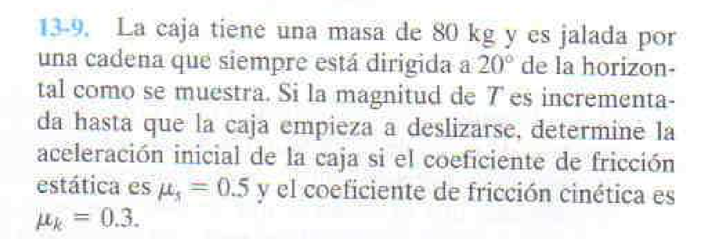



Prob. 13–7

*13-8. El hombre pesa 180 lb y sostiene las pesas de 100 lb. Si las levanta 2 pies en el aire en 1.5 s partiendo del reposo, determine la reacción de *ambas* piernas sobre el suelo durante el levantamiento. Suponga que el movimiento es con aceleración uniforme.

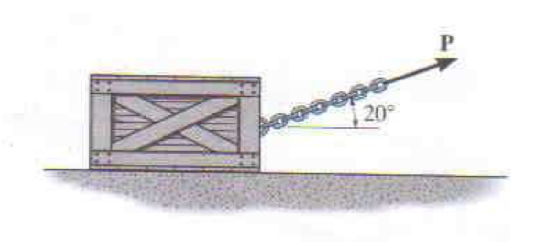



Prob. 13–8



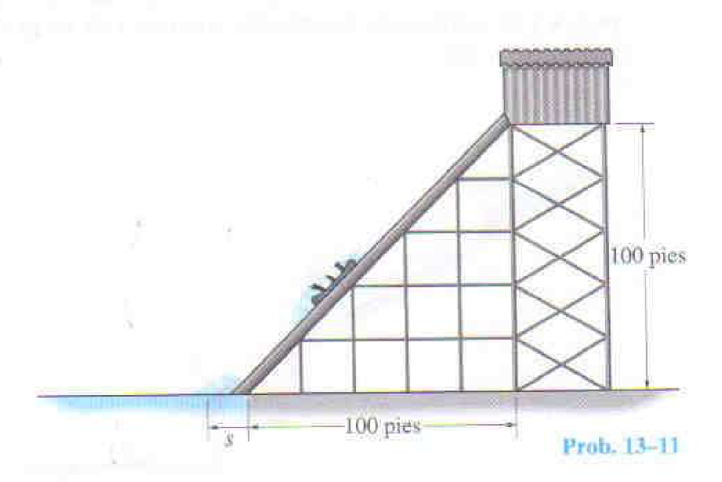
13-9. La caja tiene una masa de 80 kg y es jalada por una cadena que siempre está dirigida a 20° de la horizontal como se muestra. Si la magnitud de $T$ es incrementada hasta que la caja empieza a deslizarse, determine la aceleración inicial de la caja si el coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.5$ y el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.3$.

13-10. La caja tiene una masa de 80 kg y es jalada por una cadena que siempre está dirigida a 20° de la horizontal como se muestra. Determine la aceleración de la caja en $t = 2$ s si el coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.4$, el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.3$ y la fuerza de arrastre es $T = (90t^2)$ N, donde $t$ está en segundos.



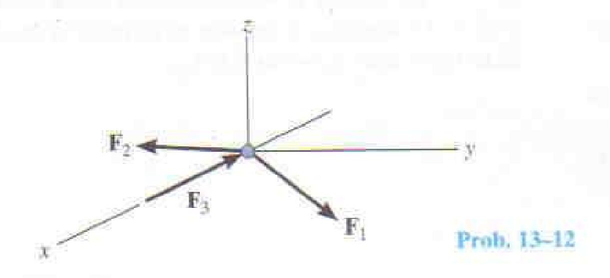

Probs. 13–9/10

**13-11.** El juego en el parque acuático consta de un carruaje de 800 lb que resbala del reposo por el plano inclinado y llega al estanque. Si la resistencia por fricción sobre el plano inclinado es $F_r = 30$ lb y en el estanque, por una corta distancia, $F_r = 80$ lb, determine qué tan rápido viaja el carruaje cuando $s = 5$ pies.



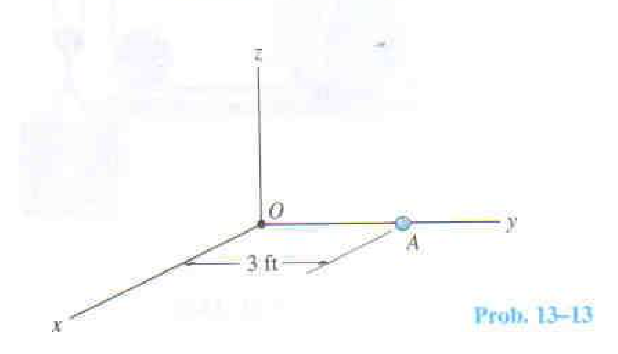

Prob. 13-11

***13-12.** La partícula de 6 lb está sometida a la acción de su peso y de las fuerzas $\mathbf{F}_1 = \{2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2t\mathbf{k}\}$ lb, $\mathbf{F}_2 = \{t^2\mathbf{i} - 4t\mathbf{j} - 1\mathbf{k}\}$ lb, y $\mathbf{F}_3 = \{-2t\mathbf{i}\}$ lb, donde $t$ está en segundos. Determine la distancia a que está la partícula del origen 2 s después de ser liberada del reposo.



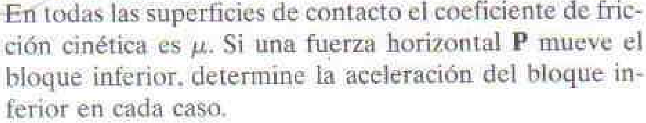

Prob. 13-12

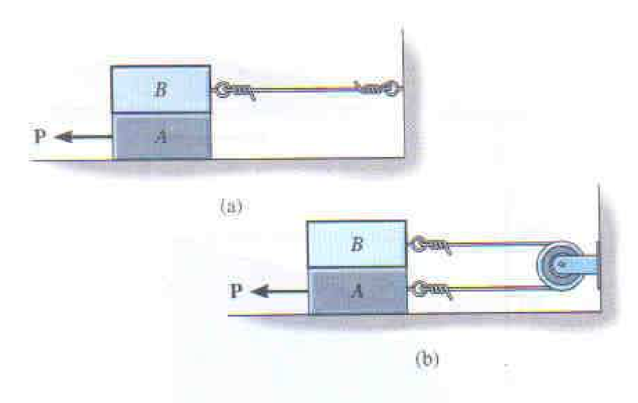
**13-13.** Sobre la partícula $A$ de 2 lb actúan su peso y el sistema de fuerzas $\mathbf{F}_1 = \{2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}\}$ lb, $\mathbf{F}_2 = \{3\mathbf{i} - 1\mathbf{k}\}$ lb, y $\mathbf{F}_3 = \{1\mathbf{i} - t^2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}\}$ lb, donde $t$ está en segundos. Determine la distancia a que está la partícula del origen 3 s después que ha sido liberada del reposo.




Prob. 13-13

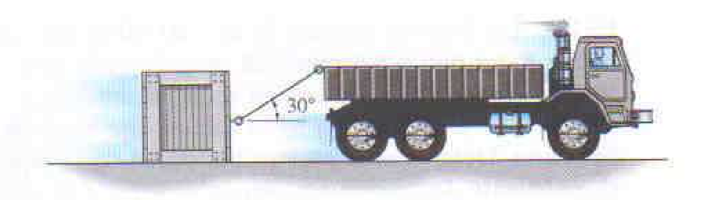
**13-14.** Cada uno de los dos bloques tiene una masa $m$. En todas las superficies de contacto el coeficiente de fricción cinética es $\mu$. Si una fuerza horizontal **P** mueve el bloque inferior, determine la aceleración del bloque inferior en cada caso.





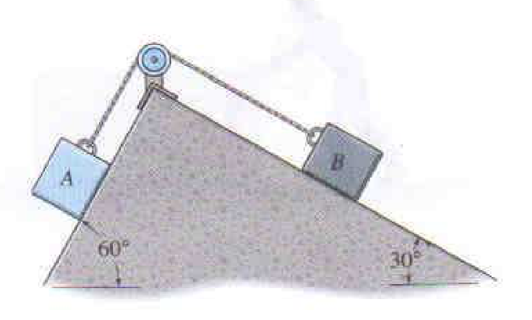

Prob. 13-14

**13-15.** El conductor del camión intenta jalar la caja usando una cuerda que tiene una resistencia a la tensión de 200 lb. Si originalmente la caja está en reposo y pesa 500 lb, determine la aceleración más grande que puede tener si el coeficiente de fricción estática entre la caja y el camino es $\mu_s = 0.4$, y el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.3$.



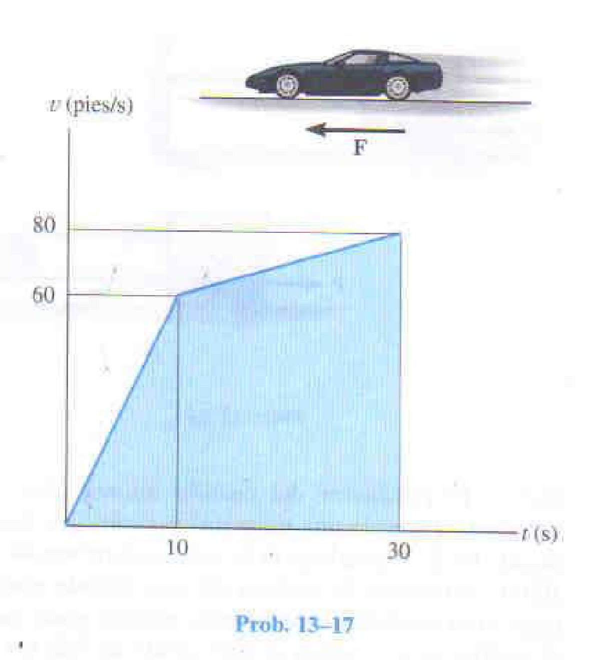

Prob. 13-15

***13-16.** El plano inclinado doble soporta dos bloques $A$ y $B$, cada uno con peso de 10 lb. Si el coeficiente de fricción cinética entre los bloques y el plano es $\mu_k = 0.1$, determine la aceleración de cada bloque.



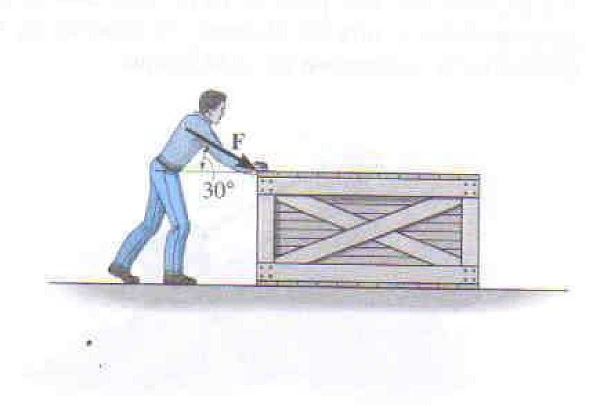

Prob. 13-16

**13-17.** La rapidez del carro deportivo de 3500 lb está graficada sobre el periodo de tiempo de 30 s. Grafique la variación de la fuerza de tracción **F** necesaria para producir el movimiento.

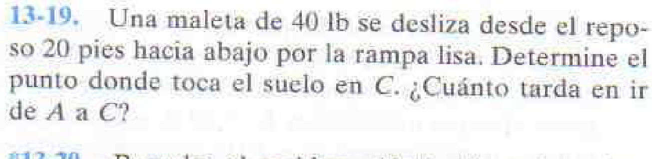



Prob. 13–17

**13-18.** Un hombre empuja la caja de 60 lb con una fuerza **F**. La fuerza siempre está dirigida hacia abajo a 30° con respecto a la horizontal como se muestra, y su magnitud es incrementada hasta que la caja empieza a deslizarse. Determine la aceleración inicial de la caja si el coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.6$ y el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.3$.

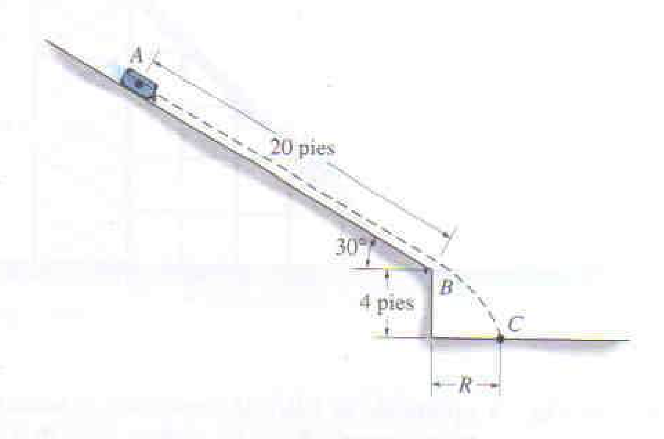



Prob. 13–18



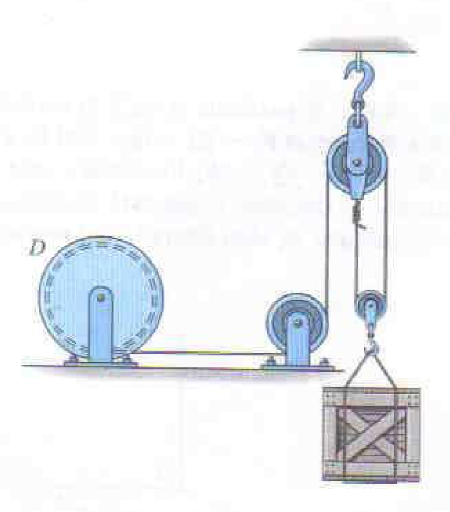
**13-19.** Una maleta de 40 lb se desliza desde el reposo 20 pies hacia abajo por la rampa lisa. Determine el punto donde toca el suelo en *C*. ¿Cuánto tarda en ir de *A* a *C*?

***13-20.** Resuelva el problema 13-19 si la maleta tiene velocidad inicial hacia abajo, por la rampa, de $v_A = 10$ pies/s y el coeficiente de fricción cinética a lo largo de *AB* es $\mu_k = 0.2$.



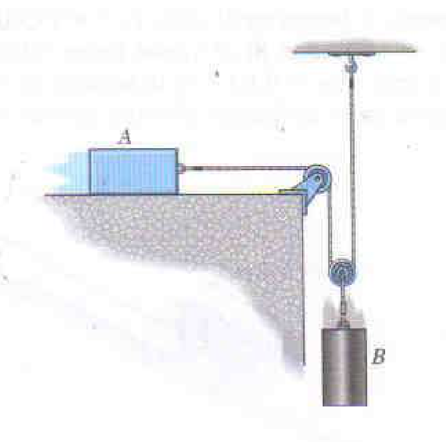

Probs. 13–19/20

**13-21.** El tambor *D* está jalando el cable a una razón de 5 m/s². Determine la tensión en el cable si la caja suspendida tiene una masa de 800 kg.



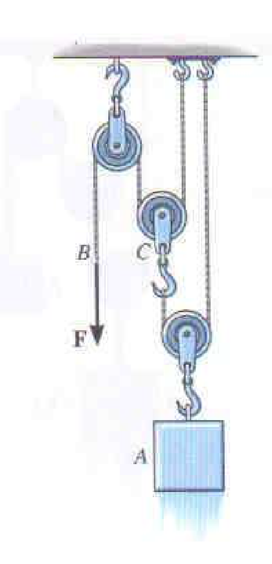

Prob. 13–21

**13-22.** El bloque $A$ de 10 lb viaja hacia la derecha a $v_A = 2$ pies/s en el instante mostrado. Si el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.2$ entre la superficie y $A$, determine la velocidad de $A$ cuando el bloque se ha movido 4 pies. El bloque $B$ tiene un peso de 20 lb.



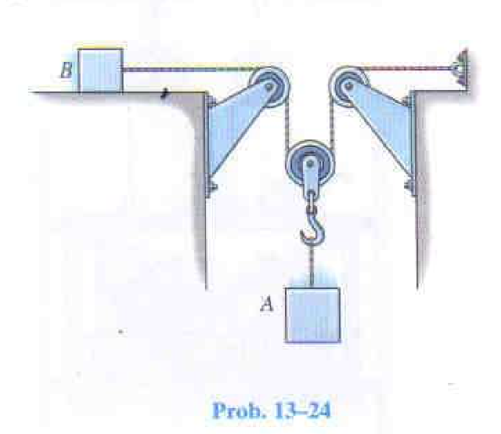

Prob. 13–22

**13-23.** Una fuerza $F = 15$ lb es aplicada a la cuerda. Determine qué tan alto se levanta el bloque $A$ de 30 lb en 2 s partiendo del reposo. Desprecie el peso de poleas y cuerda.



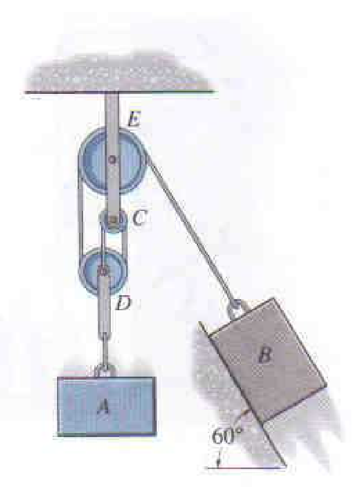

Prob. 13–23

***13-24.** En un instante dado el bloque $A$ de 10 lb se está moviendo hacia abajo con rapidez de 6 pies/s. Determine su rapidez 2 s después. El bloque $B$ tiene un peso de 4 lb y el coeficiente de fricción cinética entre él y el plano horizontal es $\mu_k = 0.2$. Desprecie la masa de poleas y cuerda.



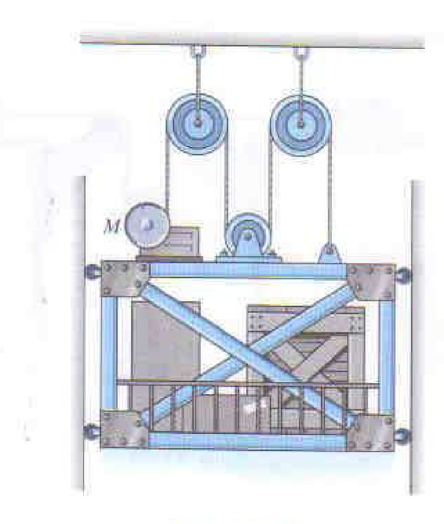

Prob. 13–24

**13-25.** Determine la masa requerida del bloque $A$ de manera que cuando sea liberado del reposo, mueva el bloque $B$ de 5 kg 0.75 m hacia arriba a lo largo del plano inclinado liso en $t = 2$ s. Desprecie la masa de poleas y cuerdas.



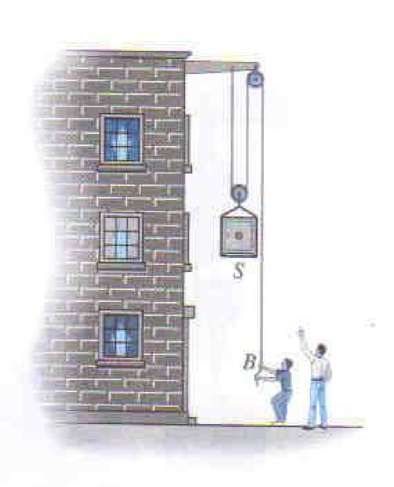

Prob. 13–25

**13-26.** Un elevador de carga, incluyendo ésta, tiene una masa de 500 kg. Se impide que gire usando la vía y las ruedas montadas a los lados. Partiendo del reposo, en $t = 2$ s, el motor $M$ tira del cable con rapidez de 6 m/s, *medida con respecto al elevador*. Determine la aceleración constante del elevador y la tensión en el cable. Desprecie la masa de poleas y cables.

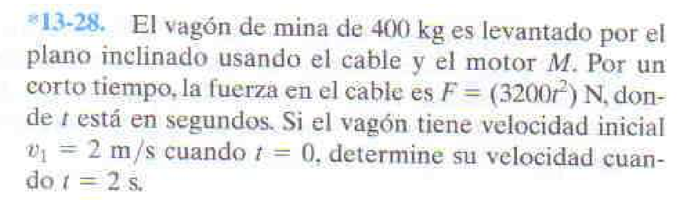



Prob. 13–26

**13-27.** La caja fuerte $S$ tiene un peso de 200 lb y está sostenida mediante el arreglo de cuerda y poleas mostrado. Si el extremo de la cuerda es dado a un niño $B$ de 90 lb de peso, determine su aceleración si en la confusión el niño no suelta la cuerda. Desprecie la masa de poleas y cuerda.

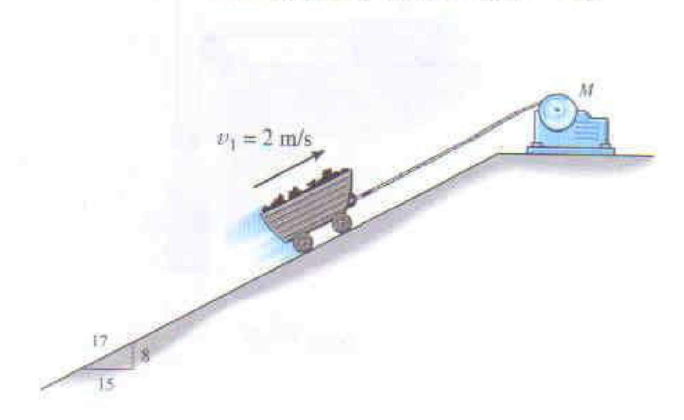



Prob. 13–27



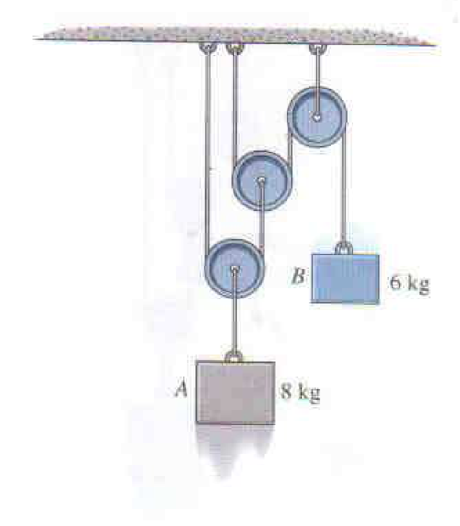
***13-28.** El vagón de mina de 400 kg es levantado por el plano inclinado usando el cable y el motor $M$. Por un corto tiempo, la fuerza en el cable es $F = (3200t^2)$ N, donde $t$ está en segundos. Si el vagón tiene velocidad inicial $v_1 = 2$ m/s cuando $t = 0$, determine su velocidad cuando $t = 2$ s.

**13-29.** El vagón de mina de 400 kg es levantado por el plano inclinado usando el cable y el motor $M$. Por un corto tiempo, la fuerza en el cable es $F = (3200t^2)$ N, donde $t$ está en segundos. Si el vagón tiene velocidad inicial $v_1 = 2$ m/s en $s = 0$ y $t = 0$, determine la distancia que se mueve hacia arriba por el plano cuando $t = 2$ s.



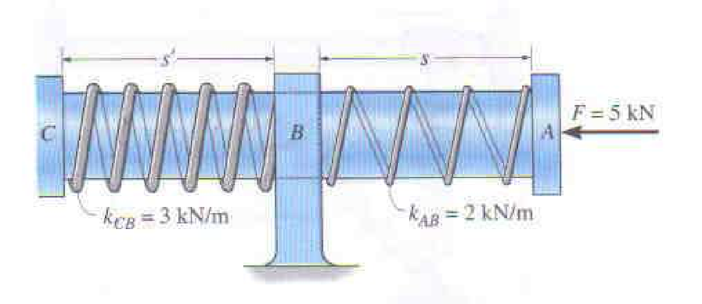

Probs. 13–28/29

**13-30.** Determine la tensión desarrollada en las cuerdas unidas a cada bloque y la aceleración de los bloques. Desprecie la masa de poleas y cuerdas.



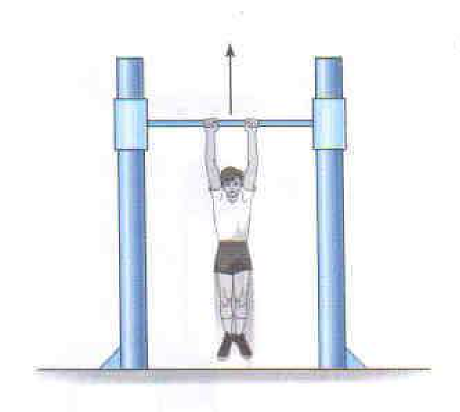

Prob. 13–30

**13-31.** La flecha *CA* de 2 kg pasa por una chumacera lisa colocada en *B*. Inicialmente los resortes, enrollados con holgura alrededor de la flecha, no están estirados si ninguna fuerza es aplicada a la flecha. En esta posición $s = s' = 250$ mm y la flecha está originalmente en reposo. Si una fuerza horizontal de $F = 5$ kN es aplicada, determine la rapidez de la flecha en el instante $s = 50$ mm, $s' = 450$ mm. Los extremos de los resortes están unidos a la chumacera colocada en *B* y a las tapas en *C* y *A*.




Prob. 13-31

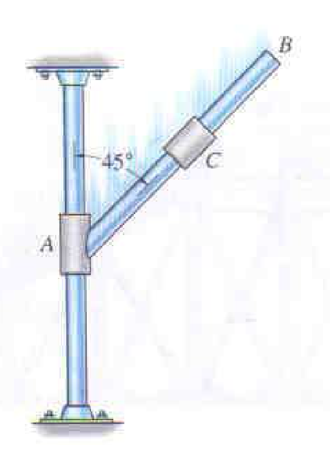
**13-34.** El niño con peso de 80 lb cuelga uniformemente de la barra. Determine la fuerza en cada uno de sus brazos en $t = 2$ s si la barra se está moviendo hacia arriba con (a) velocidad constante de 3 pies/s, y (b) rapidez de $v = (4t^2)$ pies/s, donde $t$ está en segundos.



Prob. 13-34

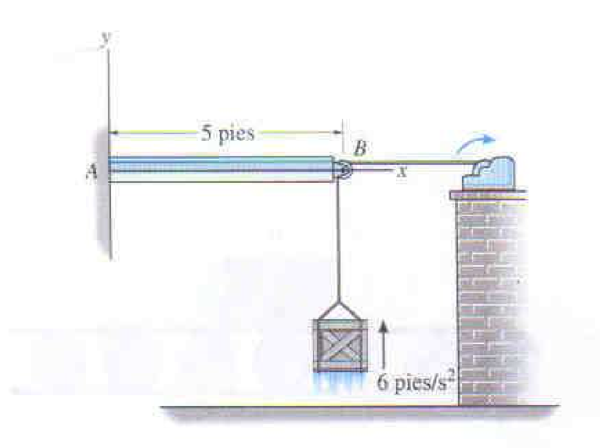
***13-32.** El collar *C* de 2 kg puede deslizarse libremente a lo largo de la flecha lisa *AB*. Determine la aceleración del collar *C* si (a) la flecha está fija, (b) el collar *A*, que está fijo a la flecha *AB*, se mueve hacia abajo con velocidad constante a lo largo de la barra vertical, y (c) el collar está sometido a una aceleración hacia abajo de 2 m/s$^2$. En todos los casos, el collar se mueve en el plano.

**13-33.** El collar *C* de 2 kg puede deslizarse libremente a lo largo de la flecha lisa *AB*. Determine la aceleración del collar *C* si el collar *A* está sometido a una aceleración hacia arriba de 4 m/s$^2$.



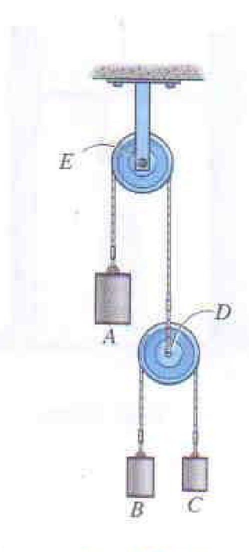

Probs. 13-32/33

**13-35.** La caja de 30 lb está siendo levantada con aceleración constante de 6 pies/s$^2$. Si la viga uniforme *AB* tiene un peso de 200 lb, determine las componentes de la reacción en *A*. Desprecie el tamaño y la masa de la polea colocada en *B*. *Sugerencia*: Encuentre primero la tensión en el cable, y luego analice las fuerzas en la viga usando estática.



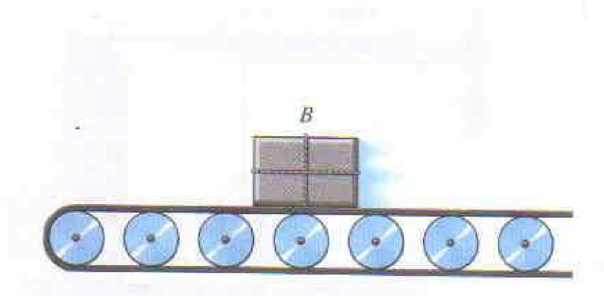

Prob. 13-35

***13-36.** Si los cilindros $B$ y $C$ tienen una masa de 15 y 10 kg, respectivamente, determine la masa requerida en $A$ de manera que no se mueva cuando todos los cilindros son liberados. Desprecie la masa de poleas y cuerdas.



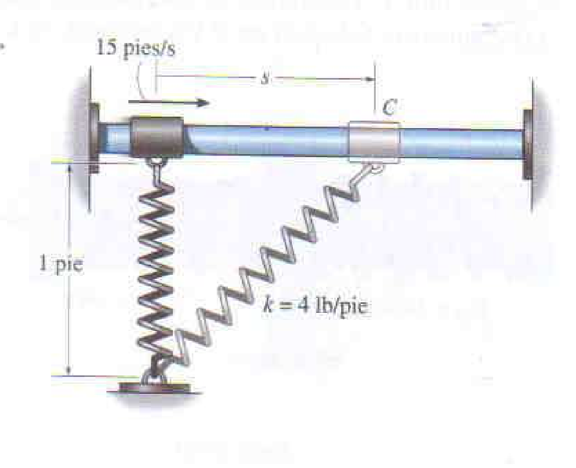

**Prob. 13-36**

**13-37.** La banda transportadora se mueve a 4 m/s. Si el coeficiente de fricción estática entre la banda y el paquete $B$ de 10 kg es $\mu_s = 0.2$, determine el tiempo más corto en que la banda puede detenerse sin que el paquete se deslice sobre ella.



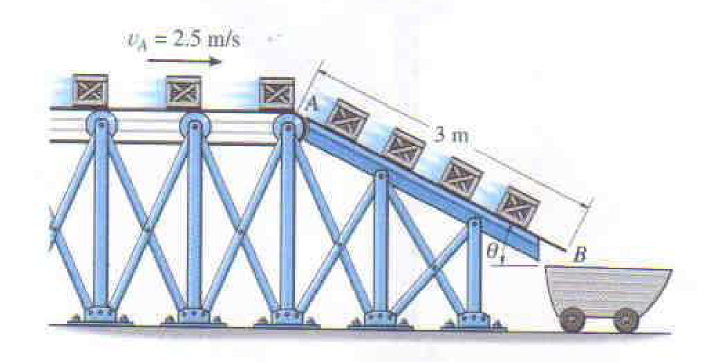

**Prob. 13-37**

**13-38.** El collar $C$ de 2 lb se ajusta con holgura sobre la flecha lisa. Si el resorte no está estirado cuando $s = 0$ y al collar se le da una velocidad de 15 pies/s, determine la velocidad del collar cuando $s = 1$ pie.



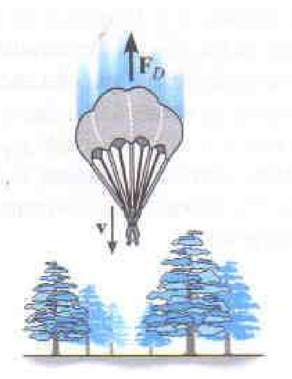

**Prob. 13-38**

**13-39.** La banda transportadora entrega cada caja de 12 kg a la rampa situada en $A$ de manera tal que la rapidez de la caja es $v_A = 2.5$ m/s, dirigida hacia abajo *a lo largo de* la rampa. Si el coeficiente de fricción cinética entre cada caja y la rampa es $\mu_k = 0.3$, determine la rapidez con que cada caja se desliza fuera de la rampa en el punto $B$. Suponga que no ocurre ninguna volcadura. Considere $\theta = 30°$.



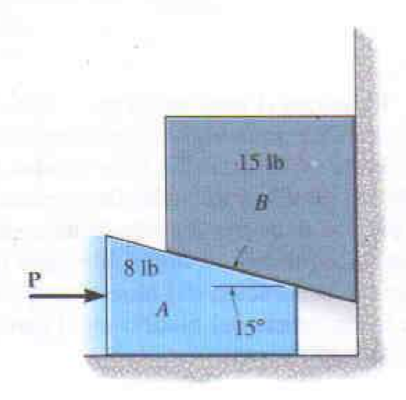

**Prob. 13-39**

*13-40. Un paracaidista con masa $m$ abre su paracaídas desde una posición en reposo a altitud muy elevada. Si la resistencia atmosférica es $F_D = kv^2$, donde $k$ es una constante, determine su velocidad cuando ha caído un tiempo $t$. ¿Cuál es su velocidad cuando aterriza sobre el terreno? Esta velocidad se llama *velocidad terminal*, la cual se calcula haciendo que el tiempo de caída $t \to \infty$.




Prob. 13-40

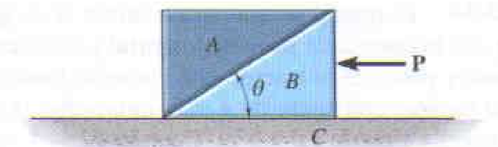
13-41. Si una fuerza horizontal $P = 12$ lb es aplicada al bloque $A$, determine la aceleración del bloque $B$. Desprecie la fricción.




Prob. 13-41

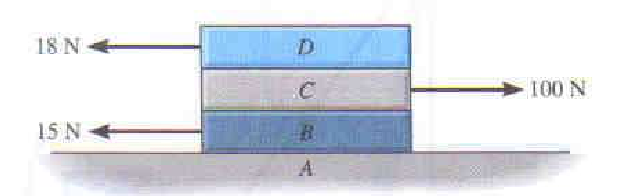
13-42. Los bloques A y B tienen cada uno masa $m$. Determine la fuerza $P$ horizontal más grande que puede ser aplicada a $B$ de manera que $A$ no se mueva con respecto a $B$. Todas las superficies son lisas.

13-43. Los bloques $A$ y $B$ tienen cada uno masa $m$. Determine la fuerza $P$ horizontal más grande que puede aplicarse a $B$ de manera que $A$ no resbale hacia arriba por $B$. El coeficiente de fricción estática entre $A$ y $B$ es $\mu_s$. Desprecie cualquier fricción entre $B$ y $C$.



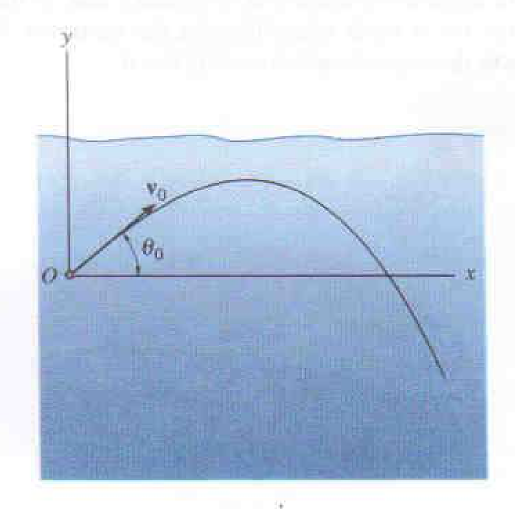

Probs. 13-42/43

*13-44. Cada una de las tres placas tiene una masa de 10 kg. Si los coeficientes de fricción estática y cinética en cada superficie de contacto son $\mu_s = 0.3$ y $\mu_k = 0.2$, respectivamente, determine la aceleración de cada placa cuando se aplican las tres fuerzas horizontales.




Prob. 13-44

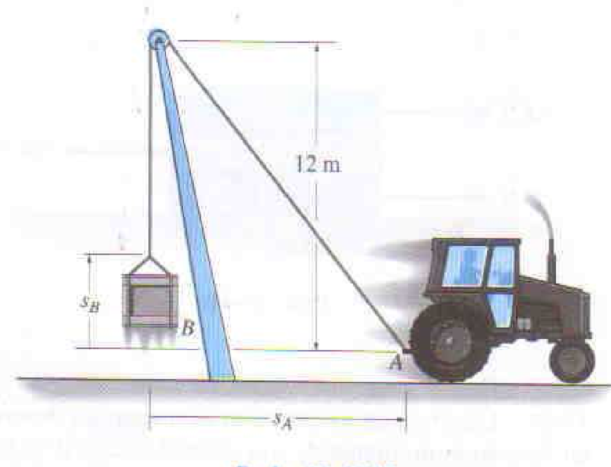
13-45. Un proyectil de masa $m$ es disparado dentro de un líquido a un ángulo $\theta_0$ con velocidad inicial $\mathbf{v}_0$ como se muestra. Si el líquido desarrolla una resistencia de fricción sobre el proyectil que es proporcional a su velocidad, esto es, $F = kv$, donde $k$ es una constante, determine las componentes $x$ y $y$ de la posición del proyectil en cualquier instante. ¿Cuál es la distancia máxima $x_{máx}$ que viaja el proyectil?




Prob. 13-45

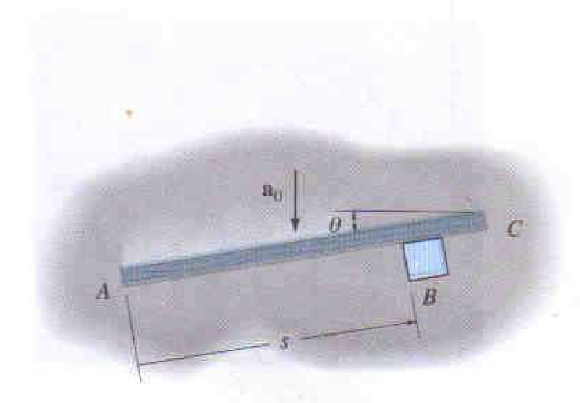
■13-46. El tractor se usa para levantar la carga $B$ de 150 kg con la cuerda de 24 m de longitud y el sistema de pescante y polea. Si el tractor está viajando hacia la derecha con rapidez constante de 4 m/s, determine la tensión en la cuerda cuando $s_A = 5$ m. Cuando $s_A = 0$, $s_B = 0$.

13-47. El tractor se usa para levantar la carga $B$ de 150 kg con la cuerda de 24 m de longitud y el sistema de pescante y polea. Si el tractor está viajando hacia la derecha con aceleración de 3 m/s² y tiene velocidad de 4 m/s en el instante $s_A = 5$ m, determine la tensión en la cuerda en este instante. Cuando $s_A = 0$, $s_B = 0$.




Probs. 13–46/47

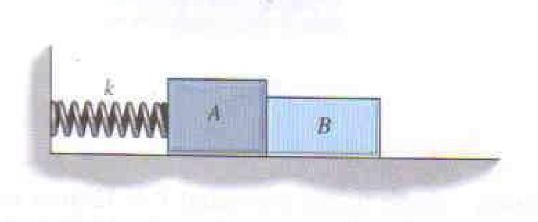
*13-48. El bloque liso $B$ de tamaño insignificante tiene una masa $m$ y reposa sobre el plano horizontal. Si la tabla $AC$ empuja sobre el bloque en un ángulo $\theta$ con aceleración constante $\mathbf{a}_0$, determine la velocidad del bloque a lo largo de la tabla y la distancia $s$ que se mueve a lo largo de la tabla como función del tiempo $t$. El bloque parte del reposo cuando $s = 0$, $t = 0$.




Prob. 13–48

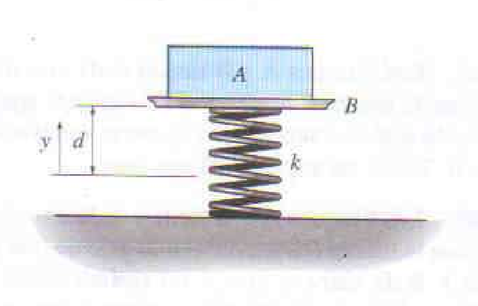
13-49. El bloque $A$ tiene masa $m_A$ y está unido a un resorte con rigidez $k$ y longitud no alargada $l_0$. Si otro bloque $B$, con masa $m_B$, es empujado contra $A$ de modo que el resorte se deforma una distancia $d$, determine la distancia que ambos bloques se deslizan sobre la superficie lisa antes de que empiecen a separarse. ¿Cuál es su velocidad en este instante?

13-50. El bloque $A$ tiene masa $m_A$ y está unido a un resorte con rigidez $k$ y longitud no alargada $l_0$. Si otro bloque $B$, con masa $m_B$, es empujado contra $A$ de modo que el resorte se deforma una distancia $d$, demuestre que para que ocurra la separación entre ellos es necesario que $d > 2\mu_k g(m_A + m_B)/k$, donde $\mu_k$ es el coeficiente de fricción cinética entre los bloques y el suelo. ¿Cuál es la distancia que los bloques se deslizan sobre la superficie antes de separarse?




Probs. 13–49/50

13-51. El bloque $A$ tiene masa $m_A$ y reposa sobre el platillo $B$ que tiene masa $m_B$. Ambos bloques están sostenidos mediante un resorte que tiene rigidez $k$ y está unido al fondo del platillo y al suelo. Determine la distancia $d$ que el platillo debe ser empujado hacia abajo desde la posición de equilibrio y luego liberado del reposo de modo que la separación del bloque tenga lugar con respecto a la superficie del platillo en el instante en que el resorte no está estirado.




Prob. 13–51

## 13.5 Ecuaciones de movimiento: Coordenadas normal y tangencial

Cuando una partícula se mueve sobre una trayectoria curva conocida, la ecuación de movimiento de la partícula puede ser escrita en las direcciones tangencial, normal y binormal. Tenemos

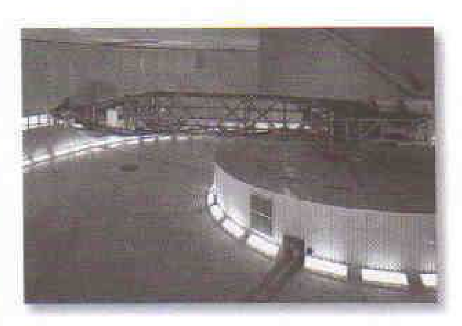
$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$\Sigma F_t \mathbf{u}_t + \Sigma F_n \mathbf{u}_n + \Sigma F_b \mathbf{u}_b = m\mathbf{a}_t + m\mathbf{a}_n$$

Aquí, $\Sigma F_t$, $\Sigma F_n$, $\Sigma F_b$ representan las sumas de todas las componentes de fuerza que actúan sobre la partícula en las direcciones tangencial, normal y binormal, respectivamente, figura 13-11. Advierta que no hay movimiento de la partícula en la dirección binormal, ya que la partícula está restringida a moverse a lo largo de la trayectoria. La ecuación anterior es satisfecha si

$$\begin{aligned} \Sigma F_t &= ma_t \\ \Sigma F_n &= ma_n \\ \Sigma F_b &= 0 \end{aligned} \qquad (13\text{–}8)$$

Recuerde que $a_t (= dv/dt)$ representa la razón de cambio con respecto al tiempo de la magnitud de la velocidad. En consecuencia, si $\Sigma \mathbf{F}_t$ actúa en la dirección del movimiento, la rapidez de la partícula aumentará, mientras que si actúa en la dirección opuesta la partícula disminuirá su rapidez. Igualmente, $a_n$ $(= v^2/\rho)$ representa la razón de cambio con respecto al tiempo de la dirección de la velocidad. Como este vector *siempre* actúa en la dirección $n$ positiva, es decir, hacia el centro de curvatura de la trayectoria, entonces $\Sigma \mathbf{F}_n$, la cual genera $\mathbf{a}_n$, actúa también en esta dirección. Por ejemplo, cuando la partícula está restringida a viajar en una trayectoria circular con rapidez constante, existe una fuerza normal ejercida sobre la partícula por la restricción para cambiar la dirección de la velocidad ($\mathbf{a}_n$) de la partícula. Como esta fuerza siempre está dirigida hacia el centro de la trayectoria, se le llama a menudo *fuerza centrípeta*.



La centrífuga se usa para someter a un pasajero a aceleraciones normales muy grandes causadas por grandes rotaciones. Observe que esas aceleraciones son causadas por la fuerza normal desbalanceada ejercida sobre el pasajero por el asiento de la centrífuga.

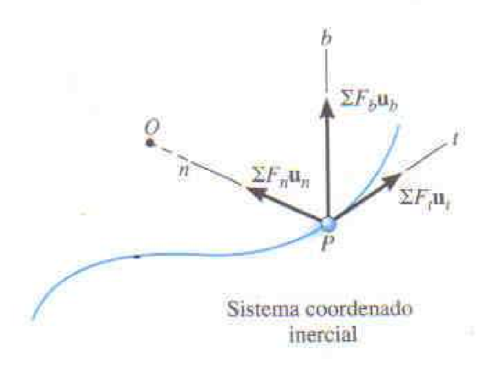



Fig. 13–11

## PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

Cuando un problema implica el movimiento de una partícula por una *trayectoria curva conocida*, las coordenadas normal y tangencial deben ser consideradas para el análisis ya que las componentes de la aceleración pueden ser fácilmente formuladas. El método para aplicar las ecuaciones de movimiento, las cuales relacionan las fuerzas con la aceleración, fue delineado en el procedimiento dado en la sección 13.4. Específicamente, para coordenadas $t, n, b$ este método puede ser descrito como sigue:

### *Diagrama de cuerpo libre*

- Establezca el sistema coordenado inercial $t, n, b$ en la partícula y dibuje el diagrama de cuerpo libre de la partícula.
- La aceleración normal $\mathbf{a}_n$ de la partícula *siempre* actúa en la dirección $n$ positiva.
- Si la aceleración tangencial $\mathbf{a}_t$ es desconocida, suponga que actúa en la dirección $t$ positiva.
- Identifique las incógnitas en el problema.

### *Ecuaciones de movimiento*

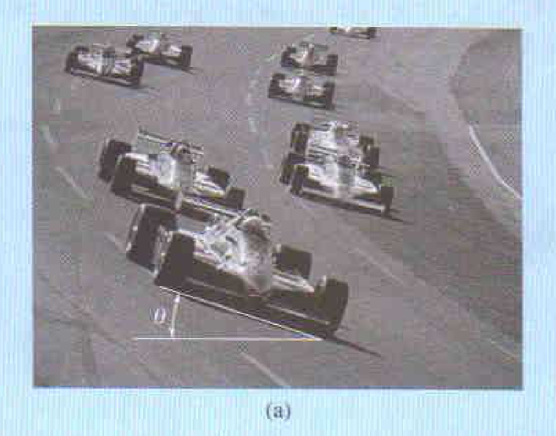
- Aplique las ecuaciones de movimiento, ecuaciones 13-8.

### *Cinemática*

- Formule las componentes tangencial y normal de la aceleración, esto es, $a_t = dv/dt$ o $a_t = v\,dv/ds$ y $a_n = v^2/\rho$.
- Si la trayectoria es definida como $y = f(x)$, el radio de curvatura en el punto donde la partícula está ubicada puede ser obtenido con $\rho = [1 + (dy/dx)^2]^{3/2}/|d^2y/dx^2|$.

## EJEMPLO 13.6

Determine el ángulo de inclinación lateral $\theta$ de la pista de manera que las ruedas de los carros de carreras mostrados en la figura 13-12$a$ no tengan que depender de la fricción para prevenir que algún carro se deslice hacia arriba o hacia abajo por la pista. Suponga que los carros tienen tamaño despreciable, masa $m$ y que viajan alrededor de la curva de radio $\rho$ con rapidez $v$.

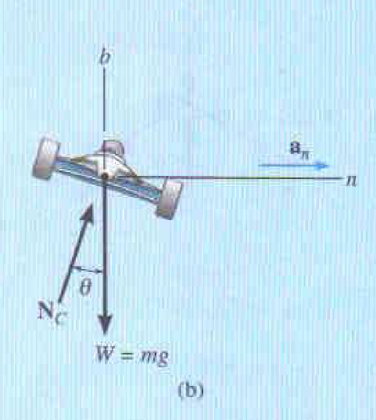



(a)

### Solución

Antes de ver la siguiente solución, piense por qué conviene usar las coordenadas $t, n, b$.

*Diagrama de cuerpo libre.* Como se muestra en la figura 13-12$b$, y como se enunció en el problema, ninguna fuerza de fricción actúa sobre los carros. Aquí $\mathbf{N}_C$ representa la *resultante* del terreno sobre las cuatro ruedas. Como $a_n$ puede ser calculada, las incógnitas son $N_C$ y $\theta$.




(b)

Fig. 13-12

*Ecuaciones de movimiento.* Usando los ejes $n, b$ mostrados,

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_n = ma_n; \qquad N_C \operatorname{sen} \theta = m\frac{v^2}{\rho} \qquad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_b = 0; \qquad N_C \cos \theta - mg = 0 \qquad (2)$$

Eliminando $N_C$ y $m$ de estas ecuaciones al dividir la ecuación 1 entre la ecuación 2, obtenemos

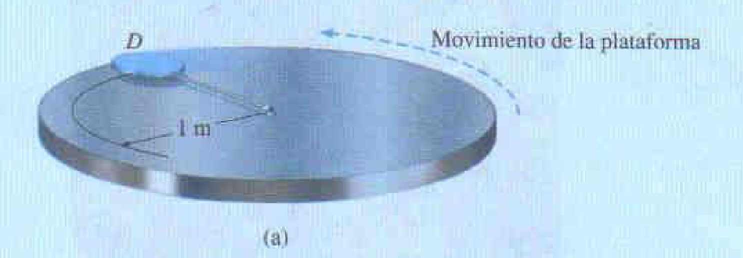
$$\tan \theta = \frac{v^2}{g\rho}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{v^2}{g\rho}\right) \qquad \textit{Resp.}$$

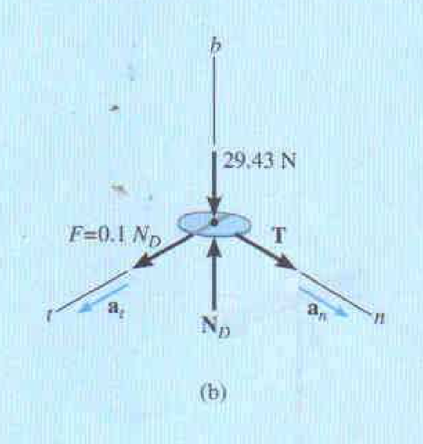
Advierta que el resultado es independiente de la masa de cada carro. Además, una suma de fuerzas en la dirección tangencial no es de consecuencia para la solución. Si ésta fuese considerada, entonces $a_t = dv/dt = 0$, ya que los carros se mueven con *rapidez constante*. Un análisis adicional de este problema es planteado en el problema 21-48.

## EJEMPLO 13.7

El disco $D$ de 3 kg está unido al extremo de una cuerda como se muestra en la figura 13-13$a$. El otro extremo de la cuerda está unido a una junta esférica ubicada en el centro de una plataforma. Si la plataforma está girando rápidamente y el disco es colocado sobre ella y liberado del reposo como se muestra, determine el tiempo que requiere el disco para alcanzar una rapidez lo suficientemente grande como para romper la cuerda. La tensión máxima que la cuerda puede resistir es de 100 N, y el coeficiente de fricción cinética entre el disco y la plataforma es $\mu_k = 0.1$.




(a)




(b)

Fig. 13–13

### Solución

***Diagrama de cuerpo libre.*** La fuerza de fricción tiene magnitud $F = \mu_k N_D = 0.1\ N_D$ y un sentido que se opone al *movimiento relativo* del disco con respecto a la plataforma. Esta es la fuerza que da al disco una componente tangencial de aceleración causando que $v$ se incremente y que $T$ aumente hasta alcanzar 100 N. El peso del disco es $W = 3(9.81) = 29.43$ N. Como $a_n$ puede ser relacionada con $v$, las incógnitas son $N_D$, $a_t$ y $v$.

***Ecuaciones de movimiento.***

$$\Sigma F_n = ma_n; \qquad T = 3\left(\frac{v^2}{1}\right) \qquad (1)$$

$$\Sigma F_t = ma_t; \qquad 0.1N_D = 3a_t \qquad (2)$$

$$\Sigma F_b = 0; \qquad N_D - 29.43 = 0 \qquad (3)$$

Considerando $T = 100$ N, la ecuación 1 puede ser resuelta para la rapidez crítica $v_{cr}$ del disco necesaria para romper la cuerda. Resolviendo todas las ecuaciones, obtenemos

$$N_D = 29.43 \text{ N}$$
$$a_t = 0.981 \text{ m/s}^2$$
$$v_{cr} = 5.77 \text{ m/s}$$

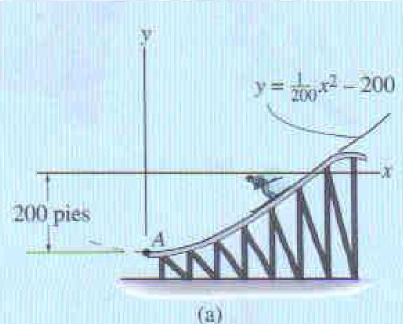
***Cinemática.*** Como $a_t$ es *constante*, el tiempo requerido para romper la cuerda es

$$v_{cr} = v_0 + a_t t$$
$$5.77 = 0 + (0.981)t$$
$$t = 5.89 \text{ s} \qquad \textit{Resp.}$$

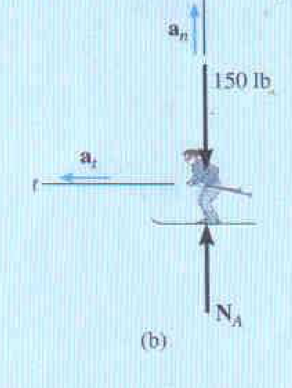
## EJEMPLO 13.8

El diseño de la pista de salto para esquiadores requiere conocer el tipo de fuerzas que serán ejercidas sobre el esquiador y su trayectoria aproximada. Si en este caso la pista puede ser aproximada por la parábola mostrada en la figura 13-14*a*, determine la fuerza normal sobre el esquiador de 150 lb en el instante en que él llega al extremo de la pista, punto *A*, donde su velocidad es de 65 pies/s. ¿Cuál es su aceleración en este punto?






(a)




(b)

Fig. 13–14

### Solución

¿Por qué se considera el uso de coordenadas *n*, *t* para resolver este problema?

*Diagrama de cuerpo libre.* El diagrama de cuerpo libre para el esquiador cuando él está en *A* se muestra en la figura 13-14*b*. Como la trayectoria es *curva*, hay dos componentes de aceleración, $\mathbf{a}_n$ y $\mathbf{a}_t$. Como $a_n$ puede ser calculada, las incógnitas son $a_t$ y $N_A$.

*Ecuaciones de movimiento.*

$$+\uparrow \Sigma F_n = ma_n; \qquad N_A - 150 = \frac{150}{32.2}\left(\frac{(65)^2}{\rho}\right) \qquad (1)$$

$$\overset{+}{\leftarrow} \Sigma F_t = ma_t; \qquad 0 = \frac{150}{32.2}a_t \qquad (2)$$

El radio de curvatura $\rho$ para la trayectoria debe ser determinado en el punto $A(0, -200\text{pies})$. Aquí $y = \frac{1}{200}x^2 - 200$, $dy/dx = \frac{1}{100}x$, $d^2y/dx^2 = \frac{1}{100}$, de modo que en $x = 0$,

$$\rho = \left.\frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{|d^2y/dx^2|}\right|_{x=0} = \frac{[1 + (0)^2]^{3/2}}{|\frac{1}{100}|} = 100 \text{ pies}$$

Sustituyendo en la ecuación 1 y despejando $N_A$, tenemos

$$N_A = 347 \text{ lb} \qquad \textit{Resp.}$$

*Cinemática.* A partir de la ecuación 2,

$$a_t = 0$$

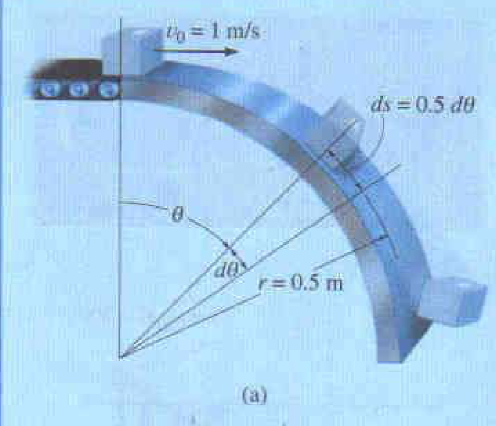
Entonces,

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{(65)^2}{100} = 42.2 \text{ pies/s}^2$$

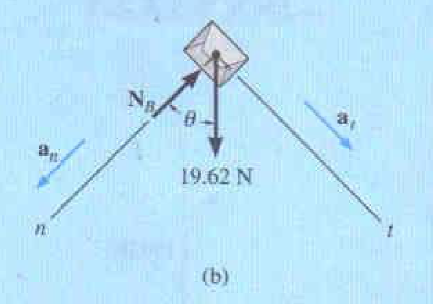
$$a_A = a_n = 42.2 \text{ pies/s}^2 \uparrow \qquad \textit{Resp.}$$

Demuestre que cuando el esquiador está en el aire su aceleración es de 32.2 pies/s$^2$.

## EJEMPLO 13.9




(a)




(b)

Fig. 13–15

Los paquetes, con masa de 2 kg cada uno, son depositados por una banda transportadora en una rampa circular lisa con velocidad $v_0 = 1$ m/s como se muestra en la figura 13-15*a*. Si el radio efectivo de la rampa es de 0.5 m, determine el ángulo $\theta = \theta_{máx}$ en que los paquetes empiezan a dejar la superficie.

### Solución

***Diagrama de cuerpo libre.*** El diagrama de cuerpo libre para un paquete, cuando está ubicado en la *posición general* $\theta$, se muestra en la figura 13-15*b*. El paquete debe tener aceleración tangencial $\mathbf{a}_t$, ya que su *rapidez* siempre está *creciendo* al resbalar hacia abajo. El peso es $W = 2(9.81) = 19.62$ N. Especifique las tres incógnitas.

***Ecuaciones de movimiento.***

$$+\swarrow \Sigma F_n = ma_n; \qquad -N_B + 19.62 \cos\theta = 2\frac{v^2}{0.5} \qquad (1)$$

$$+\searrow \Sigma F_t = ma_t; \qquad 19.62 \operatorname{sen}\theta = 2a_t \qquad (2)$$

En el instante $\theta = \theta_{máx}$, el paquete deja la superficie de la rampa por lo que $N_B = 0$. Por tanto, hay tres incógnitas, $v$, $a_t$ y $\theta$.

***Cinemática.*** La tercera ecuación para la solución se obtiene al advertir que la magnitud de la aceleración tangencial $a_t$ puede ser relacionada con la rapidez del paquete $v$ y el ángulo $\theta$. Como $a_t\, ds = v\, dv$ y $ds = r\, d\theta = 0.5\, d\theta$, figura 13-15*a*, tenemos

$$a_t = \frac{v\, dv}{0.5\, d\theta} \qquad (3)$$

Para resolver esta ecuación, sustituya la ecuación 3 en la ecuación 2 y separe las variables. Esto da

$$v\, dv = 4.905 \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

Integre ambos lados, observando que cuando $\theta = 0°$, $v_0 = 1$ m/s.

$$\int_1^v v\, dv = 4.905 \int_{0°}^{\theta} \operatorname{sen}\theta\, d\theta$$

$$\left.\frac{v^2}{2}\right|_1^v = -4.905 \cos\theta \Big|_{0°}^{\theta}$$

$$v^2 = 9.81(1 - \cos\theta) + 1$$

Sustituyendo en la ecuación 1 con $N_B = 0$ y despejando $\cos\theta_{máx}$ obtenemos

$$19.62 \cos\theta_{máx} = \frac{2}{0.5}[9.81(1 - \cos\theta_{máx}) + 1]$$

$$\cos\theta_{máx} = \frac{43.24}{58.86}$$

$$\theta_{máx} = 42.7° \qquad \textit{Resp.}$$

# PROBLEMAS

*13-52. Determine la masa del Sol si se sabe que la distancia de la Tierra al Sol es de 149.6($10^6$) km. *Sugerencia*: Use la ecuación 13-1 para representar la fuerza de la gravedad actuando sobre la Tierra.

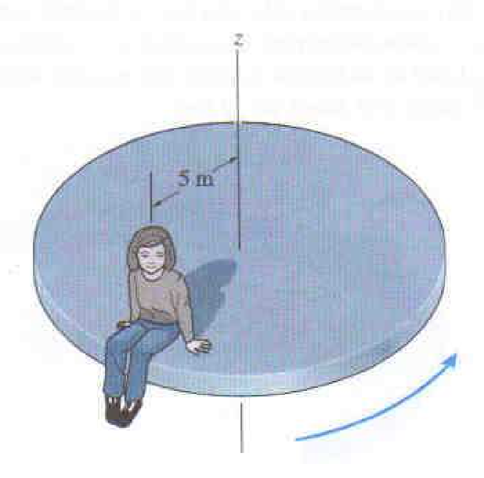
13-53. El carro deportivo, que tiene masa de 1700 kg, está viajando horizontalmente por una pista con 20° de inclinación lateral que es circular y tiene radio de curvatura $\rho = 100$ m. Si el coeficiente de fricción estática entre los neumáticos y el camino es $\mu_s = 0.2$, determine la *rapidez constante máxima* a la que el carro puede viajar sin resbalar hacia arriba por la pendiente. Desprecie el tamaño del carro.

13-54. Usando los datos del problema 13-53, determine la *rapidez mínima* a la que el carro puede viajar alrededor del camino sin resbalar hacia abajo por la pendiente.




Probs. 13–53/54

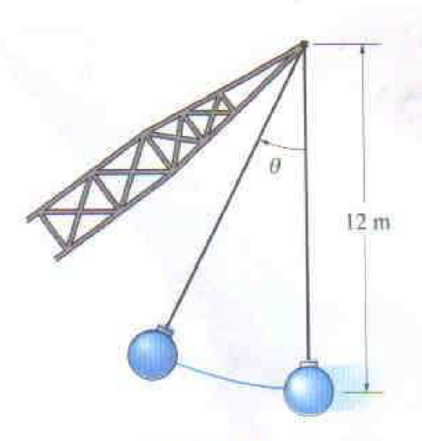
13-55. Una niña, que tiene masa de 15 kg, está sentada sin moverse con respecto a la superficie de una plataforma horizontal a una distancia de $r = 5$ m del centro de la plataforma. Si el movimiento angular de la plataforma está aumentando *lentamente* de manera que la componente tangencial de aceleración de la niña puede ser despreciada, determine la rapidez máxima que la niña tendrá antes de empezar a deslizarse hacia fuera de la plataforma. El coeficiente de fricción estática entre la niña y la plataforma es $\mu = 0.2$.




Prob. 13–55

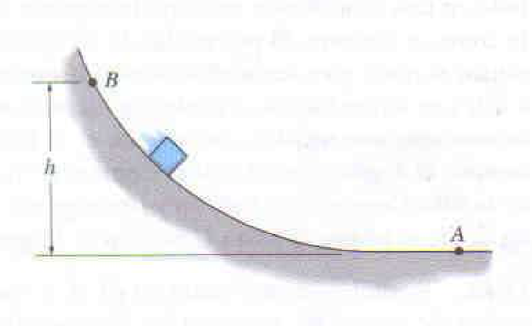
*13-56. Resuelva el problema 13-55 suponiendo que la plataforma empieza a girar desde el reposo de manera que la rapidez de la niña es incrementada uniformemente en $\dot{v} = 0.5$ m/s$^2$.

13-57. La bola de demolición de 600 kg está suspendida de la grúa por un cable que tiene masa insignificante. Si la bola tiene rapidez $v = 8$ m/s en el instante en que está en su punto más bajo $\theta = 0°$, determine la tensión en el cable en ese instante. Determine también el ángulo $\theta$ que la bola oscila antes de detenerse.




Prob. 13–57

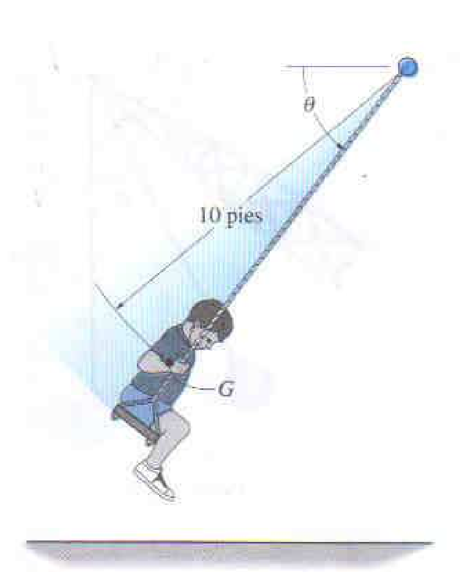
13-58. Demuestre que si el bloque es liberado del reposo en el punto $B$ de una trayectoria lisa de *forma arbitraria*, la rapidez que alcanza cuando llega al punto $A$ es igual a la rapidez que alcanza cuando cae libremente a una distancia $h$; es decir, $v = \sqrt{2gh}$.




Prob. 13–58

**13-59.** En el instante $\theta = 60°$, el centro de masa $G$ del niño tiene una rapidez hacia abajo $v_G = 15$ pies/s. Determine la razón del incremento de su rapidez y la tensión en cada una de las dos cuerdas de soporte del columpio en este instante. El niño tiene un peso de 60 lb. Desprecie su tamaño y la masa del asiento y las cuerdas.

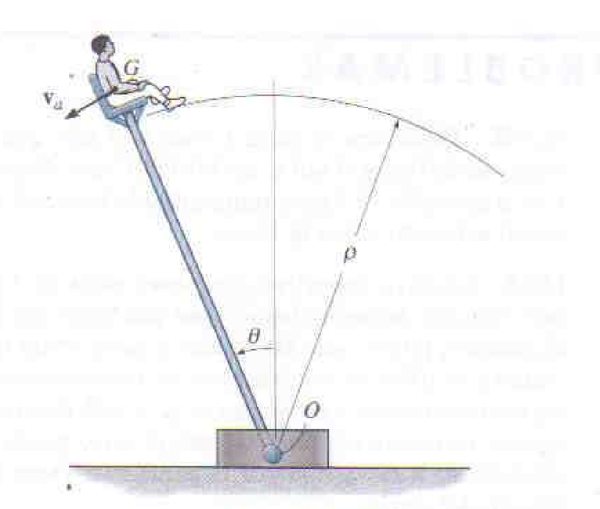
***13-60.** En el instante $\theta = 60°$, el centro de masa $G$ del niño está momentáneamente en reposo. Determine su rapidez y la tensión en cada una de las dos cuerdas de soporte del columpio cuando $\theta = 90°$. El niño pesa 60 lb. Desprecie su tamaño y la masa del asiento y las cuerdas.




**Probs. 13-59/60**

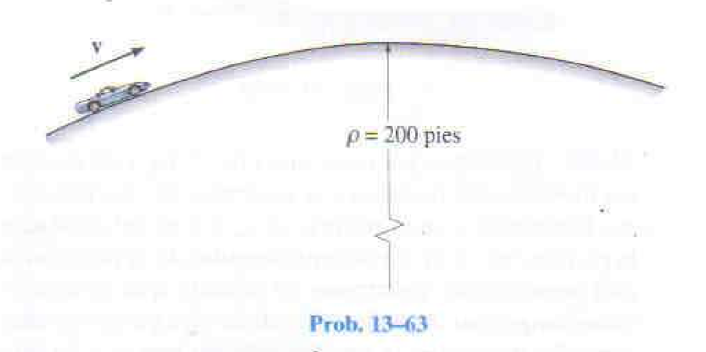
**13-61.** Un acróbata tiene un peso de 150 lb y está sentado en una silla situada en la parte superior de un poste como se muestra. Si por medio de un dispositivo mecánico el poste gira hacia abajo a razón constante desde $\theta = 0°$, en forma tal que el centro de masa $G$ del acróbata mantiene una *rapidez constante* de $v_a = 10$ pies/s, determine el ángulo $\theta$ en el cual él empieza a "volar" fuera de la silla. Desprecie la fricción y suponga que la distancia desde el pivote $O$ hasta $G$ es de $\rho = 15$ pies.

**13-62.** Resuelva el problema 13-61 si la rapidez del centro de masa del acróbata es incrementada desde $(v_a)_0 = 10$ pies/s en $\theta = 0°$ con una razón constante de $\dot{v}_a = 0.5$ pies/s$^2$.



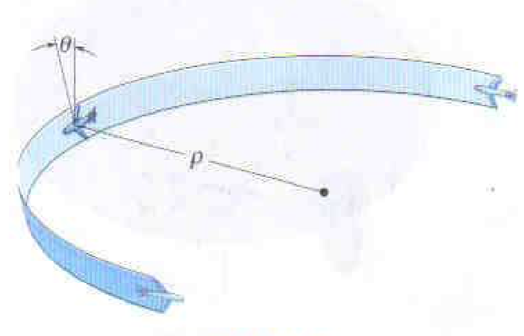

**Probs. 13-61/62**

**13-63.** Si la cresta de la colina tiene radio de curvatura $\rho = 200$ pies, determine la rapidez máxima constante con la que el carro puede viajar sobre ella sin dejar la superficie del camino. Desprecie el tamaño del carro en los cálculos. El carro tiene un peso de 3500 lb.




**Prob. 13-63**

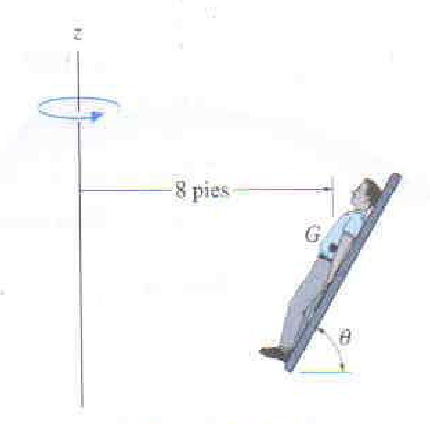
***13-64.** El avión, viajando con rapidez constante de 50 m/s, está efectuando una vuelta horizontal. Si el avión está inclinado transversalmente en $\theta = 15°$, cuando el piloto experimenta sólo una fuerza normal sobre el asiento del avión, determine el radio de curvatura $\rho$ de la vuelta. ¿Cuál es la fuerza normal del asiento sobre el piloto si él tiene una masa de 70 kg?




**Prob. 13-64**

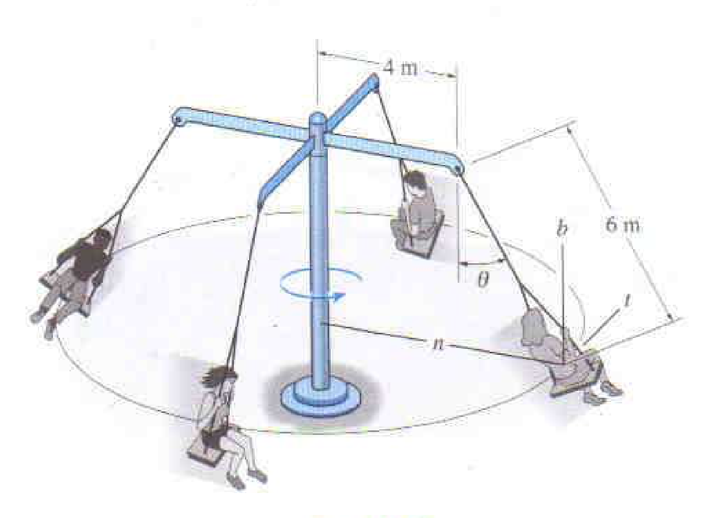
**13-65.** El hombre de 150 lb yace sobre el colchón cuyo coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.5$. Determine las fuerzas normal y de fricción resultantes que el colchón ejerce sobre él si, debido a la rotación alrededor del eje $z$, tiene una rapidez constante $v = 20$ pies/s. Desprecie el tamaño del hombre. Considere $\theta = 60°$.

**13-66.** El hombre de 150 lb yace sobre el colchón cuyo coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.5$. Si el hombre gira alrededor del eje $z$ con rapidez constante $v = 30$ pies/s, determine el ángulo $\theta$ más pequeño del colchón en el cual comenzará a deslizarse.




Probs. 13–65/66

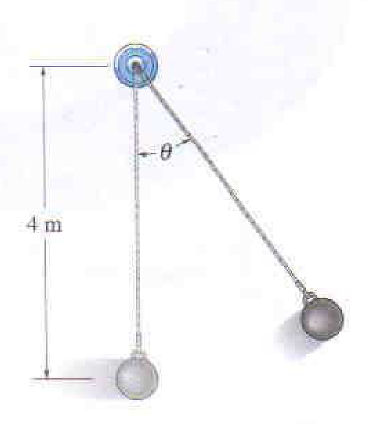
**13-67.** Determine la rapidez constante de los pasajeros en el juego de un parque de diversiones si se observa que los cables de soporte están dirigidos a $\theta = 30°$ de la vertical. Cada silla, incluyendo su pasajero, tiene una masa de 80 kg. ¿Cuáles son las componentes de fuerza en las direcciones $n$, $t$ y $b$ que la silla ejerce sobre un pasajero de 50 kg durante el movimiento?




Prob. 13–67

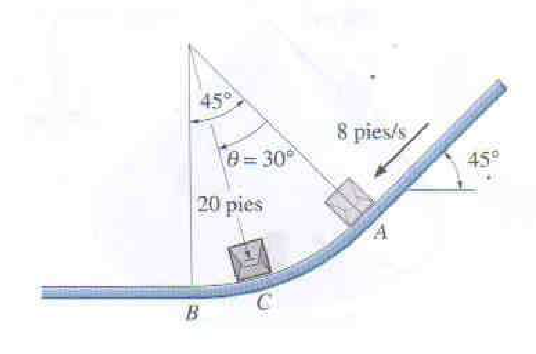
***13-68.** Si la bola tiene una masa de 30 kg y rapidez $v = 4$ m/s en el instante en que está en su punto más bajo, $\theta = 0°$, determine la tensión en la cuerda en ese instante. Determine también el ángulo $\theta$ que la bola oscila en el instante en que momentáneamente se detiene. Desprecie el tamaño de la bola.

**13-69.** La bola tiene una masa de 30 kg y rapidez $v = 4$ m/s en el instante en que está en su punto más bajo, $\theta = 0°$. Determine la tensión en la cuerda y la razón a la que la rapidez de la bola está disminuyendo en el instante $\theta = 20°$. Desprecie el tamaño de la bola.



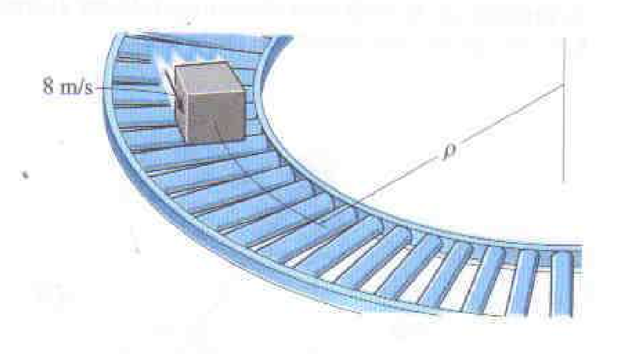

Probs. 13–68/69

**13-70.** El paquete tiene un peso de 5 lb y se desliza hacia abajo por la canaleta. Cuando alcanza la porción curva $AB$, está viajando a 8 pies/s ($\theta = 0°$). Si la canaleta es lisa, determine la rapidez del paquete cuando alcanza el punto intermedio $C$ ($\theta = 30°$) y cuando alcanza el plano horizontal ($\theta = 45°$). Encuentre también la fuerza normal que actúa sobre el paquete en el punto $C$.



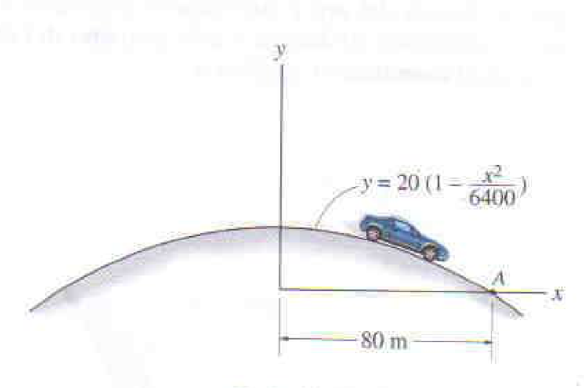

Prob. 13–70

**13-71.** Los paquetes, que tienen una masa de 5 kg, deben moverse a lo largo de la línea de montaje a una rapidez constante de 8 m/s. Determine el mínimo radio de curvatura, $\rho$, necesario en la banda transportadora de manera que los paquetes no resbalen. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre cada paquete y la banda son $\mu_s = 0.7$ y $\mu_k = 0.5$, respectivamente.



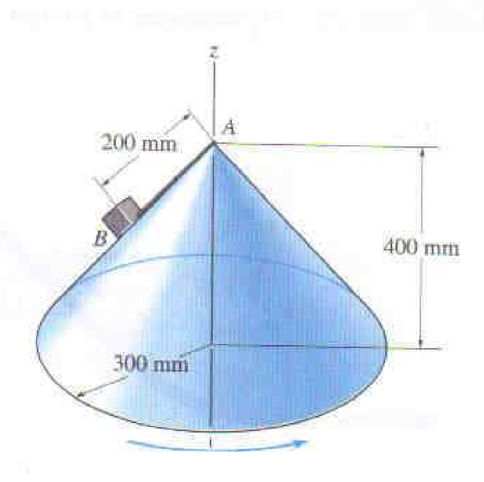

Prob. 13–71

**13-73.** El automóvil de 0.8 Mg está viajando sobre la colina que tiene la forma de una parábola. Si el conductor mantiene una rapidez constante de 9 m/s, determine la fuerza normal resultante y la fuerza de fricción resultante que las ruedas del automóvil ejercen sobre el camino en el instante en que alcanza el punto $A$. Desprecie el tamaño del automóvil.



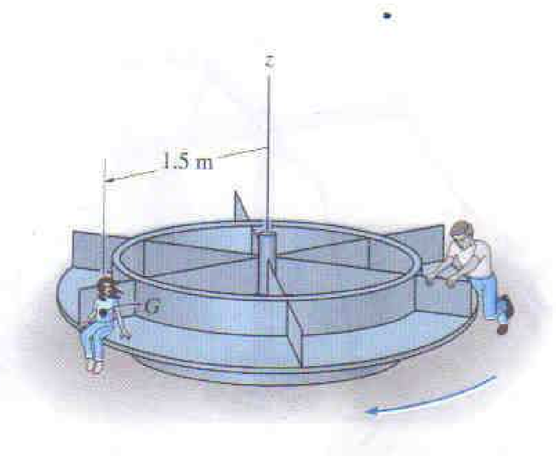

Prob. 13–73

***13-72.** El bloque liso $B$ con masa de 0.2 kg está unido al vértice del cono circular recto por medio de una cuerda ligera. El cono está girando a una razón angular constante con respecto al eje $z$ de manera que el bloque alcanza una rapidez de 0.5 m/s. A esta rapidez, determine la tensión en la cuerda y la reacción que el cono ejerce sobre el bloque. Desprecie el tamaño del bloque.



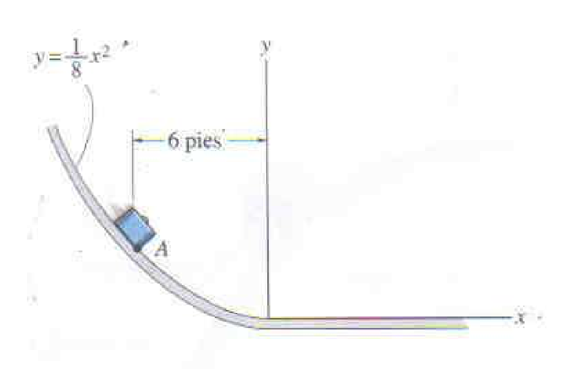

Prob. 13–72

**13-74.** Una niña con masa de 25 kg está sentada en el borde del carrusel de manera que su centro de masa $G$ está a una distancia de 1.5 m del eje de rotación. Si el movimiento angular de la plataforma es incrementado *lentamente* de manera que la componente tangencial de aceleración de la niña puede ser ignorada, determine la rapidez máxima que ella puede tener antes de empezar a resbalar hacia fuera del carrusel. El coeficiente de fricción estática entre la niña y el carrusel es $\mu_s = 0.3$.



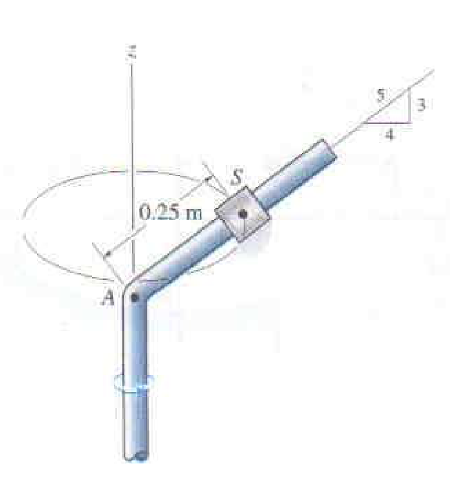

Prob. 13–74

**13-75.** La maleta de 10 lb resbala hacia abajo por la rampa curva cuyo coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.2$. Si en el instante en que alcanza el punto $A$ tiene rapidez de 5 pies/s, determine la fuerza normal que actúa sobre la maleta y la razón de aumento de su rapidez.



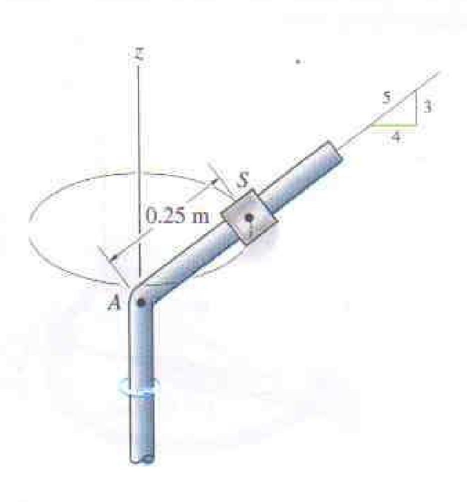

Prob. 13–75

**13-77.** El carrete $S$ de 2 kg se ajusta con holgura en la barra inclinada cuyo coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.2$. Si el carrete está ubicado a 0.25 m de $A$, determine la rapidez máxima constante que puede tener para que no resbale hacia arriba por la barra.



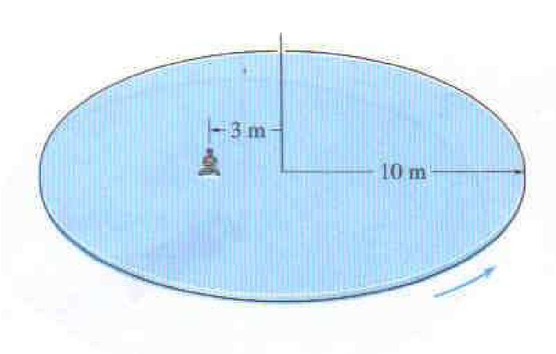

Prob. 13–77

***13-76.** El carrete $S$ de 2 kg se ajusta con holgura en la barra inclinada cuyo coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.2$. Si el carrete está ubicado a 0.25 m de $A$, determine la rapidez mínima constante que puede tener de manera que no resbale hacia abajo por la barra.



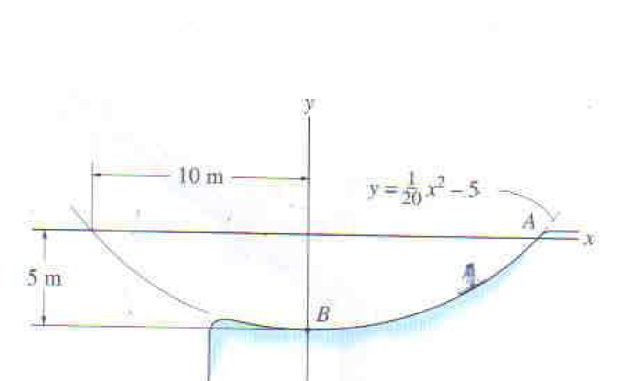

Prob. 13–76

**13-78.** El hombre tiene una masa de 80 kg y está sentado a 3 m del centro de la plataforma en rotación. Debido a la rotación su rapidez aumenta desde el reposo en $\dot{v} = 0.4\ \text{m/s}^2$. Si el coeficiente de fricción estática entre su ropa y la plataforma es $\mu_s = 0.3$, determine el tiempo requerido para que el hombre se deslice.



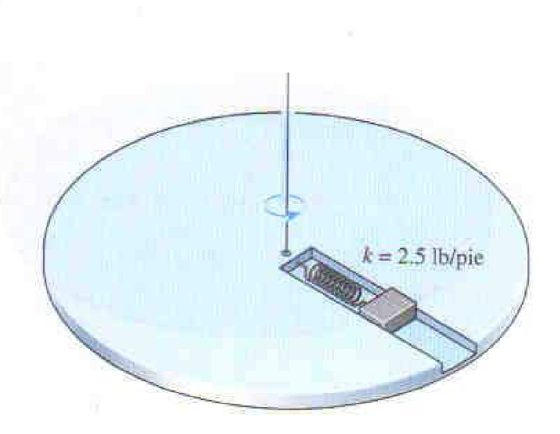

Prob. 13–78

**13-79.** La esquiadora parte del reposo en $A(10\text{ m}, 0)$ y desciende por la pendiente lisa, la cual puede ser aproximada por una parábola. Si ella tiene una masa de 52 kg, determine la fuerza normal que ejerce sobre el terreno en el instante en que pasa por el punto $B$. Desprecie el tamaño de la esquiadora. *Sugerencia*: Use el resultado del problema 13-58.



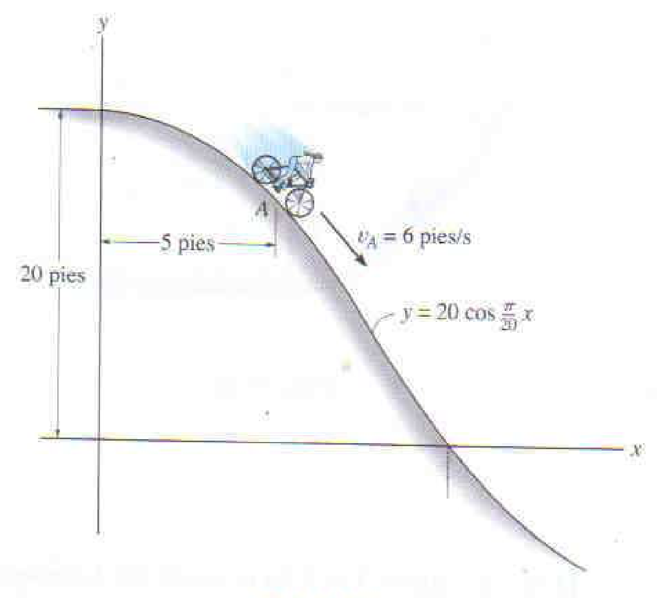

Prob. 13–79

***13-80.** El bloque tiene un peso de 2 lb y puede moverse a lo largo de la ranura lisa hecha en el disco en rotación. El resorte tiene una rigidez de 2.5 lb/pie y longitud no alargada de 1.25 pies. Determine la fuerza del resorte sobre el bloque y la componente tangencial de fuerza que la ranura ejerce sobre el lado del bloque, cuando éste está en reposo con respecto al disco y cuando viaja a rapidez constante de 12 pies/s.



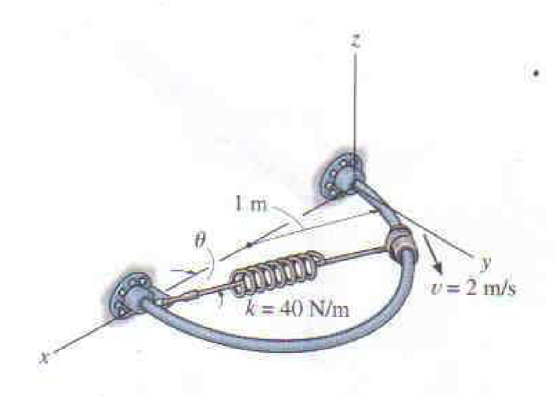

Prob. 13–80

**13-81.** Si la bicicleta y la ciclista tienen un peso total de 180 lb, determine la fuerza normal resultante que actúa sobre la bicicleta cuando pasa por el punto $A$ mientras desciende libremente a $v_A = 6$ pies/s. Calcule también el incremento en la rapidez de la bicicleta en este punto. Desprecie la resistencia debida al viento y el tamaño de la bicicleta y la ciclista.




Prob. 13–81

**13-82.** El collar tiene una masa de 5 kg y está obligado a moverse por una barra lisa circular que se encuentra en el plano horizontal. El resorte unido al collar tiene longitud no alargada de 200 mm. Si, en el instante $\theta = 30°$, el collar tiene rapidez de $v = 2$ m/s, determine la magnitud de la fuerza normal de la barra sobre el collar y la aceleración de éste.




Prob. 13–82

## 13.6 Ecuaciones de movimiento: Coordenadas cilíndricas

Cuando todas las fuerzas que actúan sobre una partícula son resueltas en componentes cilíndricas, es decir, a lo largo de las direcciones de los vectores unitarios $\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_z$, figura 13-16, la ecuación de movimiento puede expresarse como

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$$

$$\Sigma F_r \mathbf{u}_r + \Sigma F_\theta \mathbf{u}_\theta + \Sigma F_z \mathbf{u}_z = ma_r \mathbf{u}_r + ma_\theta \mathbf{u}_\theta + ma_z \mathbf{u}_z$$

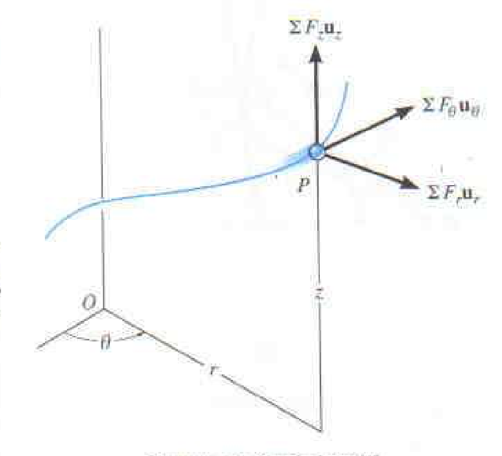



**Fig. 13–16**

Para satisfacer esta ecuación, las componentes respectivas $\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta, \mathbf{u}_z$ del lado izquierdo deben igualar a las componentes correspondientes del lado derecho. En consecuencia, podemos escribir las siguientes tres ecuaciones escalares de movimiento:

$$\begin{aligned} \Sigma F_r &= ma_r \\ \Sigma F_\theta &= ma_\theta \\ \Sigma F_z &= ma_z \end{aligned} \qquad (13\text{–}9)$$

Si la partícula está restringida a moverse sólo en el plano $r-\theta$, entonces únicamente las primeras dos de las ecuaciones 13-9 son usadas para especificar el movimiento.

**Fuerzas tangenciales y normales.** El tipo más directo de problema que implica coordenadas cilíndricas requiere la determinación de las componentes de la fuerza resultante $\Sigma F_r, \Sigma F_\theta, \Sigma F_z$ que ocasionan que una partícula se mueva con aceleración *conocida*. Sin embargo, si el movimiento acelerado de la partícula no se especifica por completo en el instante dado, entonces alguna información relativa a las direcciones o magnitudes de las fuerzas que actúan sobre la partícula debe ser conocida o calculada para resolver las ecuaciones 13-9. Por ejemplo, la fuerza **P** ocasiona que la partícula mostrada en la figura 13-17*a* se mueva a lo largo de una trayectoria $r = f(\theta)$. La *fuerza normal* **N** que la trayectoria ejerce sobre la partícula es siempre *perpendicular a la tangente de la trayectoria*, mientras que la fuerza de fricción **F** actúa siempre a lo largo de la tangente en la dirección opuesta del movimiento. Las *direcciones* de **N** y **F** pueden ser especificadas con respecto a la coordenada radial usando el ángulo $\psi$ (psi), figura 13-17*b*, el cual está definido entre la línea radial *extendida* y la tangente a la curva.

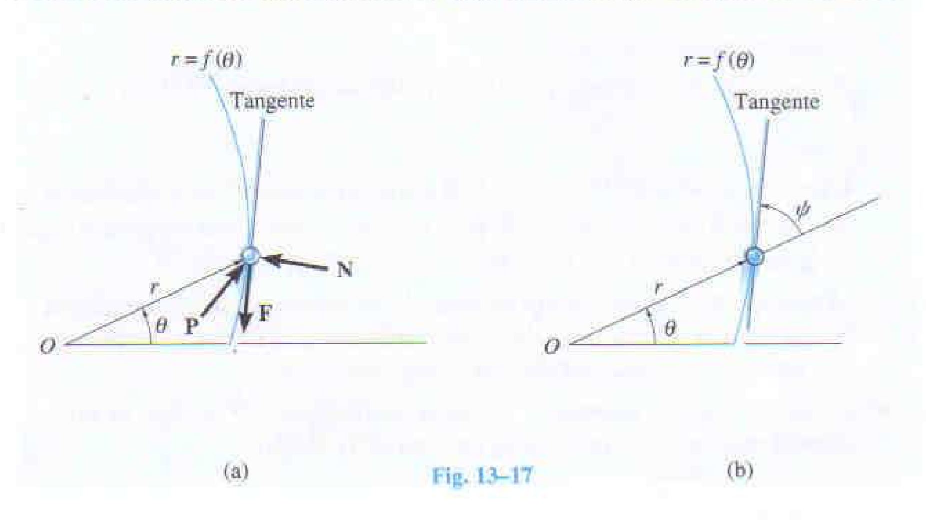
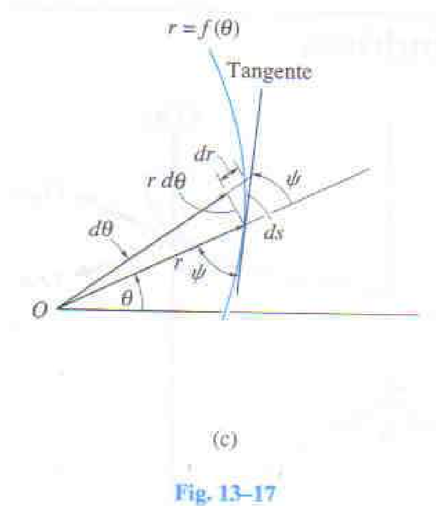



**Fig. 13–17**



Al descender el carro de peso $W$ por la vía en espiral, la fuerza normal resultante que la vía ejerce sobre el carro puede ser representada mediante sus tres componentes cilíndricas: $-\mathbf{N}_r$, que crea una aceleración radial, $-\mathbf{a}_r$; $\mathbf{N}_\theta$, que crea una aceleración transversal, $\mathbf{a}_\theta$, y la diferencia $\mathbf{W} - \mathbf{N}_z$, la cual crea una aceleración acimutal $-\mathbf{a}_z$.




(c)

**Fig. 13–17**

Este ángulo se puede obtener al advertir que cuando la partícula es desplazada una distancia $ds$ a lo largo de la trayectoria, figura 13-17$c$, la componente de desplazamiento en la dirección radial es $dr$ y la componente de desplazamiento en la dirección transversal es $r\,d\theta$. Como estas dos componentes son mutuamente perpendiculares, el ángulo $\psi$ puede ser determinado a partir de $\tan\psi = r\,d\theta/dr$, o

$$\tan\psi = \frac{r}{dr/d\theta} \qquad (13\text{–}10)$$

Si $\psi$ es calculado como una cantidad positiva, se mide a partir de la *línea radial extendida* a la tangente en sentido contrario al de las manecillas del reloj o en la dirección positiva de $\theta$. Si es negativo, se mide en la dirección opuesta a la $\theta$ positiva. Por ejemplo, considere la cardioide $r = a(1 + \cos\theta)$, mostrada en la figura 13-18. Como $dr/d\theta = -a \operatorname{sen}\theta$, entonces, cuando $\theta = 30°$, $\tan\psi = a(1 + \cos 30°)/(-a \operatorname{sen} 30°) = -3.732$, o $\psi = -75°$, medido en el sentido de las manecillas del reloj, como se muestra en la figura.

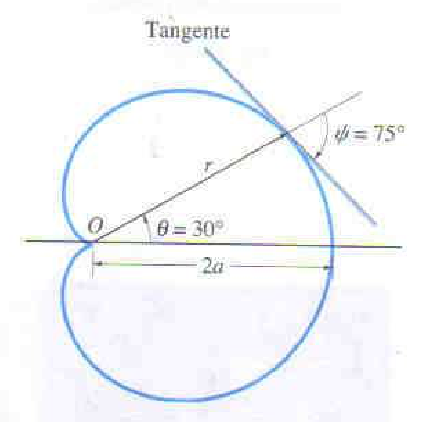



**Fig. 13–18**

## PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

Las coordenadas cilíndricas o polares son una opción conveniente para el análisis de un problema para el cual los datos relativos al movimiento angular de la línea radial $r$ están dados, o para casos en donde la trayectoria puede ser convenientemente expresada en términos de estas coordenadas. Una vez que estas coordenadas han sido establecidas, las ecuaciones de movimiento pueden ser aplicadas para relacionar las fuerzas que actúan sobre la partícula con sus componentes de aceleración. El método para hacer esto fue presentado en el procedimiento de análisis de la sección 13.4. Lo siguiente es un resumen de este procedimiento.

### *Diagrama de cuerpo libre*

- Establezca el sistema coordenado inercial $r, \theta, z$ y trace el diagrama de cuerpo libre de la partícula.
- Suponga que $\mathbf{a}_r$, $\mathbf{a}_\theta$, $\mathbf{a}_z$ actúan en las *direcciones positivas* de $r, \theta, z$ si las direcciones son desconocidas.
- Identifique todas las incógnitas en el problema.

### *Ecuaciones de movimiento*

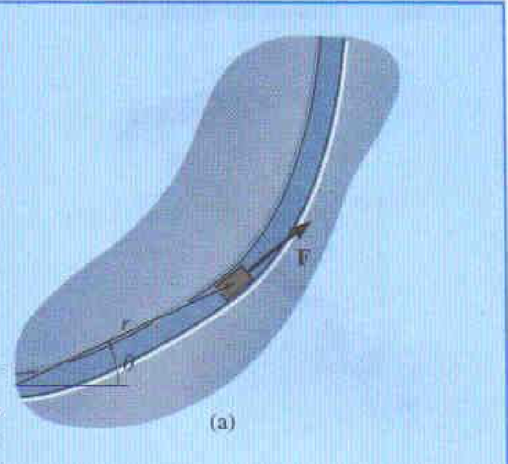
- Aplique las ecuaciones de movimiento, ecuaciones 13-9.

### *Cinemática*

- Use los métodos de la sección 12.8 para determinar $r$ y las derivadas con respecto al tiempo $\dot{r}, \ddot{r}, \dot{\theta}, \ddot{\theta}, \ddot{z}$, y luego evalúe las componentes de la aceleración $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$, $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$, $a_z = \ddot{z}$.
- Si cualquiera de las componentes de la aceleración es calculada como una cantidad negativa, esto indica que la componente actúa en su dirección coordenada negativa.
- Al tomar las derivadas con respecto al tiempo de $r = f(\theta)$, es muy importante usar la regla de la cadena del cálculo.

## EJEMPLO 13.10

El bloque de 2 lb mostrado en la figura 13-19*a* se mueve sobre una guía lisa horizontal, de manera que su trayectoria está especificada en coordenadas polares mediante las ecuaciones paramétricas $r = (10t^2)$ pies y $\theta = (0.5t)$ rad, donde $t$ está en segundos. Determine la magnitud de la fuerza tangencial **F** que causa el movimiento en el instante $t = 1$ s.



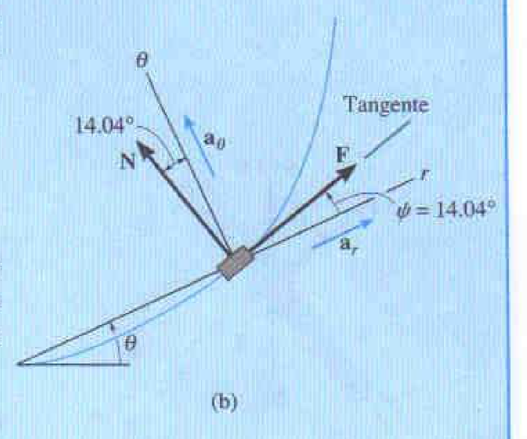




Fig. 13-19

### Solución

*Diagrama de cuerpo libre.* Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre, figura 13-19*b*, la fuerza normal de la guía sobre el bloque, **N**, y la fuerza tangencial **F** están ubicadas a un ángulo $\psi$ de los ejes $r$ y $\theta$. Este ángulo puede obtenerse a partir de la ecuación 13-10. Para hacerlo así, primero debemos expresar la trayectoria como $r = f(\theta)$, eliminando el parámetro $t$ entre $r$ y $\theta$. Esto da $r = 40\theta^2$. Además, cuando $t = 1$ s, $\theta = 0.5(1 \text{ s}) = 0.5$ rad. Así,

$$\tan\psi = \frac{r}{dr/d\theta} = \left.\frac{40\theta^2}{40(2\theta)}\right|_{\theta=0.5\text{ rad}} = 0.25$$

$$\psi = 14.04°$$

Como $\psi$ es una cantidad positiva, se mide en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje $r$ a la tangente (la misma dirección que $\theta$) como se muestra en la figura 13-19*b*. De momento se tienen cuatro incógnitas: $F$, $N$, $a_r$ y $a_\theta$.



*Ecuaciones de movimiento.*

$$+\downarrow \Sigma F_r = ma_r; \qquad F\cos 14.04° - N \operatorname{sen} 14.04° = \frac{2}{32.2}a_r \qquad (1)$$

$$\uparrow + \Sigma F_\theta = ma_\theta; \qquad F \operatorname{sen} 14.04° + N\cos 14.04° = \frac{2}{32.2}a_\theta \qquad (2)$$

*Cinemática.* Como el movimiento está especificado, las coordenadas y las derivadas con respecto al tiempo requeridas pueden ser calculadas y evaluadas en $t = 1$ s.

$$r = 10t^2\Big|_{t=1\text{ s}} = 10 \text{ pies} \qquad \theta = 0.5t\Big|_{t=1\text{ s}} = 0.5 \text{ rad}$$

$$\dot{r} = 20t\Big|_{t=1\text{ s}} = 20 \text{ pies/s} \qquad \dot{\theta} = 0.5 \text{ rad/s}$$

$$\ddot{r} = 20 \text{ pies/s}^2 \qquad \ddot{\theta} = 0$$

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 20 - 10(0.5)^2 = 17.5 \text{ pies/s}^2$$

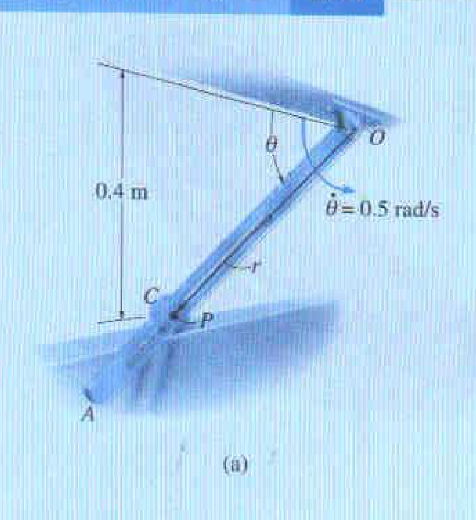
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 10(0) + 2(20)(0.5) = 20 \text{ pies/s}^2$$

Sustituyendo en las ecuaciones 1 y 2, y resolviéndolas, obtenemos

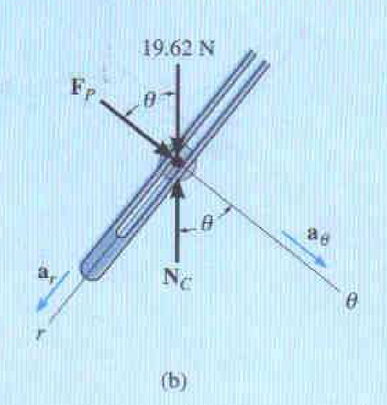
$$F = 1.36 \text{ lb} \qquad \textit{Resp.}$$

$$N = 0.942 \text{ lb}$$

## EJEMPLO 13.11




(a)




(b)

**Fig. 13-20**

El cilindro liso $C$ de 2 kg mostrado en la figura 13-20$a$ tiene un pasador $P$ que atraviesa su centro a través de la ranura situada en el brazo $OA$. Si el brazo gira en el *plano vertical* a la razón constante $\dot{\theta} = 0.5$ rad/s, determine la fuerza que ejerce sobre el pasador en el instante $\theta = 60°$.

### Solución

¿Por qué es una buena idea usar coordenadas polares para resolver este problema?

***Diagrama de cuerpo libre.*** El diagrama de cuerpo libre para el cilindro se muestra en la figura 13-20$b$. La fuerza sobre el pasador, $\mathbf{F}_P$, actúa perpendicularmente a la ranura situada en el brazo. Como es usual, se supone que $\mathbf{a}_r$ y $\mathbf{a}_\theta$ actúan en las direcciones $r$ y $\theta$ positivas, respectivamente. Identifique las cuatro incógnitas.

***Ecuaciones de movimiento.*** Usando los datos que aparecen en la figura 13-20$b$, tenemos

$$+\searrow \Sigma F_r = ma_r; \qquad 19.62 \text{ sen } \theta - N_C \text{ sen } \theta = 2a_r \qquad (1)$$

$$+\swarrow \Sigma F_\theta = ma_\theta; \qquad 19.62 \cos \theta + F_P - N_C \cos \theta = 2a_\theta \qquad (2)$$

***Cinemática.*** A partir de la figura 13-20$a$, $r$ puede relacionarse con $\theta$ mediante la ecuación

$$r = \frac{0.4}{\text{sen } \theta} = 0.4 \csc \theta$$

Como $d(\csc \theta) = -(\csc \theta \cot \theta)\, d\theta$ y $d(\cot \theta) = -(\csc^2 \theta)\, d\theta$, entonces $r$ y las necesarias derivadas con respecto al tiempo son

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} &= 0.5 & r &= 0.4 \csc \theta \\
\ddot{\theta} &= 0 & \dot{r} &= -0.4(\csc \theta \cot \theta)\dot{\theta} \\
& & &= -0.2 \csc \theta \cot \theta \\
& & \ddot{r} &= -0.2(-\csc \theta \cot \theta)(\dot{\theta}) \cot \theta - 0.2 \csc \theta(-\csc^2 \theta)\dot{\theta} \\
& & &= 0.1 \csc \theta(\cot^2 \theta + \csc^2 \theta)
\end{aligned}$$

Evaluando estas fórmulas en $\theta = 60°$, obtenemos

$$\begin{aligned}
\dot{\theta} &= 0.5 & r &= 0.462 \\
\ddot{\theta} &= 0 & \dot{r} &= -0.133 \\
& & \ddot{r} &= 0.192 \\
& & a_r &= \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0.192 - 0.462(0.5)^2 = 0.0770 \\
& & a_\theta &= r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 + 2(-0.133)(0.5) = -0.133
\end{aligned}$$

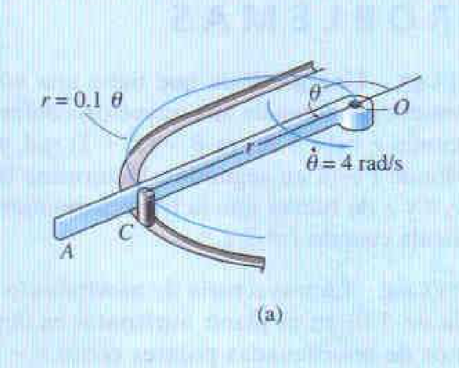
Sustituyendo esos resultados en las ecuaciones 1 y 2 con $\theta = 60°$ y resolviendo resulta

$$N_C = 19.4 \text{ N} \qquad F_P = -0.356 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

El signo negativo indica que $\mathbf{F}_P$ actúa en sentido opuesto al mostrado en la figura 13-20$b$.

## EJEMPLO 13.12

Un bote de hojalata $C$, con masa de 0.5 kg, se mueve a lo largo de la ranura horizontal mostrada en la figura 13-21*a*. La ranura tiene forma de espiral, la cual está definida mediante la ecuación $r = (0.1\theta)$ m, donde $\theta$ está en radianes. Si el brazo $OA$ está girando a razón constante $\dot{\theta} = 4$ rad/s en el plano horizontal, determine la fuerza que ejerce sobre el bote en el instante $\theta = \pi$ radianes. Desprecie la fricción y el tamaño del bote.

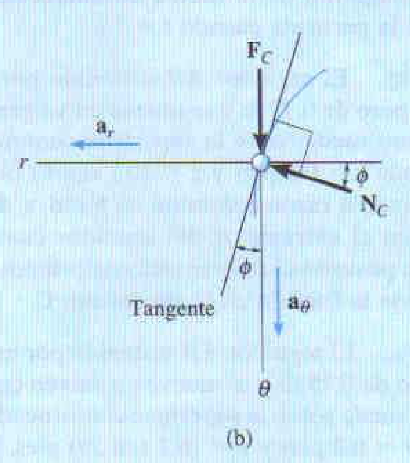


(a)

### Solución

*Diagrama de cuerpo libre.* La fuerza impulsora $\mathbf{F}_C$ actúa perpendicularmente al brazo $OA$, mientras que la fuerza normal de la pared de la ranura sobre el bote, $\mathbf{N}_C$, actúa perpendicularmente a la tangente a la curva en $\theta = \pi$ rad, figura 13-21*b*. Como es usual, $\mathbf{a}_r$ y $\mathbf{a}_\theta$ son supuestas actuando en las *direcciones positivas* de $r$ y $\theta$, respectivamente. Como la trayectoria está especificada, el ángulo $\psi$ que la línea radial extendida $r$ forma con la tangente, figura 13-21*c*, puede ser determinado con la ecuación 13-10. Tenemos $r = 0.1\theta$, por lo que $dr/d\theta = 0.1$, y entonces

$$\tan\psi = \frac{r}{dr/d\theta} = \frac{0.1\theta}{0.1} = \theta$$



(b)

Cuando $\theta = \pi$, $\psi = \tan^{-1}\pi = 72.3°$, por lo que $\phi = 90° - \psi = 17.7°$, como se muestra en la figura 13-21*c*. Identifique las cuatro incógnitas en la figura 13-21*b*.

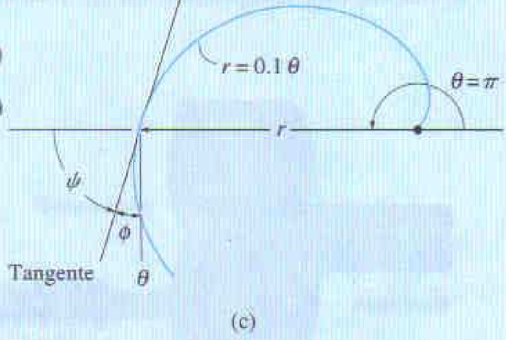
*Ecuaciones de movimiento.* Usando $\phi = 17.7°$ y los datos mostrados en la figura 13-21*b*, tenemos

$$\overset{+}{\leftarrow} \Sigma F_r = ma_r; \qquad N_C \cos 17.7° = 0.5a_r \qquad (1)$$

$$+\downarrow \Sigma F_\theta = ma_\theta; \qquad F_C - N_C \operatorname{sen} 17.7° = 0.5a_\theta \qquad (2)$$

*Cinemática.* Las derivadas con respecto al tiempo de $r$ y $\theta$ son

$$\dot{\theta} = 4 \text{ rad/s} \qquad r = 0.1\theta$$
$$\ddot{\theta} = 0 \qquad \dot{r} = 0.1\dot{\theta} = 0.1(4) = 0.4 \text{ m/s}$$
$$\ddot{r} = 0.1\ddot{\theta} = 0$$



(c)

Fig. 13-21

En el instante $\theta = \pi$ rad,

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = 0 - 0.1(\pi)(4)^2 = -5.03 \text{ m/s}^2$$
$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = 0 + 2(0.4)(4) = 3.20 \text{ m/s}^2$$

Sustituyendo estos resultados en las ecuaciones 1 y 2 y resolviendo resulta

$$N_C = -2.64 \text{ N}$$
$$F_C = 0.800 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

¿Qué indica el signo negativo de $N_C$?

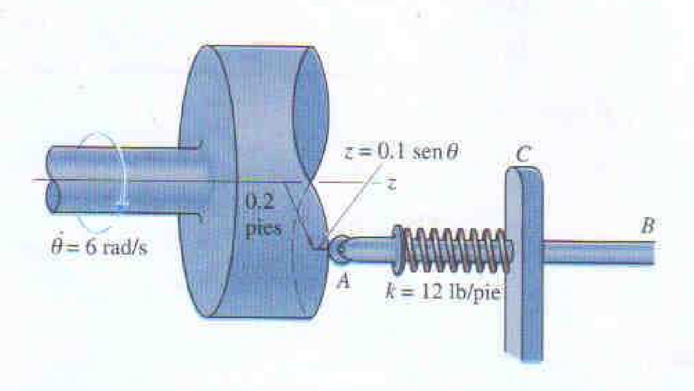
# PROBLEMAS

**13-83.** Una partícula que tiene una masa de 1.5 kg se mueve a lo largo de una trayectoria definida por las ecuaciones $r = (4 + 3t)$ m, $\theta = (t^2 + 2)$ rad, y $z = (6 - t^3)$ m, donde $t$ está en segundos. Determine las componentes $r$, $\theta$ y $z$ de fuerza que la trayectoria ejerce sobre la partícula cuando $t = 2$ s.

***13-84.** La trayectoria de movimiento de una partícula de 5 lb en el plano horizontal es descrita en términos de coordenadas polares como $r = (2t + 1)$ pies y $\theta = (0.5t^2 - t)$ rad, donde $t$ está en segundos. Determine la magnitud de la fuerza desbalanceada que actúa sobre la partícula cuando $t = 2$ s.

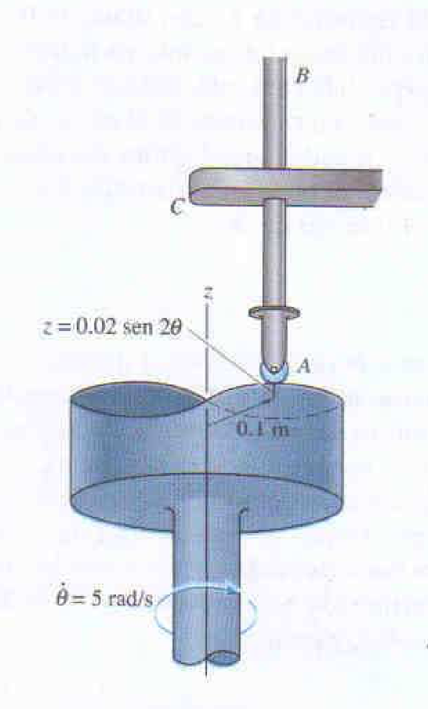
**13-85.** El seguidor $AB$ sostenido por un resorte tiene un peso de 0.75 lb y se mueve en vaivén conforme su extremo rueda sobre la superficie contorneada de la leva, donde $r = 0.2$ pies y $z = (0.1 \text{ sen } \theta)$ pies. Si la leva está girando a razón constante de 6 rad/s, determine la fuerza en el extremo $A$ del seguidor cuando $\theta = 90°$. En esta posición el resorte está comprimido en 0.4 pies. Desprecie la fricción en la chumacera $C$.

**13-86.** El seguidor $AB$ sostenido por un resorte tiene un peso de 0.75 lb y se mueve en vaivén conforme su extremo rueda sobre la superficie contorneada de la leva, donde $r = 0.2$ pies y $z = (0.1 \text{ sen } 2\theta)$ pies. Si la leva está girando a razón constante de 6 rad/s, determine las fuerzas máxima y mínima que el seguidor ejerce sobre la leva si el resorte está comprimido en 0.2 pies cuando $\theta = 45°$.



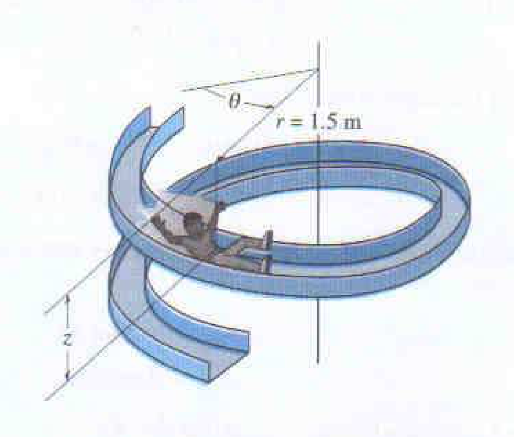

Probs. 13–85/86

**13-87.** La barra $AB$ de 2 kg se mueve hacia arriba y hacia abajo cuando su extremo se desliza sobre la superficie lisa contorneada de la leva, donde $r = 0.1$ m y $z = (0.02 \text{ sen } 2\theta)$ m. Si la leva está girando a razón constante de 5 rad/s, determine las fuerzas máxima y mínima que la leva ejerce sobre la barra.



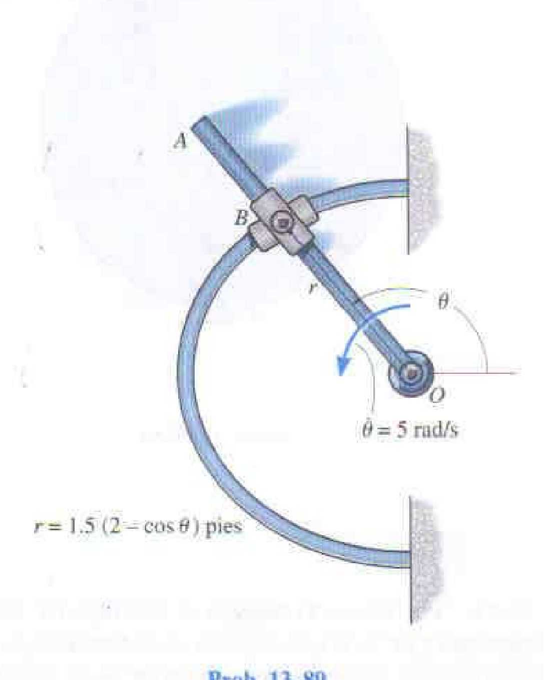

Prob. 13–87

***13-88.** El niño de 40 kg resbala hacia abajo por la resbaladilla en espiral con rapidez constante tal que su posición, medida desde la parte superior de la vía, tiene componentes $r = 1.5$ m, $\theta = (0.7t)$ rad, y $z = (-0.5t)$ m, donde $t$ está en segundos. Determine las componentes de fuerza $\mathbf{F}_r$, $\mathbf{F}_\theta$ y $\mathbf{F}_z$ que la resbaladilla ejerce sobre él en el instante $t = 2$ s. Desprecie el tamaño del niño.



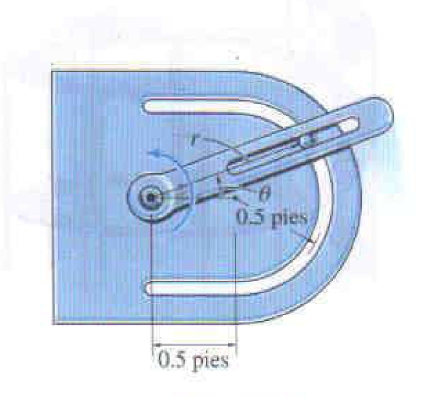

Prob. 13–88

**13-89.** La barra $OA$ gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj con velocidad angular constante de $\dot{\theta} = 5$ rad/s. El doble collar $B$ está articulado en su unión de modo tal que un collar se desliza sobre la barra en rotación y el otro sobre la barra curva *horizontal* cuya forma es descrita por la ecuación $r = 1.5(2 - \cos\theta)$ pies. Si ambos collares pesan 0.75 lb, determine la fuerza normal que la barra curva ejerce sobre un collar en el instante $\theta = 120°$. Desprecie la fricción.




Prob. 13-89

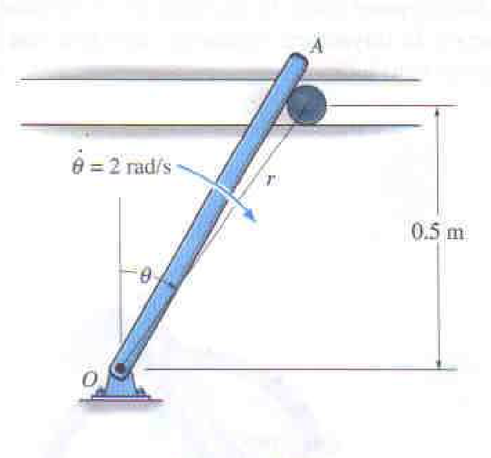
**13-90.** La partícula de 0.5 lb es guiada por la trayectoria circular usando la guía de brazo ranurado. Si el brazo tiene velocidad angular $\dot{\theta} = 4$ rad/s y aceleración angular $\ddot{\theta} = 8$ rad/s$^2$ en el instante $\theta = 30°$, determine la fuerza de la guía sobre la partícula. El movimiento ocurre en el *plano horizontal*.




Prob. 13-90

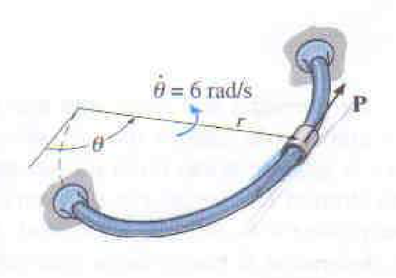
**13-91.** La partícula tiene una masa de 0.5 kg y está obligada a moverse a lo largo de la ranura lisa horizontal debido a la rotación del brazo $OA$. Determine la fuerza de la barra sobre la partícula y la fuerza normal de la ranura sobre la partícula cuando $\theta = 30°$. La barra está girando con velocidad angular constante $\dot{\theta} = 2$ rad/s. Suponga que la partícula está en contacto con sólo un lado de la ranura en cualquier instante.

***13-92.** Resuelva el problema 13−91 si el brazo tiene aceleración angular de $\ddot{\theta} = 3$ rad/s$^2$ y $\dot{\theta} = 2$ rad/s en este instante. Suponga que la partícula está en contacto con sólo un lado de la ranura en cualquier instante.




Probs. 13-91/92

**13-93.** El manguito, que tiene una masa de 2 kg, se desliza a lo largo de la barra lisa horizontal, $r = (0.4\theta)$ m, donde $\theta$ está en radianes. Si su razón angular de rotación es constante e igual a $\dot{\theta} = 6$ rad/s, determine la fuerza $P$ horizontal tangencial necesaria para producir el movimiento y la componente de fuerza horizontal normal que el manguito ejerce sobre la barra en el instante $\theta = 45°$.

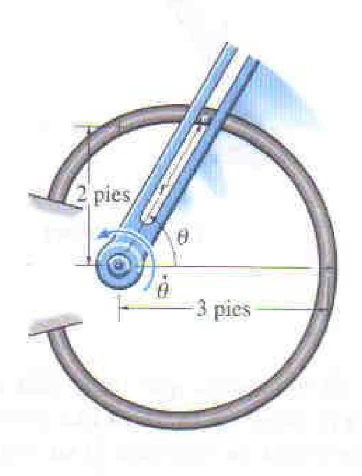



Prob. 13-93

**13-94.** La barra ranurada se usa para mover la partícula lisa de 2 lb alrededor de la trayectoria horizontal en forma de caracol, $r = (2 + \cos\theta)$ pies. Si en todo momento $\dot{\theta} = 0.5$ rad/s, determine la fuerza que la barra ejerce sobre la partícula en el instante $\theta = 90°$. La barra y la trayectoria entran en contacto con la partícula por un solo lado.

**13-95.** Resuelva el problema 13–94 en el instante $\theta = 60°$.

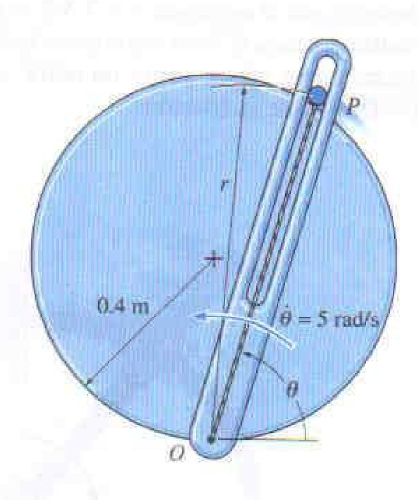
***13-96.** La barra ranurada se usa para mover la partícula lisa de 2 lb alrededor de la trayectoria horizontal en forma de caracol, $r = (2 + \cos\theta)$ pies. Si $\theta = (0.5t^2)$ rad, donde $t$ está en segundos, determine la fuerza que la barra ejerce sobre la partícula en el instante $t = 1$ s. La barra y la trayectoria entran en contacto con la partícula por un solo lado.




**Probs. 13–94/95**

**13-97.** La partícula lisa tiene una masa de 80 g. Está unida a una cuerda elástica que se extiende de $O$ a $P$ y debido a la guía de brazo ranurado se mueve por la trayectoria circular *horizontal* $r = (0.8 \text{ sen } \theta)$ m. Si la cuerda tiene rigidez $k = 30$ N/m y longitud sin deformar de 0.25 m, determine la fuerza de la guía sobre la partícula cuando $\theta = 60°$. La guía tiene velocidad angular constante de $\dot{\theta} = 5$ rad/s.

**13-98.** Resuelva el problema 13–97 si $\ddot{\theta} = 2$ rad/s$^2$ cuando $\dot{\theta} = 5$ rad/s y $\theta = 60°$.



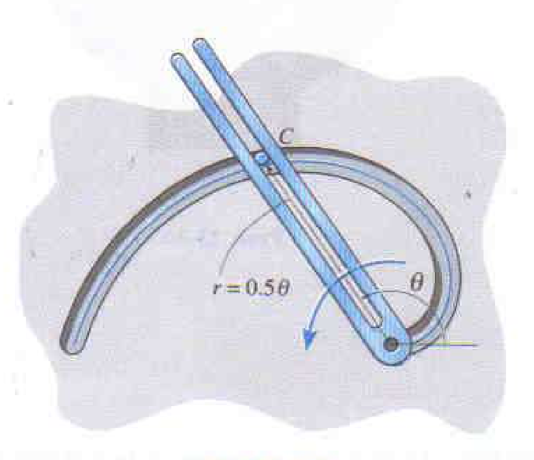

**Probs. 13–97/98**

**13-99.** Por un corto tiempo, el carruaje de 250 kg está viajando por la vía en espiral de tal modo que su posición medida desde la parte superior de la vía tiene componentes $r = 8$ m, $\theta = (0.1t + 0.5)$ rad, y $z = (-0.2t)$ m, donde $t$ está en segundos. Determine las magnitudes de las componentes de fuerza que la vía ejerce sobre el carruaje en las direcciones $r$, $\theta$ y $z$ en el instante $t = 2$ s. Desprecie el tamaño del vehículo.



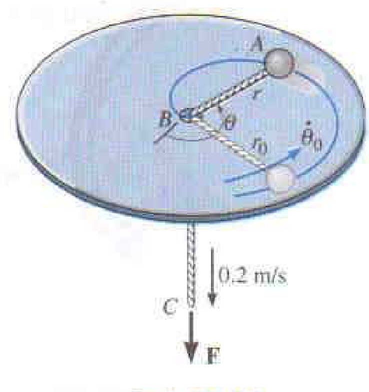

**Prob. 13–99**

***13-100.** Usando una barra ranurada, un cilindro liso $C$ que tiene masa de 0.5 kg es forzado a moverse a lo largo de la trayectoria *vertical ranurada* $r = (0.5\,\theta)$ m, donde $\theta$ está en radianes. Si la posición angular del brazo es $\theta = (0.5t^2)$ rad, donde $t$ está en segundos, determine la fuerza de la barra sobre el cilindro y la fuerza normal de la ranura sobre el cilindro en el instante $t = 2$ s. El cilindro está en contacto con sólo *un borde* de la barra y la ranura en cualquier instante.



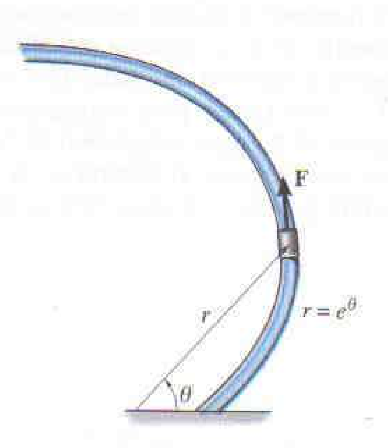

**Prob. 13–100**

**13-101.** La bola tiene una masa de 2 kg y tamaño insignificante. Originalmente está viajando alrededor de la trayectoria circular horizontal de radio $r_0 = 0.5$ m de tal manera que la razón angular de rotación es $\dot{\theta}_0 = 1$ rad/s. Si la cuerda $ABC$ unida es jalada hacia abajo por el agujero a rapidez constante de 0.2 m/s, determine la tensión que la cuerda ejerce sobre la bola en el instante $r = 0.25$ m. Calcule también la velocidad angular de la bola en este instante. Desprecie los efectos de la fricción entre la bola y el plano horizontal. *Sugerencia*: Muestre primero que la ecuación de movimiento en la dirección $\theta$ da $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = (1/r)(d(r^2\dot{\theta})/dt) = 0$. Al integrar, $r^2\dot{\theta} = c$, donde la constante $c$ es determinada a partir de los datos del problema.



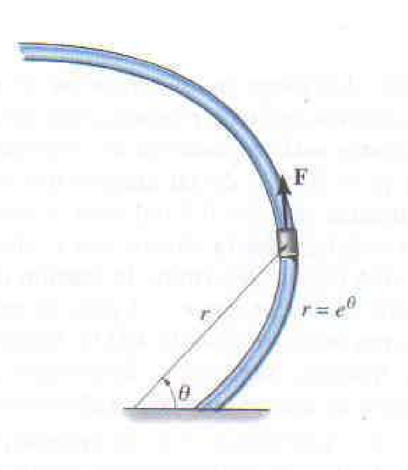

**Prob. 13–101**

**13-102.** El collar tiene una masa de 2 kg y viaja a lo largo de la barra lisa horizontal definida por la espiral equiangular $r = (e^\theta)$ m, donde $\theta$ está en radianes. Determine la fuerza tangencial $F$ y la fuerza normal $N$ que actúan sobre el collar cuando $\theta = 45°$ si la fuerza $F$ mantiene un movimiento angular constante $\dot{\theta} = 2$ rad/s.



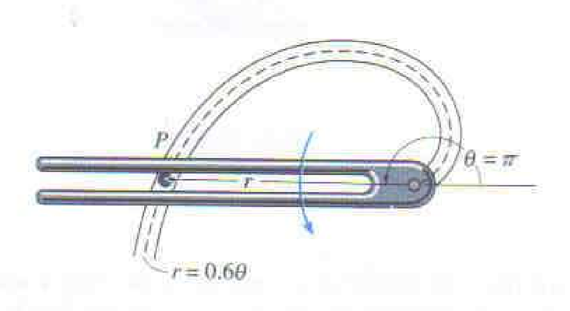

**Prob. 13–102**

**13-103.** El collar tiene una masa de 2 kg y viaja a lo largo de la barra lisa horizontal definida por la espiral equiangular $r = (e^\theta)$ m, donde $\theta$ está en radianes. Determine la fuerza tangencial $F$ y la fuerza normal $N$ que actúan sobre el collar cuando $\theta = 90°$, si la fuerza $F$ mantiene un movimiento angular constante $\dot{\theta} = 2$ rad/s.



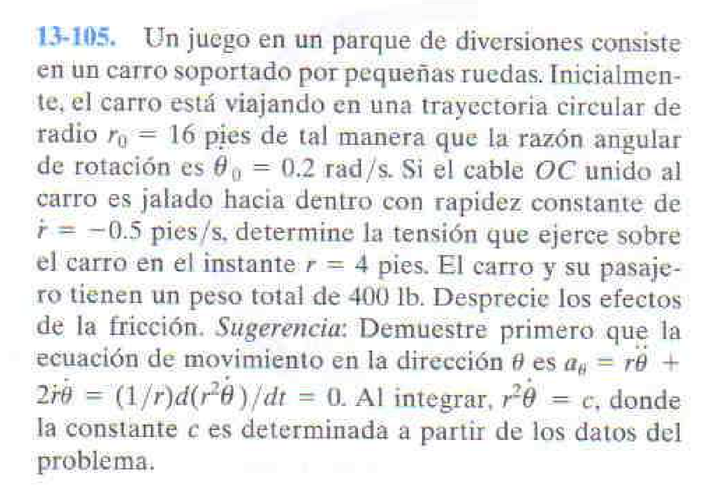

**Prob. 13–103**

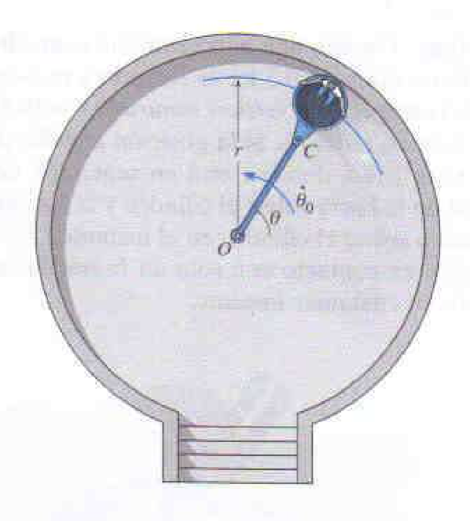
***13-104.** Usando una barra ahorquillada, un cilindro liso $P$, con masa de 0.4 kg, es forzado a moverse a lo largo de la trayectoria *vertical ranurada* $r = (0.6\,\theta)$ m, donde $\theta$ está en radianes. Si el cilindro tiene rapidez constante $v_C = 2$ m/s, determine la fuerza de la barra y la fuerza normal de la ranura sobre el cilindro en el instante $\theta = \pi$ radianes. Suponga que el cilindro está en contacto con sólo *un borde* de la barra y la ranura en cualquier instante. *Sugerencia*: Para obtener las derivadas con respecto al tiempo necesarias para calcular las componentes de la aceleración del cilindro $a_r$ y $a_\theta$, tome las primera y segunda derivadas con respecto al tiempo de $r = 0.6\theta$. Luego, para información adicional, use la ecuación 12-26 para determinar $\dot{\theta}$. Tome también la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 12-26, observando que $\dot{v}_C = 0$, para determinar $\ddot{\theta}$.




**Prob. 13–104**

**13-105.** Un juego en un parque de diversiones consiste en un carro soportado por pequeñas ruedas. Inicialmente, el carro está viajando en una trayectoria circular de radio $r_0 = 16$ pies de tal manera que la razón angular de rotación es $\dot{\theta}_0 = 0.2$ rad/s. Si el cable $OC$ unido al carro es jalado hacia dentro con rapidez constante de $\dot{r} = -0.5$ pies/s, determine la tensión que ejerce sobre el carro en el instante $r = 4$ pies. El carro y su pasajero tienen un peso total de 400 lb. Desprecie los efectos de la fricción. *Sugerencia*: Demuestre primero que la ecuación de movimiento en la dirección $\theta$ es $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} = (1/r)d(r^2\dot{\theta})/dt = 0$. Al integrar, $r^2\dot{\theta} = c$, donde la constante $c$ es determinada a partir de los datos del problema.

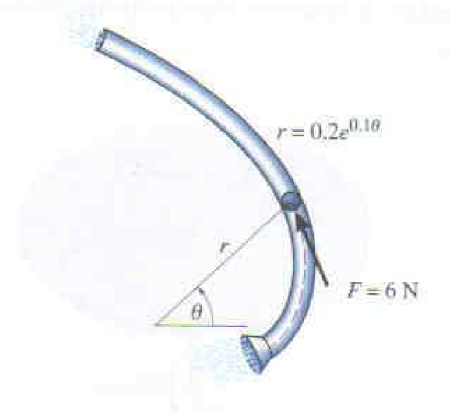





**Prob. 13–105**

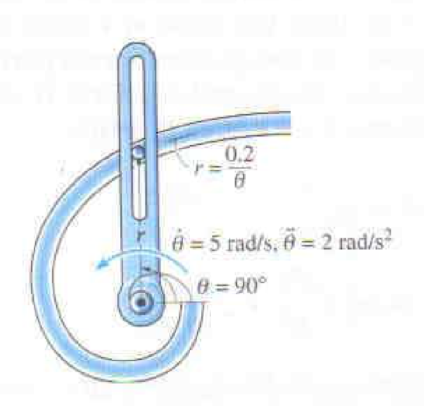
**13-106.** Usando aire a presión, la bola de 0.5 kg es forzada a moverse por el tubo que se encuentra en el *plano horizontal* y tiene forma de espiral logarítmica. Si la fuerza tangencial ejercida sobre la bola debido al aire es de 6 N, determine la razón de crecimiento en la rapidez de la bola en el instante $\theta = \pi/2$. ¿En qué dirección actúa la bola?

**13-107.** Resuelva el problema 13-106 si el tubo se encuentra en un *plano vertical*.

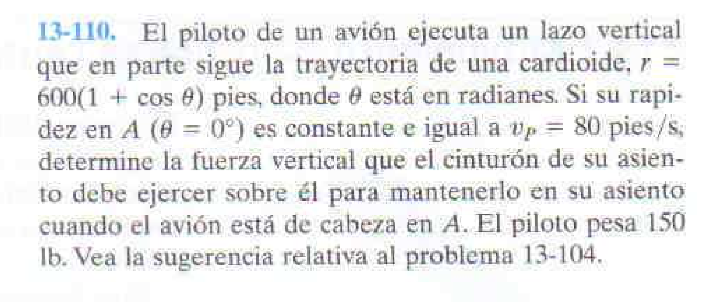



**Probs. 13–106/107**

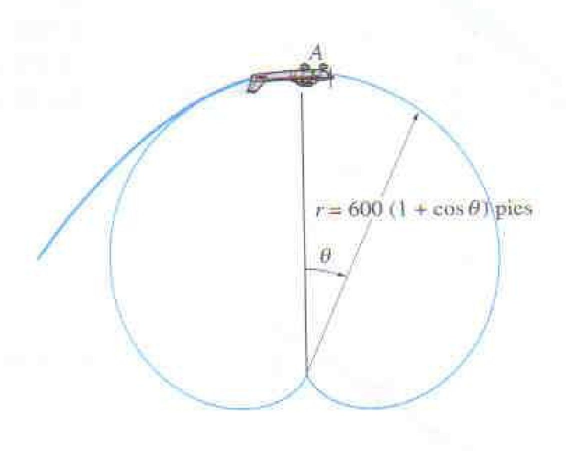
***13-108.** El brazo está girando a razón de $\dot{\theta} = 5$ rad/s cuando $\ddot{\theta} = 2$ rad/s$^2$ y $\theta = 90°$. Determine la fuerza normal que debe ejercer sobre la partícula de 0.5 kg si la partícula está confinada a moverse a lo largo de la trayectoria ranurada definida por la espiral hiperbólica *horizontal* $r\theta = 0.2$ m.




**Prob. 13–108**

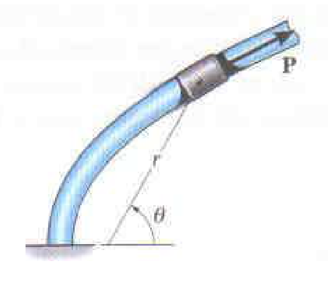


**13-110.** El piloto de un avión ejecuta un lazo vertical que en parte sigue la trayectoria de una cardioide, $r = 600(1 + \cos\theta)$ pies, donde $\theta$ está en radianes. Si su rapidez en $A$ ($\theta = 0°$) es constante e igual a $v_P = 80$ pies/s, determine la fuerza vertical que el cinturón de su asiento debe ejercer sobre él para mantenerlo en su asiento cuando el avión está de cabeza en $A$. El piloto pesa 150 lb. Vea la sugerencia relativa al problema 13-104.



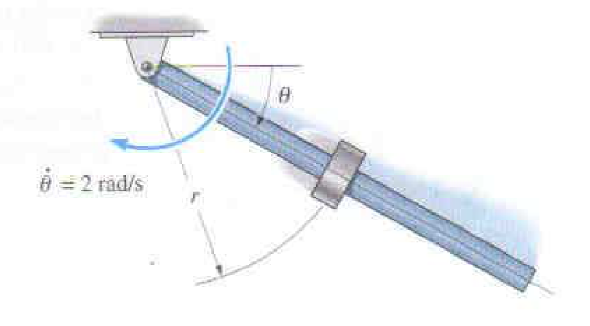

**Prob. 13–110**

**13-109.** El collar, que tiene un peso de 3 lb, resbala a lo largo de la barra lisa que permanece en el *plano horizontal* y tiene la forma de una parábola $r = 4/(1 - \cos\theta)$, donde $\theta$ está en radianes y $r$ en pies. Si la razón angular del collar es constante y es igual a $\dot{\theta} = 4$ rad/s, determine la fuerza tangencial $P$ retardante necesaria para causar el movimiento y la fuerza normal que el collar ejerce sobre la barra en el instante $\theta = 90°$.



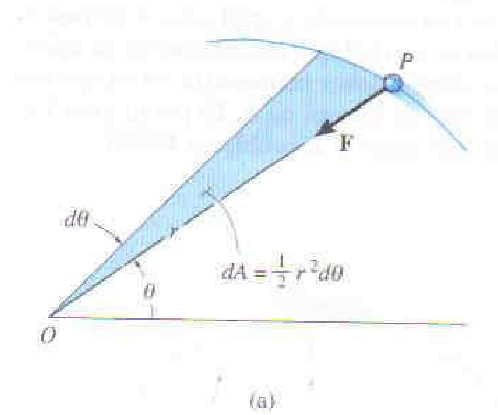

**Prob. 13–109**

**13-111.** Un manguito de 0.2 kg se desliza a lo largo de una barra lisa. Si la barra tiene una razón angular constante de rotación $\dot{\theta} = 2$ rad/s en el plano vertical, muestre que las ecuaciones de movimiento para el manguito son $\ddot{r} - 4r - 9.81 \operatorname{sen}\theta = 0$ y $0.8\dot{r} + N_s - 1.962\cos\theta = 0$, donde $N_s$ es la magnitud de la fuerza normal de la barra sobre el manguito. Usando los métodos de las ecuaciones diferenciales, se puede mostrar que la solución de la primera de estas ecuaciones es $r = C_1e^{-2t} + C_2e^{2t} - (9.81/8)\operatorname{sen} 2t$. Si $r$, $\dot{r}$ y $\theta$ son cero cuando $t = 0$, evalúe las constantes $C_1$ y $C_2$ y determine $r$ en el instante $\theta = \pi/4$ radianes.

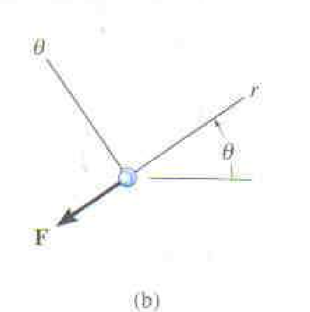



**Prob. 13–111**

# *13.7 Movimiento bajo fuerza central y mecánica del espacio




(a)




(b)

**Fig. 13–22**

Si una partícula se está moviendo sólo bajo la influencia de una fuerza que tiene una línea de acción dirigida siempre hacia un punto fijo, el movimiento se llama *movimiento bajo fuerza central*. Este tipo de movimiento es causado comúnmente por fuerzas electrostáticas y gravitatorias.

Para determinar el movimiento, consideraremos la partícula $P$ mostrada en la figura 13-22$a$, la cual tiene una masa $m$ y actúa sobre ella sólo la fuerza central $\mathbf{F}$. El diagrama de cuerpo libre para la partícula se muestra en la figura 13-22$b$. Usando coordenadas polares $(r, \theta)$, las ecuaciones de movimiento, ecuaciones 13-9, toman la forma

$$-F = m\left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]$$

$$0 = m\left(r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right) \qquad (13\text{–}11)$$

La segunda de estas ecuaciones puede escribirse en la forma

$$\frac{1}{r}\left[\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)\right] = 0$$

de manera que al integrar se obtiene

$$r^2\frac{d\theta}{dt} = h \qquad (13\text{–}12)$$

Aquí $h$ es una constante de integración. A partir de la figura 13-22$a$ advierta que el área sombreada descrita por el radio $r$, conforme $r$ se mueve por un ángulo $d\theta$, es $dA = \frac{1}{2}r^2 d\,\theta$. Si la *velocidad areal* es definida como

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{2} \qquad (13\text{–}13)$$

entonces, se ve que la velocidad areal para una partícula sometida a un movimiento bajo fuerza central es *constante*. En otras palabras, la partícula barrerá segmentos iguales de área por unidad de tiempo al viajar a lo largo de la trayectoria. Para obtener la *trayectoria de movimiento*, $r = f(\theta)$, la variable independiente $t$ debe ser eliminada de las ecuaciones 13-11. Usando la regla de la cadena del cálculo y la ecuación 13-12, las derivadas con respecto al tiempo de las ecuaciones 13-11 pueden ser reemplazadas por

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}$$

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right) = \frac{d}{d\theta}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)\frac{d\theta}{dt} = \left[\frac{d}{d\theta}\left(\frac{h}{r^2}\frac{dr}{d\theta}\right)\right]\frac{h}{r^2}$$

Sustituyendo una nueva variable dependiente $\xi = 1/r$ en la segunda ecuación, tenemos

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -h^2\xi^2\frac{d^2\xi}{d\theta^2}$$

Además, el cuadrado de la ecuación 13-12 es

$$\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = h^2\xi^4$$

Sustituyendo estas dos últimas ecuaciones en la primera de las ecuaciones 13-11 obtenemos

$$-h^2\xi^2\frac{d^2\xi}{d\theta^2} - h^2\xi^3 = -\frac{F}{m}$$

o bien

$$\frac{d^2\xi}{d\theta^2} + \xi = \frac{F}{mh^2\xi^2} \qquad (13\text{–}14)$$

Esta ecuación diferencial define la trayectoria sobre la que viaja la partícula cuando está sometida a la fuerza central* **F**.

Consideraremos ahora la fuerza de atracción gravitatoria. Algunos ejemplos comunes de sistemas de fuerza central que dependen de la gravitación incluyen el movimiento de la Luna y de los satélites artificiales con respecto a la Tierra, y el movimiento de los planetas alrededor del Sol. Como un problema típico en mecánica del espacio, considere la trayectoria de un satélite o de un vehículo espacial lanzado en órbita de vuelo libre con velocidad inicial $\mathbf{v}_0$, figura 13-23. Supondremos que esta velocidad es inicialmente *paralela* a la tangente a la superficie de la Tierra, como se muestra en la figura.† Justo después que el satélite es liberado para entrar en vuelo libre, la única fuerza que actúa sobre él es la fuerza gravitatoria de la Tierra. (La atracción gravitatoria que generan otros cuerpos como la Luna o el Sol será despreciada, ya que para órbitas cercanas a la Tierra su efecto es pequeño en comparación con la gravitación de la Tierra.) De acuerdo con la ley de la gravitación de Newton, la fuerza **F** actúa siempre entre los centros de masa de la Tierra y el satélite, figura 13-23. A partir de la ecuación 13-1, esta fuerza de atracción tiene magnitud de

$$F = G\frac{M_e m}{r^2}$$

donde $M_e$ y $m$ representan la masa de la Tierra y del satélite, respectivamente, $G$ es la constante gravitatoria, y $r$ es la distancia entre los cen-



Este satélite está sometido a una fuerza central y entonces su movimiento orbital puede ser previsto con gran aproximación usando las ecuaciones desarrolladas en esta sección.

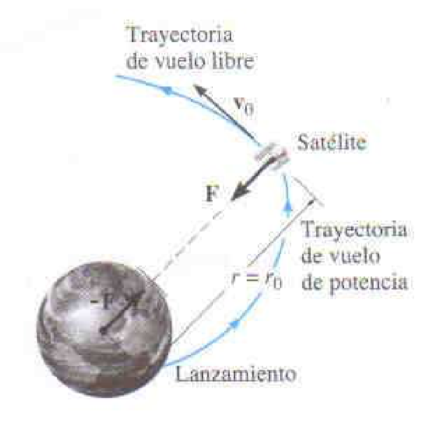
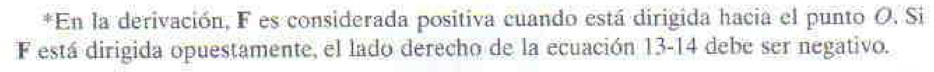



Fig. 13–23



*En la derivación, **F** es considerada positiva cuando está dirigida hacia el punto $O$. Si **F** está dirigida opuestamente, el lado derecho de la ecuación 13-14 debe ser negativo.

†El caso en que $\mathbf{v}_0$ actúa con algún ángulo inicial $\theta$ a la tangente es descrito convenientemente usando la conservación del *momentum* angular (vea el problema 15-116).



tros de masa. Haciendo $\xi = 1/r$ en la ecuación anterior y sustituyendo el resultado en la ecuación 13-14, obtenemos

$$\frac{d^2\xi}{d\theta^2} + \xi = \frac{GM_e}{h^2} \qquad (13\text{–}15)$$

Esta ecuación diferencial ordinaria de segundo orden tiene coeficientes constantes y no es homogénea. La solución está representada como la suma de las soluciones complementaria y particular. La solución complementaria se obtiene cuando el término a la derecha es igual a cero. Esta solución es

$$\xi_c = C\cos(\theta - \phi)$$

donde $C$ y $\phi$ son constantes de integración. La solución particular es

$$\xi_p = \frac{GM_e}{h^2}$$

Así, la solución completa de la ecuación 13-15 es

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_c + \xi_p \\ &= \frac{1}{r} = C\cos(\theta - \phi) + \frac{GM_e}{h^2} \end{aligned} \qquad (13\text{–}16)$$

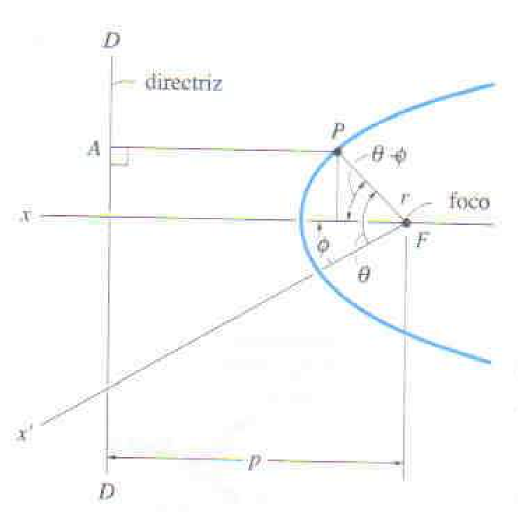



Fig. 13–24

La validez de este resultado puede ser verificada por sustitución en la ecuación 13-15.

La ecuación 13-16 representa la *trayectoria de vuelo libre* del satélite. Es la ecuación de una sección cónica expresada en términos de coordenadas polares. Como se muestra en la figura 13-24, una *sección cónica* es definida como el lugar geométrico de un punto $P$, el cual se mueve en un plano de manera tal que la razón de su distancia desde un punto fijo $F$ a su distancia desde una línea fija es constante. El punto fijo se denomina *foco* y la línea fija $DD$ se llama *directriz*. La razón constante es referida como *excentricidad* de la sección cónica y se denota por $e$. Así,

$$e = \frac{FP}{PA}$$

que puede ser escrita en la forma

$$FP = r = e(PA) = e[p - r\cos(\theta - \phi)]$$

o bien

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{p}\cos(\theta - \phi) + \frac{1}{ep}$$

Comparando esta ecuación con la ecuación 13-16, se ve que la excentricidad de la sección cónica para la trayectoria es

$$e = \frac{Ch^2}{GM_e} \qquad (13\text{–}17)$$

y la distancia fija del foco a la directriz es

$$p = \frac{1}{C} \tag{13–18}$$

Siempre que el ángulo polar $\theta$ se mida desde el eje $x$ (un eje de simetría ya que es perpendicular a la directriz), el ángulo $\phi$ será cero, figura 13-24, y por tanto la ecuación 13-16 se reduce a

$$\frac{1}{r} = C \cos \theta + \frac{GM_e}{h^2} \tag{13–19}$$

Las constantes $h$ y $C$ son determinadas a partir de los datos obtenidos para la posición y la velocidad del satélite al final de la *trayectoria de vuelo de potencia*. Por ejemplo, si la altura inicial o distancia al vehículo espacial es $r_0$ (medida desde el centro de la Tierra) y su rapidez inicial es $v_0$ al principio de su vuelo libre, figura 13-25, entonces la constante $h$ se puede obtener con la ecuación 13-12. Cuando $\theta = \phi = 0°$, la velocidad $\mathbf{v}_0$ no tiene componente radial; por tanto, a partir de la ecuación 12-25, $v_0 = r_0(d\theta/dt)$, de modo que

$$h = r_0^2 \frac{d\theta}{dt}$$

o bien

$$h = r_0 v_0 \tag{13–20}$$

Para determinar $C$, use la ecuación 13-19 con $\theta = 0°$, $r = r_0$, y sustituya la ecuación 13-20 por $h$:

$$C = \frac{1}{r_0}\left(1 - \frac{GM_e}{r_0 v_0^2}\right) \tag{13–21}$$

La ecuación para la trayectoria de vuelo libre es entonces

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{r_0}\left(1 - \frac{GM_e}{r_0 v_0^2}\right)\cos \theta + \frac{GM_e}{r_0^2 v_0^2} \tag{13–22}$$

El tipo de trayectoria tomada por el satélite es determinado a partir del valor de la excentricidad de la sección cónica como está dada por la ecuación 13-17. Si

$e = 0$ la trayectoria de vuelo libre es un círculo
$e = 1$ la trayectoria de vuelo libre es una parábola
$e < 1$ la trayectoria de vuelo libre es una elipse
$e > 1$ la trayectoria de vuelo libre es una hipérbola (13–23)

Cada una de estas trayectorias se muestra en la figura 13-25. A partir de las curvas se ve que cuando el satélite sigue una trayectoria parabólica, está "en la frontera" de nunca retornar a su punto inicial de partida. La velocidad inicial de lanzamiento, $\mathbf{v}_0$, requerida para que el satélite siga una trayectoria parabólica se llama *velocidad de escape*. La rapidez, $v_e$, puede ser determinada usando la segunda de las ecuaciones 13-23 con las ecuaciones 13-17, 13-20 y 13-21. Se deja como un ejercicio mostrar que

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM_e}{r_0}} \qquad (13\text{–}24)$$

La rapidez $v_c$ requerida para lanzar un satélite en *órbita circular* puede encontrarse usando la primera de las ecuaciones 13-23. Como $e$ está relacionada con $h$ y $C$, ecuación 13-17, $C$ debe ser cero para satisfacer esta ecuación (a partir de la ecuación 13-20, $h$ no puede ser cero); por tanto, usando la ecuación 13-21, tenemos

$$v_c = \sqrt{\frac{GM_e}{r_0}} \qquad (13\text{–}25)$$

Si $r_0$ representa una altura mínima para el lanzamiento, en donde la resistencia de fricción de la atmósfera se ignora, toda rapidez en el lanzamiento que sea menor a $v_c$ hará que el satélite entre de regreso a la atmósfera de la Tierra y se queme o se estrelle, figura 13-25.

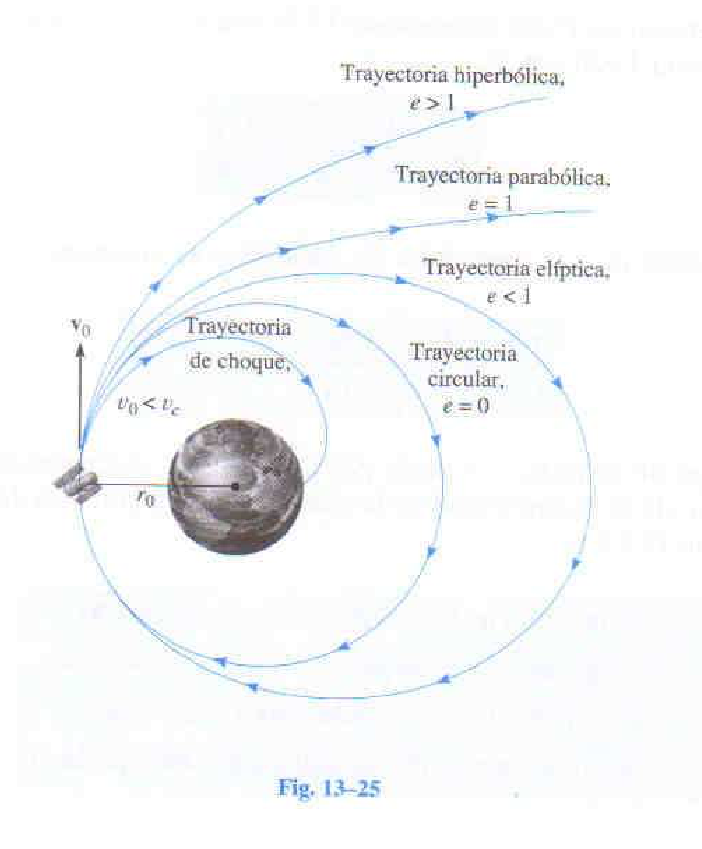



Fig. 13–25

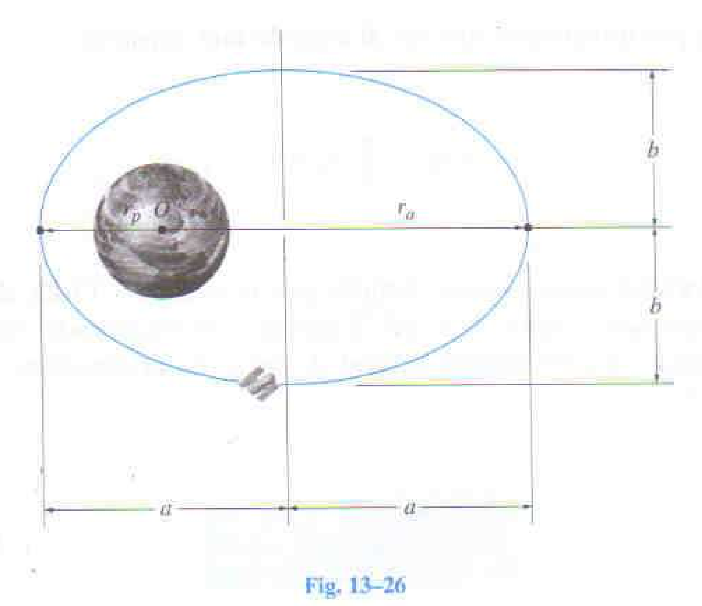



Fig. 13–26

Todas las trayectorias descritas por planetas y por la mayoría de los satélites son elípticas, figura 13-26. Para la órbita de un satélite alrededor de la Tierra, la *distancia mínima* de la órbita al centro $O$ de la Tierra (que está ubicada en uno de los focos de la elipse) es $r_p$ y se puede calcular usando la ecuación 13-22 con $\theta = 0°$. Por tanto,

$$r_p = r_0 \qquad (13\text{–}26)$$

Esta distancia mínima se llama *perigeo* de la órbita. El *apogeo* o distancia máxima $r_a$ se puede calcular usando la ecuación 13-22 con $\theta = 180°$.*
Entonces,

$$r_a = \frac{r_0}{(2GM_e/r_0v_0^2) - 1} \qquad (13\text{–}27)$$

Con referencia a la figura 13-26, el eje semimayor $a$ de la elipse es

$$a = \frac{r_p + r_a}{2} \qquad (13\text{–}28)$$

Usando geometría analítica, se puede mostrar que el eje semimenor $b$ está determinado mediante la ecuación

$$b = \sqrt{r_p r_a} \qquad (13\text{–}29)$$

*En realidad, la terminología perigeo y apogeo pertenece sólo a órbitas alrededor de la *Tierra*. Si cualquier otro cuerpo celeste está ubicado en el foco de una órbita elíptica, las distancias mínima y máxima son llamadas, respectivamente, *periapsis* y *apoapsis* de la órbita.

Además, por integración directa, el área de una elipse es

$$A = \pi ab = \frac{\pi}{2}(r_p + r_a)\sqrt{r_p r_a} \tag{13–30}$$

La velocidad areal ha sido definida por la ecuación 13-13, $dA/dt = h/2$. Integrando resulta $A = hT/2$, donde $T$ es el *periodo* requerido para efectuar una revolución orbital. A partir de la ecuación 13-30, el periodo es

$$T = \frac{\pi}{h}(r_p + r_a)\sqrt{r_p r_a} \tag{13–31}$$

Además de predecir la trayectoria orbital de los satélites de la Tierra, la teoría desarrollada en esta sección es válida, en gran medida, para predecir el movimiento real de los planetas que viajan alrededor del Sol. En este caso, la masa del Sol, $M_s$, debe ser sustituida por $M_e$ cuando se usen las fórmulas apropiadas.

El hecho de que los planetas siguen órbitas elípticas alrededor del Sol fue descubierto por el astrónomo alemán Johannes Kepler a principios del siglo XVII. Este descubrimiento fue realizado *antes* que Newton desarrollara las leyes del movimiento y la ley de la gravitación, y eventualmente proporcionó una prueba importante de la validez de esas leyes. Las leyes de Kepler, desarrolladas despues de 20 años de observación planetaria, son resumidas como sigue:

1. Todo planeta se mueve en su órbita de manera que la línea que lo une al Sol barre áreas iguales en intervalos iguales de tiempo, independientemente de la longitud de la línea.

2. La órbita de cada planeta es una elipse con el Sol situado en uno de sus focos.

3. El cuadrado del periodo de cualquier planeta es directamente proporcional al cubo del eje menor de su órbita.

Un enunciado matemático de la primera y la segunda leyes está dado por las ecuaciones 13-13 y 13-22, respectivamente. La tercera ley puede demostrarse a partir de la ecuación 13-31 usando las ecuaciones 13-19, 13-28 y 13-29.

**EJEMPLO 13.13**

Un satélite es lanzado a 600 km de la superficie de la Tierra con velocidad inicial de 30 Mm/h actuando paralelamente a la tangente a la superficie de la Tierra, figura 13-27. Suponiendo que el radio de la Tierra mide 6378 km y que su masa es de $5.976(10^{24})$ kg, determine (a) la excentricidad de la trayectoria orbital, y (b) la velocidad del satélite en el apogeo.

**Solución**

*Parte (a).* La excentricidad de la órbita se obtiene usando la ecuación 13-17. Las constantes $h$ y $C$ son determinadas primero con las ecuaciones 13-20 y 13-21. Como

$$r_p = r_0 = 6378 \text{ km} + 600 \text{ km} = 6.978(10^6) \text{ m}$$

$$v_0 = 30 \text{ Mm/h} = 8333.3 \text{ m/s}$$

entonces

$$h = r_p v_0 = 6.978(10^6)(8333.3) = 58.15(10^9) \text{ m}^2/\text{s}$$

$$C = \frac{1}{r_p}\left(1 - \frac{GM_e}{r_p v_0^2}\right)$$

$$= \frac{1}{6.978(10^6)}\left\{1 - \frac{66.73(10^{-12})[5.976(10^{24})]}{6.978(10^6)(8333.3)^2}\right\} = 25.4(10^{-9}) \text{ m}^{-1}$$

Por consiguiente,

$$e = \frac{Ch^2}{GM_e} = \frac{2.54(10^{-8})[58.15(10^9)]^2}{66.73(10^{-12})[5.976(10^{24})]} = 0.215 < 1 \qquad \textit{Resp.}$$

A partir de la ecuación 13-23, observe que la órbita es una *elipse*.

*Parte (b).* Si el satélite fuese lanzado en el apogeo $A$ mostrado en la figura 13-27, con velocidad $\mathbf{v}_A$, se mantendría la misma órbita siempre que

$$h = r_p v_0 = r_a v_A = 58.15(10^9) \text{ m}^2/\text{s}$$

Usando la ecuación 13-27, tenemos

$$r_a = \frac{r_p}{\dfrac{2GM_e}{r_p v_0^2} - 1} = \frac{6.978(10^6)}{\left\{\dfrac{2[66.73(10^{-12})][5.976(10^{24})]}{6.978(10^6)(8333.3)^2} - 1\right\}} = 10.804(10^6)$$

Así,

$$v_A = \frac{58.15(10^9)}{10.804(10^6)} = 5382.2 \text{ m/s} = 19.4 \text{ Mm/h} \qquad \textit{Resp.}$$

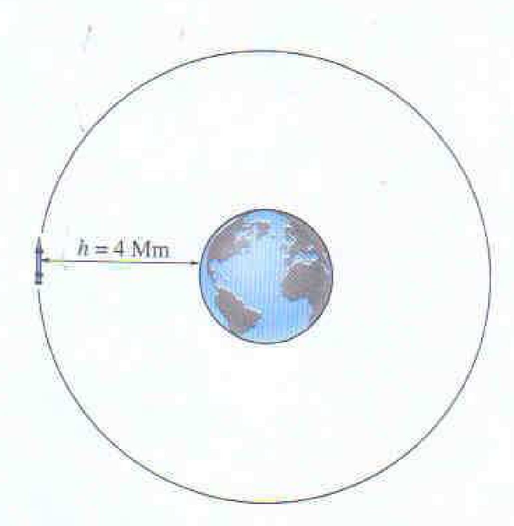



Fig. 13-27

## PROBLEMAS

En los siguientes problemas, excepto donde se indique otra cosa, suponga que el radio de la Tierra es de 6378 km, la masa de la Tierra de $5.976(10^{24})$ kg, la masa del Sol de $1.99(10^{30})$ kg, y la constante gravitatoria $G = 66.73(10^{-12})$ $m^3/(kg \cdot s^2)$.

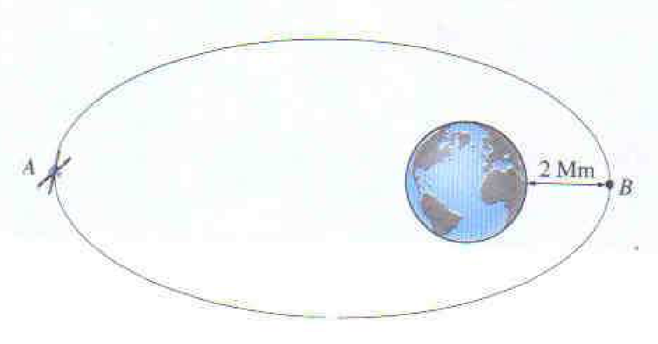
***13-112.** El cohete está en órbita circular alrededor de la Tierra a una altura $h$ = 4 Mm. Determine el incremento mínimo en rapidez que debe tener para escapar del campo gravitatorio terrestre.




Prob. 13–112

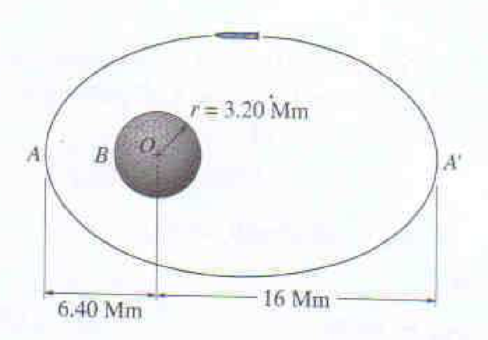
**13-113.** Demuestre la tercera ley del movimiento de Kepler. *Sugerencia*: Use las ecuaciones 13-19, 13-28, 13-29 y 13-31.

**13-114.** El satélite se está moviendo en una órbita elíptica con excentricidad $e$ = 0.25. Determine su rapidez cuando está a sus distancias máxima $A$ y mínima $B$ de la Tierra.



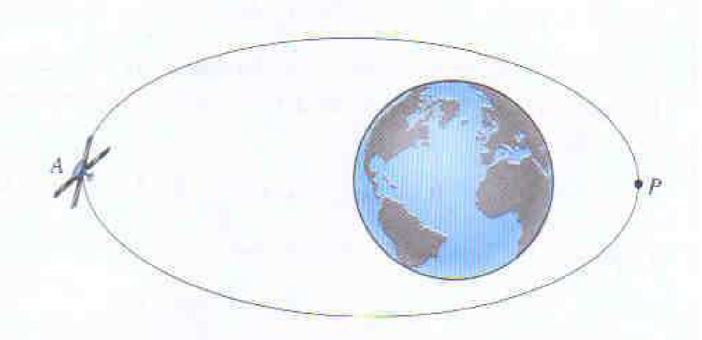

Prob. 13–114

**13-115.** El cohete está viajando en vuelo libre a lo largo de una trayectoria elíptica $A'A$. El planeta tiene masa de 0.60 veces la de la Tierra. Si el cohete tiene apoapsis y periapsis como se muestra en la figura, determine su rapidez cuando está en el punto $A$.




Prob. 13–115

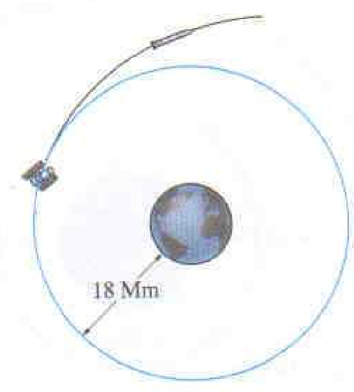
***13-116.** Una trayectoria elíptica de un satélite tiene excentricidad $e$ = 0.130. Si el satélite tiene rapidez de 15 Mm/h cuando está en el perigeo, $P$, determine su rapidez cuando llega al apogeo, $A$. ¿Qué tan lejos se encuentra de la superficie de la Tierra cuando está en $A$?

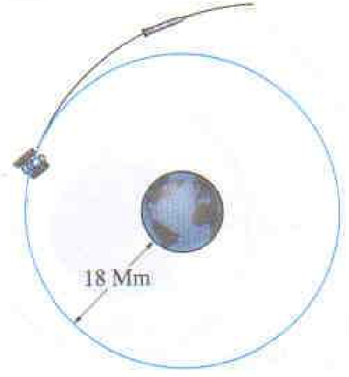



Prob. 13–116

**13-117.** Un satélite es lanzado con velocidad inicial $v_0$ = 2500 mi/h paralelamente a la superficie de la Tierra. Determine la altitud requerida (o el rango de altitudes) por arriba de la superficie de la Tierra para efectuar el lanzamiento si la trayectoria de vuelo libre va a ser (a) circular, (b) parabólica, (c) elíptica, y (d) hiperbólica. Tome $G = 34.4(10^{-9})(\text{lb} \cdot \text{pie}^2)/\text{slug}^2$, $M_e = 409(10^{21})$ slug, radio de la Tierra $r_e$ = 3960 mi, y 1 mi = 5280 pies.

**13-118.** El cohete se acopla junto a un satélite ubicado a 18 Mm sobre la superficie de la Tierra. Si el satélite está viajando en una órbita circular, determine la rapidez tangente a la superficie de la Tierra que debe aplicarse repentinamente al cohete, con relación al satélite, de tal manera que viaje en vuelo libre alejándose del satélite a lo largo de una trayectoria parabólica como se muestra.

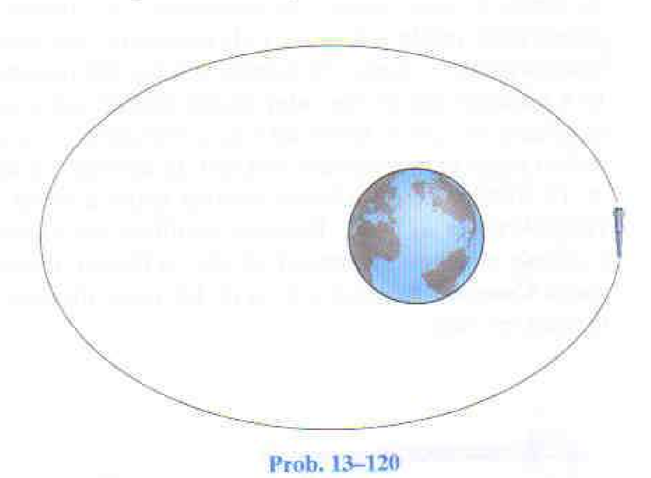


Prob. 13–118

**13-119.** La rapidez de un satélite lanzado en órbita circular con respecto a la Tierra es dada por la ecuación 13-25. Determine la rapidez de un satélite lanzado paralelamente a la superficie de la Tierra para que viaje en órbita circular a 800 km de la superficie de la Tierra.

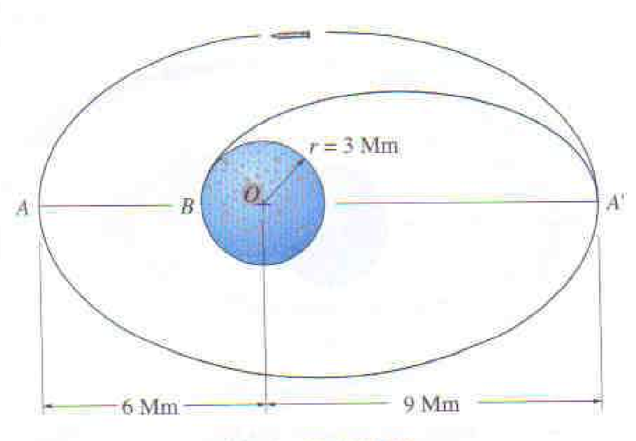
***13-120.** El cohete está en vuelo libre en una órbita elíptica con respecto a la Tierra de tal forma que la excentricidad de su órbita es $e$ y su perigeo es $r_0$. Determine el mínimo incremento de rapidez que debe tener para escapar del campo gravitatorio terrestre cuando se encuentra en este punto a lo largo de su órbita.



Prob. 13–120

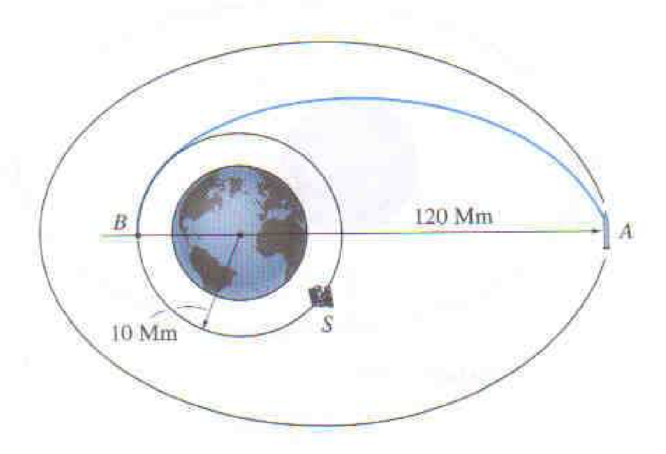
**13-121.** El cohete está viajando en vuelo libre a lo largo de una trayectoria elíptica $A'A$. El planeta no tiene atmósfera y su masa es 0.70 veces la de la Tierra. Si el cohete tiene apoapsis y periapsis como se muestra en la figura, determine su rapidez cuando está en el punto $A$.

**13-122.** Si el cohete mencionado en el problema 13-121 debe aterrizar en la superficie del planeta, determine la rapidez de vuelo libre requerida que debe tener en $A'$ para tocar el planeta en $B$. ¿Cuánto tiempo le toma aterrizar al cohete, al ir de $A'$ a $B$ a lo largo de una trayectoria elíptica?




Probs. 13–121/122

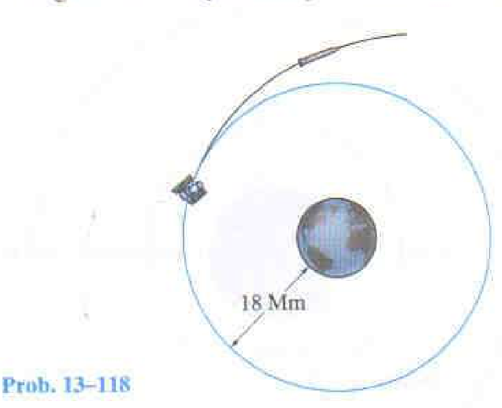
**13-123.** Un satélite $S$ viaja en órbita circular alrededor de la Tierra. Un cohete está ubicado en el apogeo de su órbita elíptica para la cual $e = 0.58$. Determine el cambio repentino de rapidez que debe ocurrir en $A$ de manera que el cohete pueda entrar en la órbita del satélite mientras está en vuelo libre a lo largo de la trayectoria elíptica mostrada en un tono distinto. Cuando llega a $B$, determine el ajuste repentino en rapidez que le debe ser aplicado al cohete para mantener la órbita circular.




Prob. 13–123

***13-124.** Un asteroide está en órbita elíptica alrededor del Sol de tal forma que su perihelio es de $9.30(10^9)$ km. Si la excentricidad de la órbita es $e = 0.073$, determine el afelio de la órbita.

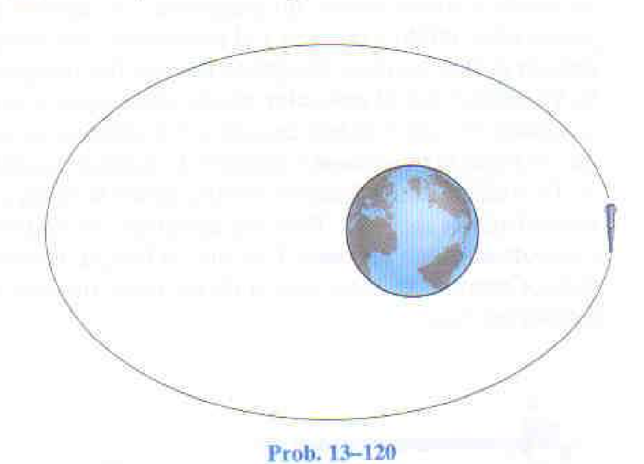
**13-118.** El cohete se acopla junto a un satélite ubicado a 18 Mm sobre la superficie de la Tierra. Si el satélite está viajando en una órbita circular, determine la rapidez tangente a la superficie de la Tierra que debe aplicarse repentinamente al cohete, con relación al satélite, de tal manera que viaje en vuelo libre alejándose del satélite a lo largo de una trayectoria parabólica como se muestra.




Prob. 13–118

**13-119.** La rapidez de un satélite lanzado en órbita circular con respecto a la Tierra es dada por la ecuación 13-25. Determine la rapidez de un satélite lanzado paralelamente a la superficie de la Tierra para que viaje en órbita circular a 800 km de la superficie de la Tierra.

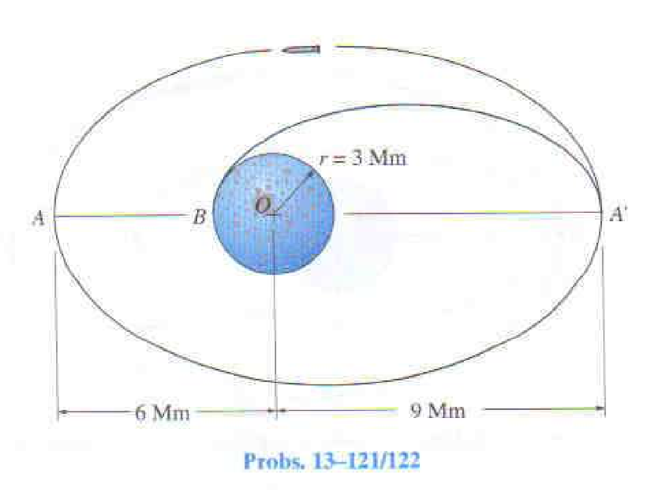
***13-120.** El cohete está en vuelo libre en una órbita elíptica con respecto a la Tierra de tal forma que la excentricidad de su órbita es $e$ y su perigeo es $r_0$. Determine el mínimo incremento de rapidez que debe tener para escapar del campo gravitatorio terrestre cuando se encuentra en este punto a lo largo de su órbita.



Prob. 13–120

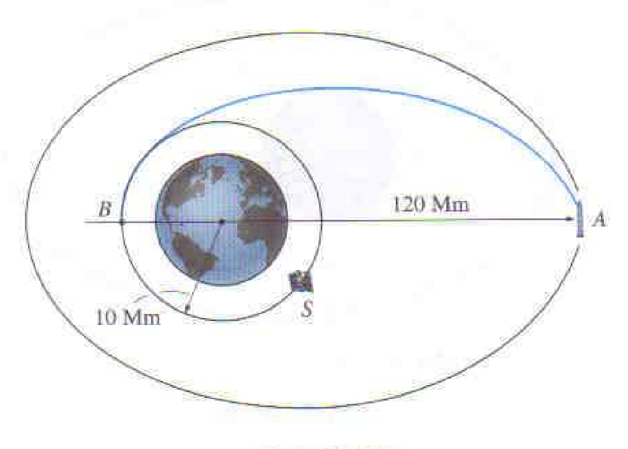
**13-121.** El cohete está viajando en vuelo libre a lo largo de una trayectoria elíptica $A'A$. El planeta no tiene atmósfera y su masa es 0.70 veces la de la Tierra. Si el cohete tiene apoapsis y periapsis como se muestra en la figura, determine su rapidez cuando está en el punto $A$.

**13-122.** Si el cohete mencionado en el problema 13-121 debe aterrizar en la superficie del planeta, determine la rapidez de vuelo libre requerida que debe tener en $A'$ para tocar el planeta en $B$. ¿Cuánto tiempo le toma aterrizar al cohete, al ir de $A'$ a $B$ a lo largo de una trayectoria elíptica?




Probs. 13–121/122

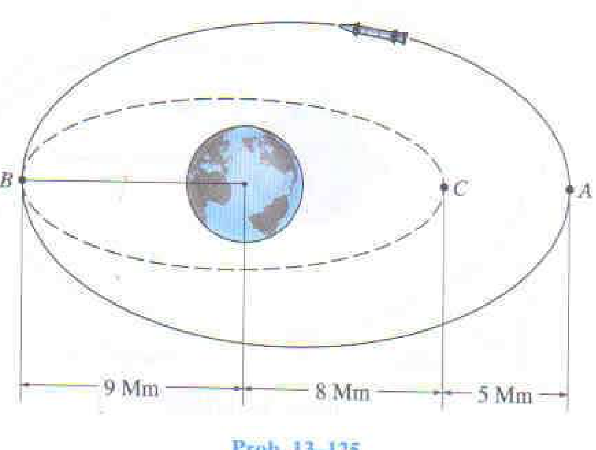
**13-123.** Un satélite $S$ viaja en órbita circular alrededor de la Tierra. Un cohete está ubicado en el apogeo de su órbita elíptica para la cual $e$ = 0.58. Determine el cambio repentino de rapidez que debe ocurrir en $A$ de manera que el cohete pueda entrar en la órbita del satélite mientras está en vuelo libre a lo largo de la trayectoria elíptica mostrada en un tono distinto. Cuando llega a $B$, determine el ajuste repentino en rapidez que le debe ser aplicado al cohete para mantener la órbita circular.




Prob. 13–123

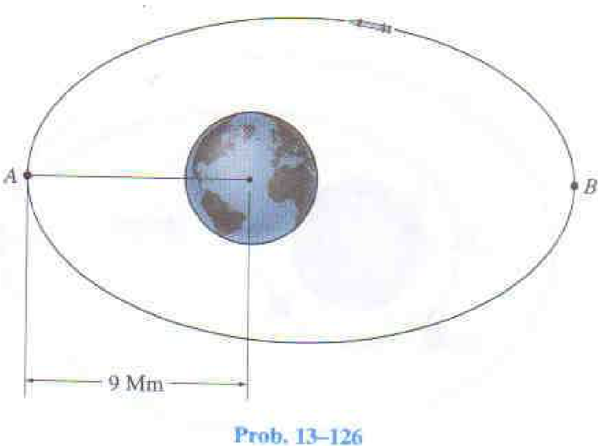
***13-124.** Un asteroide está en órbita elíptica alrededor del Sol de tal forma que su perihelio es de $9.30(10^9)$ km. Si la excentricidad de la órbita es $e$ = 0.073, determine el afelio de la órbita.

**13-125.** El cohete está viajando en una órbita elíptica de vuelo libre alrededor de la Tierra de tal manera que $e = 0.76$ como se muestra. Determine su rapidez cuando está en el punto $A$. Determine también el cambio súbito en rapidez que el cohete debe experimentar en $B$ para viajar en vuelo libre a lo largo de la órbita indicada por la trayectoria de la línea discontinua.



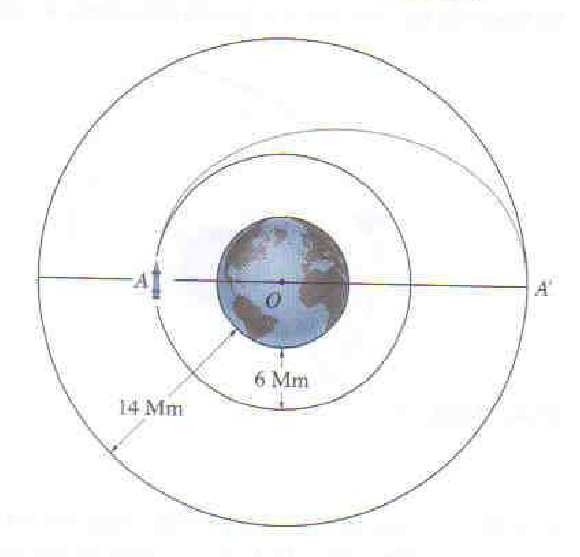

**Prob. 13–125**

**13-126.** El cohete está viajando en una órbita elíptica de vuelo libre alrededor de la Tierra de tal manera que $e = 0.76$ y su perigeo es de 9 Mm como se muestra. Determine su rapidez cuando está en el punto $B$. Determine también la disminución repentina en rapidez que el cohete debe experimentar en $A$ para viajar en una órbita circular alrededor de la Tierra.




**Prob. 13–126**

**13-127.** El cohete mostrado está originalmente en una órbita circular 6 Mm por arriba de la superficie de la Tierra. Se requiere que viaje en otra órbita circular con altitud de 14 Mm. Para que así suceda, al cohete se le da un corto pulso de potencia en $A$ de manera que viaje, de la primera órbita a la segunda, en vuelo libre a lo largo de la trayectoria elíptica señalada en un tono más claro. Determine la rapidez necesaria que el cohete debe tener en $A$ justo después del pulso de potencia, y el tiempo requerido para llegar a la órbita exterior a lo largo de la trayectoria $AA'$. ¿Qué ajuste en rapidez debe hacerse en $A'$ para mantener la segunda órbita circular?




**Prob. 13–127**

# PROYECTOS DE DISEÑO

## 13–1D. DISEÑO DE UN DISPARADOR DE RAMPA

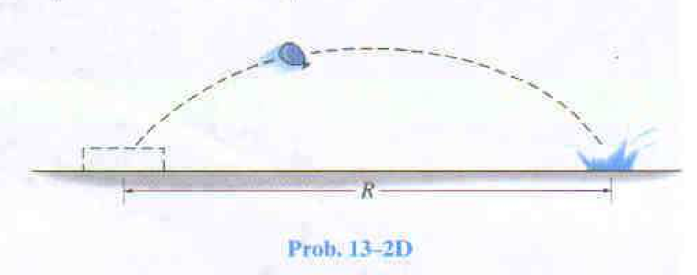
El bloque $B$ tiene una masa de 20 kg y va a ser disparado desde la mesa. Diseñe un mecanismo de disparo que pueda estar unido a la mesa y al receptáculo del bloque, usando cables y poleas. Desprecie la masa del receptáculo, y suponga que el operador puede ejercer una tensión constante de 120 N sobre un solo cable durante la operación y que el movimiento máximo de su brazo es de 0.5 m. El coeficiente de fricción cinética entre la mesa y el receptáculo es $\mu_k = 0.2$. Presente un dibujo de su diseño y calcule el rango máximo $R$ en que el bloque tocará el suelo. Compare su valor con el de los otros diseños obtenidos en clase.




**Prob. 13–1D**

**13–2D. DISEÑO DE UN LANZADOR DE GLOBOS DE AGUA**

Diseñe un método para disparar un globo de agua de 0.25 lb de peso. Organice una competencia con otros estudiantes para ver quién puede disparar el globo más lejos o acertar con él a un blanco. Los materiales deben ser una sola banda de hule de longitud y rigidez específicas, y de ser necesario, no más de tres piezas de madera de tamaño específico. Presente un reporte que muestre sus cálculos sobre dónde tocará el suelo el globo a partir del punto del cual sea lanzado. Compare esto con el valor real $R$ y analice por qué las dos distancias pueden ser diferentes.




Prob. 13–2D

## REPASO DEL CAPÍTULO

- *Cinética.* La cinética es el estudio de la relación entre las fuerzas y la aceleración que producen. Esta relación se basa en la segunda ley del movimiento de Newton, expresada matemáticamente como $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$. Aquí la masa es la constante de proporcionalidad entre la fuerza resultante $\Sigma \mathbf{F}$ que actúa sobre la partícula y la aceleración $\mathbf{a}$ causada por esta resultante. La masa representa la cantidad de materia contenida dentro de la partícula. La masa mide la resistencia a un cambio en su movimiento.

  Antes de aplicar la ecuación de movimiento, es importante dibujar primero el diagrama de cuerpo libre para tomar en cuenta todas las fuerzas que actúan sobre la partícula. Gráficamente, este diagrama puede ser igual al diagrama cinético, el cual muestra la resultante de las fuerzas, es decir, el vector $m\mathbf{a}$.

- *Sistemas coordenados inerciales.* Al aplicar la ecuación de movimiento, es importante hacer mediciones de la aceleración desde un sistema coordenado inercial. Este sistema tiene ejes que no giran sino que están fijos o se trasladan con velocidad constante. Varios tipos de sistemas coordenados inerciales pueden ser usados para aplicar $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$ en forma de componentes. Los ejes rectangulares $x, y, z$ se usan para describir el movimiento rectilíneo a lo largo de cada uno de los ejes. Los ejes $n, t$ normal y tangencial a menudo son usados cuando la trayectoria es conocida. Recuerde que $\mathbf{a}_n$ siempre va en la dirección $+n$. $\mathbf{a}_n$ indica el cambio en la dirección de la velocidad. Y $\mathbf{a}_t$ es tangente a la trayectoria. $\mathbf{a}_t$ indica el cambio en la magnitud de la velocidad. Finalmente, las coordenadas cilíndricas son útiles cuando el movimiento angular de la coordenada radial $r$ está especificado o cuando la trayectoria puede ser convenientemente descrita con estas coordenadas. Para algunos problemas, la dirección de las fuerzas en el diagrama de cuerpo libre requiere que se encuentre el ángulo $\psi$ entre la coordenada radial extendida y la tangente a la curva. Este ángulo puede ser determinado usando

$$\tan \psi = \frac{r}{dr/d\theta}$$

- *Movimiento bajo fuerza central.* Cuando una sola fuerza actúa sobre una partícula, como en la trayectoria de vuelo libre de un satélite en un campo gravitatorio, al movimiento se le llama entonces movimiento bajo fuerza central. La órbita depende de la excentricidad $e$, y como resultado, la trayectoria puede ser circular, parabólica, elíptica o hiperbólica.



Para diseñar apropiadamente el lazo de esta montaña rusa, es necesario garantizar que los carros tengan suficiente energía para rodar por el lazo sin separarse de los rieles.

CAPÍTULO

14

# Cinética de una partícula: Trabajo y energía

## OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Desarrollar el principio del trabajo y la energía y aplicarlo para resolver problemas que implican fuerza, velocidad y desplazamiento.
- Estudiar problemas que implican potencia y eficiencia.
- Presentar el concepto de fuerza conservativa y aplicar el teorema de conservación de la energía para resolver problemas cinéticos.

## 14.1 El trabajo de una fuerza

En mecánica, una fuerza **F** efectúa *trabajo* sobre una partícula sólo cuando ésta experimenta un *desplazamiento en la dirección de la fuerza*. Por ejemplo, considere la fuerza **F** que actúa sobre la partícula en la figura 14-1. Si la partícula se mueve a lo largo de la trayectoria $s$ desde la posición **r** hasta una nueva posición **r**′, el desplazamiento es entonces $d\mathbf{r} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}$. La magnitud de $d\mathbf{r}$ es representada por $ds$, que es un segmento diferencial a lo largo de la trayectoria. Si el ángulo entre las colas de $d\mathbf{r}$ y **F** es $\theta$, figura 14-1,

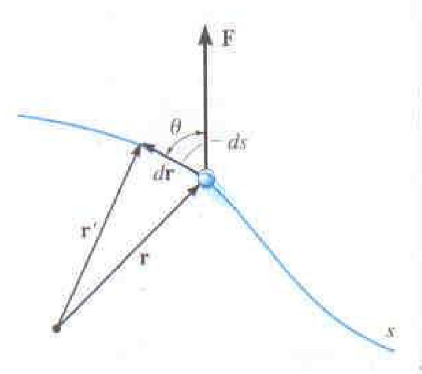



Fig. 14-1

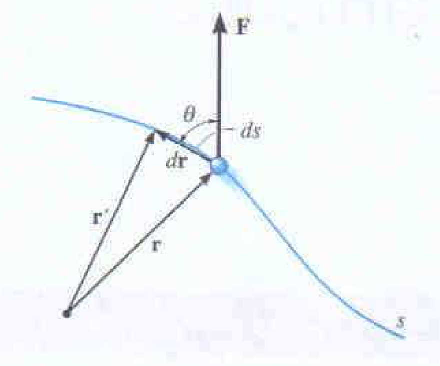



Fig. 14–1

entonces el trabajo $dU$ que es realizado por **F** es una *cantidad escalar*, definida mediante

$$dU = F\,ds\cos\theta$$

Por definición del producto punto (vea la Ec. C-14), esta ecuación también puede ser escrita como

$$dU = \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$$

Este resultado puede ser interpretado de dos maneras: como el producto de $F$ y la componente del desplazamiento en la dirección de la fuerza, es decir, $ds\cos\theta$, o como el producto de $ds$ y la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento, es decir, $F\cos\theta$. Observe que si $0° \le \theta < 90°$, entonces la componente de fuerza y el desplazamiento tienen el *mismo sentido* de manera que el trabajo es *positivo*; mientras que si $90° < \theta \le 180°$, esos vectores tienen *sentido opuesto*, y por tanto el trabajo es *negativo*. Además, $dU = 0$ si la fuerza es *perpendicular* al desplazamiento, ya que $\cos 90° = 0$, o si la fuerza es aplicada a un *punto fijo*, en cuyo caso el desplazamiento es cero.

La unidad básica para el trabajo en el SI se llama *joule* (J). Esta unidad combina las unidades de fuerza y desplazamiento. Específicamente, 1 joule de trabajo es realizado cuando una fuerza de 1 newton se mueve 1 metro a lo largo de su línea de acción (1 J = 1 N · m). El momento de una fuerza tiene la misma combinación de unidades (N · m); sin embargo, los conceptos de momento y trabajo no están relacionados de ninguna manera. Un momento es una cantidad vectorial, mientras que el trabajo es un escalar. En el sistema FPS, generalmente el trabajo es definido escribiendo las unidades como pies · lb, lo que se distingue de las unidades empleadas para un momento, escrito como lb · pie.

**Trabajo de una fuerza variable.** Si la partícula experimenta un desplazamiento finito a lo largo de su trayectoria desde $\mathbf{r}_1$ hasta $\mathbf{r}_2$ o de $s_1$ a $s_2$, figura 14-2*a*, el trabajo es determinado por integración. Si **F** se expresa como una función de posición, $F = F(s)$, tenemos

$$U_{1\text{-}2} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{s_1}^{s_2} F\cos\theta\,ds \qquad (14\text{–}1)$$

Si la componente de trabajo de la fuerza, $F\cos\theta$, es graficada contra $s$, figura 14-2*b*, en esta ecuación la integral puede ser interpretada como el *área bajo la curva* desde la posición $s_1$ hasta la posición $s_2$.

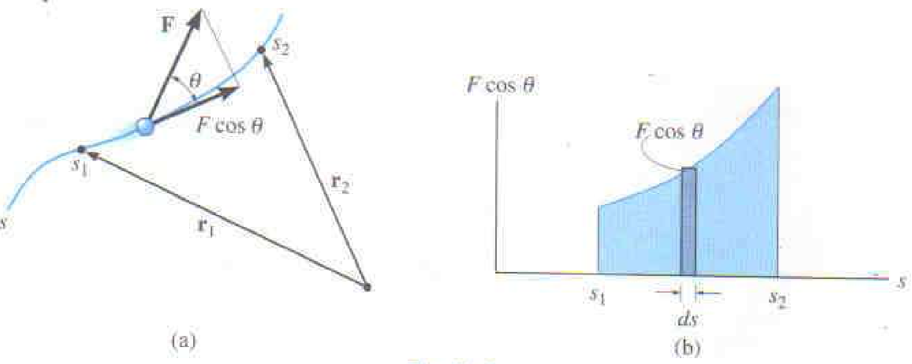



Fig. 14–2

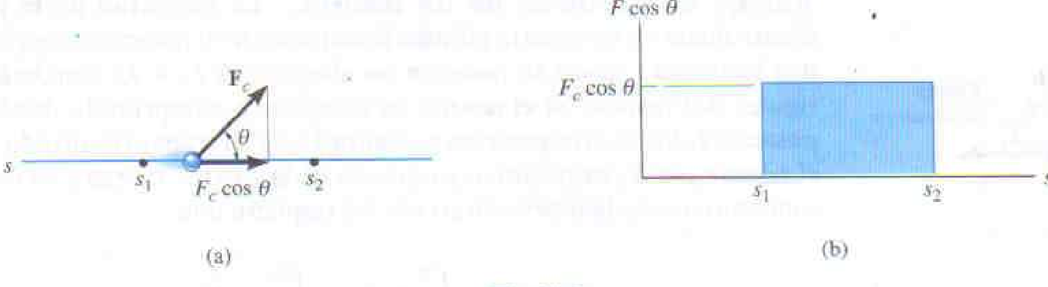



Fig. 14-3

**Trabajo de una fuerza constante que se mueve a lo largo de una línea recta.** Si la fuerza $\mathbf{F}_c$ tiene magnitud constante y actúa bajo un ángulo constante $\theta$ desde su trayectoria en línea recta, figura 14-3*a*, entonces la componente de $\mathbf{F}_c$ en la dirección del desplazamiento es $F_c \cos\theta$. El trabajo realizado por $\mathbf{F}_c$ cuando la partícula es desplazada de $s_1$ a $s_2$ es determinado con la ecuación 14-1, en cuyo caso

$$U_{1-2} = F_c \cos\theta \int_{s_1}^{s_2} ds$$

o bien

$$U_{1-2} = F_c \cos\theta(s_2 - s_1) \qquad (14\text{–}2)$$

Aquí el trabajo de $\mathbf{F}_c$ representa el *área del rectángulo* en la figura 14-3*b*.

**Trabajo de un peso.** Considere una partícula que se mueve hacia arriba a lo largo de la trayectoria $s$ mostrada en la figura 14-4 desde la posición $s_1$ hasta la posición $s_2$. En un punto intermedio, el desplazamiento $d\mathbf{r} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$. Como $\mathbf{W} = -W\mathbf{j}$, aplicando la ecuación 14-1 obtenemos

$$U_{1-2} = \int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2} (-W\mathbf{j})\cdot(dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k})$$

$$= \int_{y_1}^{y_2} -W\,dy = -W(y_2 - y_1)$$

o bien

$$U_{1-2} = -W\Delta y \qquad (14\text{–}3)$$

Así, el trabajo realizado es igual a la magnitud del peso de la partícula multiplicado por su desplazamiento vertical. En el caso mostrado en la figura 14-4 el trabajo es *negativo*, ya que $W$ está dirigido hacia abajo y $\Delta y$ está dirigido hacia arriba. Sin embargo, observe que si la partícula es desplazada *hacia abajo* $(-\Delta y)$, el trabajo del peso es *positivo*. ¿Por qué?

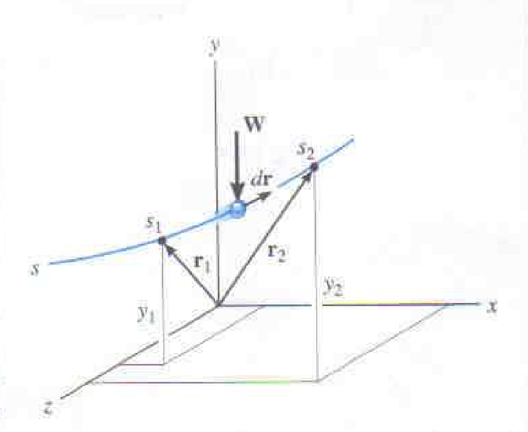
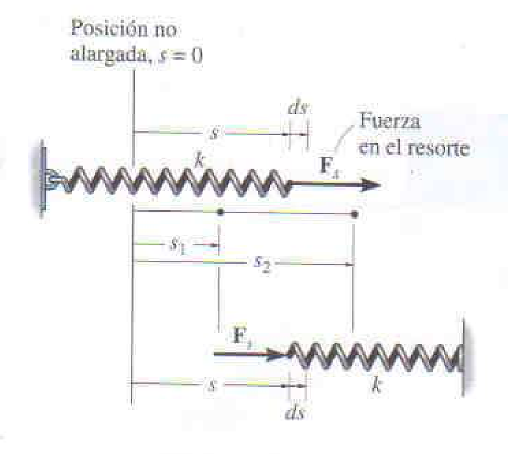
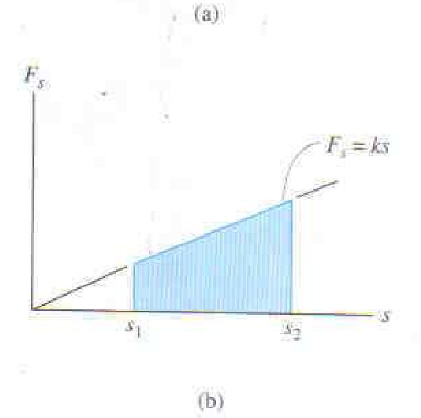


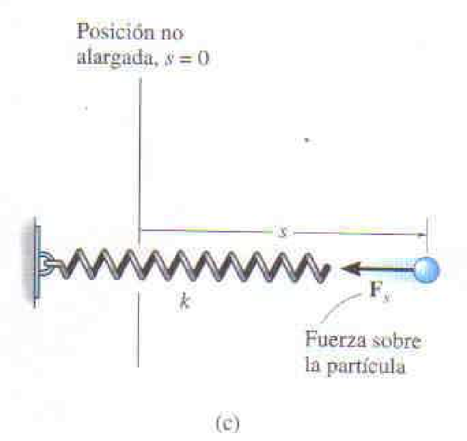

Fig. 14-4




(a)




(b)




(c)

**Fig. 14–5**

**Trabajo de la fuerza de un resorte.** La magnitud de la fuerza desarrollada en un resorte elástico lineal cuando el resorte es desplazado una distancia $s$ desde su posición no alargada es $F_s = ks$, donde $k$ es la rigidez del resorte. Si el resorte es alargado o comprimido desde una posición $s_1$ hasta otra posición $s_2$, figura 14-5*a*, el trabajo realizado *sobre el resorte* por $\mathbf{F}_s$ es *positivo*, ya que en cada caso la fuerza y el desplazamiento tienen la *misma dirección*. Se requiere que

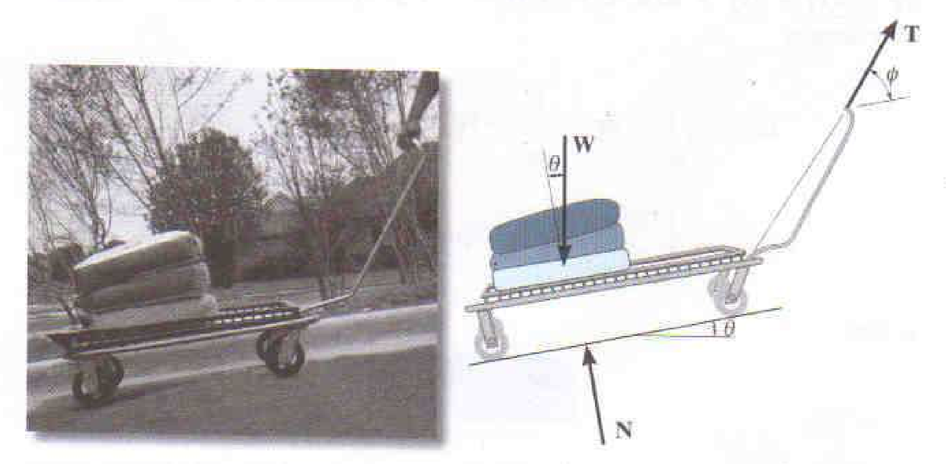
$$U_{1\text{-}2} = \int_{s_1}^{s_2} F_s\, ds = \int_{s_1}^{s_2} ks\, ds$$
$$= \tfrac{1}{2}ks_2^2 - \tfrac{1}{2}ks_1^2$$

Esta ecuación representa el área trapezoidal bajo la línea $F_s = ks$, figura 14-5*b*.

Si una partícula (o un cuerpo) está unida a un resorte, entonces la fuerza $\mathbf{F}_s$ ejercida sobre la partícula es *opuesta* a la ejercida sobre el resorte, figura 14-5*c*. En consecuencia, la fuerza realizará *trabajo negativo* sobre la partícula cuando ésta se mueva alargando más (o comprimiendo) al resorte. Por consiguiente, la ecuación anterior toma la forma

$$U_{1\text{-}2} = -\left(\tfrac{1}{2}ks_2^2 - \tfrac{1}{2}ks_1^2\right) \qquad (14\text{–}4)$$

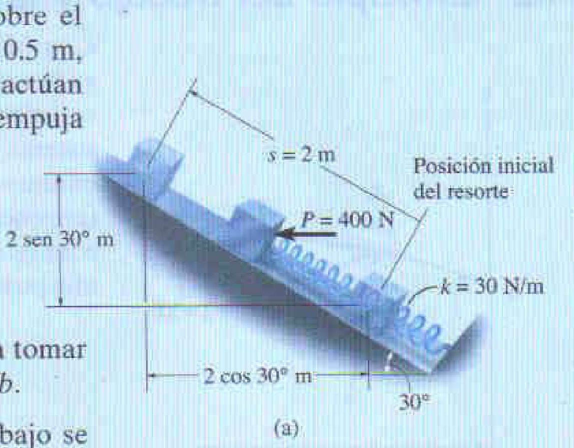
Cuando se usa esta ecuación, un error en signo puede ser eliminado si se observa simplemente la dirección de la fuerza del resorte que está actuando sobre la partícula y se compara con la dirección del desplazamiento de ésta —si ambos tienen la *misma dirección*, resulta un *trabajo positivo*; si las direcciones son *opuestas* entre sí, el *trabajo es negativo*.




Las fuerzas que actúan sobre el carro, al ser jalado una distancia $s$ hacia arriba por el plano inclinado, se muestran en su diagrama de cuerpo libre. La fuerza constante $\mathbf{T}$ efectúa trabajo positivo igual a $U_T = (T \cos \phi)s$, el peso efectúa trabajo negativo igual a $U_W = -(W \text{ sen } \theta)s$, y la fuerza normal $\mathbf{N}$ no trabaja ya que no hay desplazamiento de esta fuerza a lo largo de su línea de acción.

## EJEMPLO 14.1

El bloque de 10 kg mostrado en la figura 14-6$a$ descansa sobre el plano inclinado liso. Si inicialmente el resorte está estirado 0.5 m, determine el trabajo total realizado por todas las fuerzas que actúan sobre el bloque cuando una fuerza horizontal $P = 400$ N lo empuja hacia arriba por el plano $s = 2$ m.




(a)

98.1 N 30° P = 400 N 30° $N_B$ $F_s$

(b)

Fig. 14-6

### Solución

Primero se dibuja el diagrama de cuerpo libre del bloque para tomar en cuenta todas las fuerzas que actúan sobre éste, figura 14-6$b$.

***Fuerza horizontal P.*** Como esta fuerza es *constante*, el trabajo se determina aplicando la ecuación 14-2. El resultado puede ser calculado como la fuerza multiplicada por la componente del desplazamiento en la dirección de la fuerza; esto es,

$$U_P = 400\text{ N }(2\text{ m}\cos 30°) = 692.8\text{ J}$$

o como el desplazamiento multiplicado por la componente de la fuerza en la dirección del desplazamiento, esto es,

$$U_P = 400\text{ N}\cos 30°(2\text{ m}) = 692.8\text{ J}$$

***Fuerza en el resorte $\mathbf{F}_s$.*** En la posición inicial el resorte está estirado $s_1 = 0.5$ m, y en la posición final está estirado $s_2 = 0.5 + 2 = 2.5$ m. Requerimos que el trabajo sea negativo ya que la fuerza y el desplazamiento están en direcciones opuestas. El trabajo de $\mathbf{F}_s$ es entonces

$$U_s = -[\tfrac{1}{2}(30\text{ N/M})(2.5\text{ m})^2 - \tfrac{1}{2}(30\text{ N/m})(0.5\text{ m})^2] = -90\text{ J}$$

***Peso W.*** Como el peso actúa en la dirección opuesta a su desplazamiento vertical, el trabajo es negativo; es decir,

$$U_W = -98.1\text{ N }(2\text{ m sen }30°) = -98.1\text{ J}$$

Observe que también es posible considerar la componente del peso en la dirección del desplazamiento; es decir,

$$U_W = -(98.1\text{ sen }30°\text{ N})2\text{ m} = -98.1\text{ J}$$

***Fuerza normal $\mathbf{N}_B$.*** Esta fuerza *no trabaja* ya que es *siempre* perpendicular al desplazamiento.

***Trabajo total.*** El trabajo de todas las fuerzas cuando el bloque es desplazado 2 m es entonces

$$U_T = 692.8 - 90 - 98.1 = 505\text{ J} \qquad \textit{Resp.}$$

## 14.2 Principio del trabajo y la energía

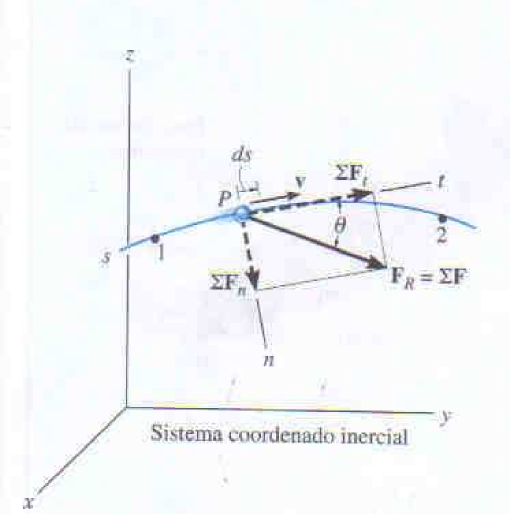



**Fig. 14–7**

Considere una partícula $P$ en la figura 14-7, que en el instante considerado está localizada sobre la trayectoria como medida desde un sistema coordenado inercial. Si la partícula tiene masa $m$ y está sometida a un sistema de fuerzas externas representadas por la resultante $\mathbf{F}_R = \Sigma \mathbf{F}$, entonces la ecuación de movimiento para la partícula en la dirección tangencial es $\Sigma F_t = ma_t$. Al aplicar la ecuación cinemática $a_t = v\,dv/ds$ e integrando ambos lados, suponiendo inicialmente que la partícula tiene una posición $s = s_1$ y rapidez $v = v_1$, y luego en $s = s_2$, $v = v_2$, obtenemos

$$\Sigma \int_{s_1}^{s_2} F_t\,ds = \int_{v_1}^{v_2} mv\,dv$$

$$\Sigma \int_{s_1}^{s_2} F_t\,ds = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 \qquad (14\text{–}5)$$

A partir de la figura 14-7, $\Sigma F_t = \Sigma F \cos\theta$, y como el trabajo es definido mediante la ecuación 14-1, el resultado final puede ser escrito como

$$\Sigma U_{1\text{-}2} = \tfrac{1}{2}mv_2^2 - \tfrac{1}{2}mv_1^2 \qquad (14\text{–}6)$$

Esta ecuación representa el *principio del trabajo y la energía* para la partícula. El término situado a la izquierda es la suma del trabajo realizado por *todas* las fuerzas que actúan sobre la partícula cuando ésta se mueve del punto 1 al punto 2. Los dos términos del lado derecho, que son de la forma $T = \frac{1}{2}mv^2$, definen la *energía cinética* final e inicial de la partícula, respectivamente. Estos términos son siempre escalares *positivos*. Además, la ecuación 14-6 debe ser dimensionalmente homogénea para que la energía cinética tenga las mismas unidades que el trabajo, por ejemplo, joules (J) o pies · lb.

Cuando la ecuación 14-6 es aplicada, a menudo se le simboliza en la forma

$$T_1 + \Sigma U_{1\text{-}2} = T_2 \qquad (14\text{–}7)$$

la cual establece que la energía cinética inicial de la partícula más el trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan sobre la partícula, al moverse ésta desde su posición inicial hasta su posición final, es igual a la energía cinética final de la partícula.

Como se ve en la derivación, el principio del trabajo y la energía representa una forma integrada de $\Sigma F_t = ma_t$, obtenida al usar la ecuación cinemática $a_t = v\,dv/ds$. Como resultado, este principio proporcionará una *sustitución* conveniente de $\Sigma F_t = ma_t$ al resolver aquellos tipos de problemas cinéticos que implican fuerza, velocidad y desplazamiento, ya que esas variables están contenidas en los términos de la ecuación 14-7. Por ejemplo, si la rapidez inicial de una partícula es conocida y el trabajo de todas las fuerzas que actúan sobre ésta puede ser determinado, entonces la ecuación 14-7 proporciona un *medio directo* de obtener la rapidez final $v_2$ de la partícula después que ella experimenta un des-



Si un carro golpea estos barriles antichoque la energía cinética del carro se transformará en trabajo, lo cual causará que los barriles y en alguna medida el carro se deformen. Conociendo la cantidad de energía absorbida por cada barril, es posible diseñar un colchón antichoque como éste.

plazamiento específico. Si en vez de esto $v_2$ es determinada por medio de la ecuación de movimiento, es necesario un proceso de dos pasos, esto es, la aplicación de $\Sigma F_t = ma_t$ para obtener $a_t$, y luego integrar $a_t = v\,dv/ds$ para obtener $v_2$. Observe que el principio del trabajo y la energía no puede ser usado, por ejemplo, para determinar fuerzas dirigidas *normalmente* a la trayectoria del movimiento, ya que esas fuerzas no trabajan sobre la partícula. En lugar de eso, debe ser aplicada $\Sigma F_n = ma_n$. Sin embargo, para trayectorias curvas, la magnitud de la fuerza normal es una función de la rapidez. Por consiguiente, puede ser más fácil obtener esta rapidez usando el principio del trabajo y la energía, y luego sustituir esta cantidad en la ecuación de movimiento $\Sigma F_n = mv^2/\rho$ para obtener la fuerza normal.

## PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

El principio del trabajo y la energía se usa para resolver problemas cinéticos que implican *velocidad, fuerza* y *desplazamiento*, ya que esos términos aparecen en la ecuación. Para las aplicaciones, se sugiere usar el siguiente procedimiento.

### *Trabajo (Diagrama de cuerpo libre)*

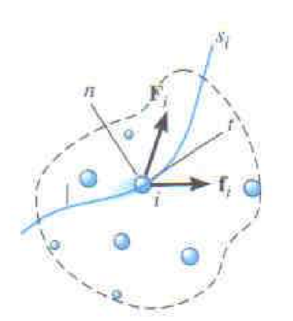
- Establezca el sistema coordenado inercial y dibuje un diagrama de cuerpo libre de la partícula para tomar en cuenta todas las fuerzas que trabajan sobre ésta cuando se mueve a lo largo de su trayectoria.

### *Principio del trabajo y la energía*

- Aplique el principio del trabajo y la energía, $T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$.
- La energía cinética presente en los puntos inicial y final es siempre positiva, ya que implica el cuadrado de la velocidad ($T = \frac{1}{2}mv^2$).
- Una fuerza efectúa trabajo cuando se mueve por un desplazamiento en la dirección de la fuerza.
- El trabajo es *positivo* cuando la componente de la fuerza tiene la *misma dirección* que su desplazamiento; de otra manera es negativo.
- Las fuerzas que son funciones del desplazamiento deben ser integradas para obtener el trabajo. Gráficamente, el trabajo es igual al área bajo la curva fuerza–desplazamiento.
- El trabajo de un peso es el producto de la magnitud del peso y el desplazamiento vertical, $U_W = \pm Wy$. El trabajo es positivo cuando el peso se mueve hacia abajo.
- El trabajo de un resorte es de la forma $U_s = \frac{1}{2}ks^2$, donde $k$ es la rigidez del resorte y $s$ el elongamiento o compresión del mismo.

Una aplicación numérica de este procedimiento está ilustrada en los ejemplos que siguen a la sección 14.3.

## 14.3 Principio del trabajo y la energía para un sistema de partículas




Sistema coordenado inercial

Fig. 14–8

El principio del trabajo y la energía puede ser ampliado para incluir un sistema de $n$ partículas aisladas dentro de una región cerrada como se muestra en la figura 14-8. Aquí la partícula arbitraria $i$–ésima, con masa $m_i$, está sometida a una fuerza externa resultante $\mathbf{F}_i$ y a una fuerza interna resultante $\mathbf{f}_i$ que ejercen sobre ella cada una de las otras partículas. Usando la ecuación 14-5, que se aplica en la dirección tangencial, el principio del trabajo y la energía escrito para la $i$–ésima partícula es entonces

$$\tfrac{1}{2}m_i v_{i1}^2 + \int_{s_{i1}}^{s_{i2}} (F_i)_t\, ds + \int_{s_{i1}}^{s_{i2}} (f_i)_t\, ds = \tfrac{1}{2}m_i v_{i2}^2.$$

Si se aplica el principio del trabajo y la energía a cada una de las otras partículas del sistema, resultan ecuaciones similares. Como el trabajo y la energía cinética son escalares, los resultados pueden sumarse algebraicamente, de modo que

$$\Sigma\tfrac{1}{2}m_i v_{i1}^2 + \Sigma\int_{s_{i1}}^{s_{i2}} (F_i)_t\, ds + \Sigma\int_{s_{i1}}^{s_{i2}} (f_i)_t\, ds = \Sigma\tfrac{1}{2}m_i v_{i2}^2$$

Podemos escribir simbólicamente esta ecuación como

$$\Sigma T_1 + \Sigma U_{1\text{-}2} = \Sigma T_2 \tag{14–8}$$

Esta ecuación establece que la energía cinética inicial ($\Sigma T_1$) del sistema, más el trabajo realizado por todas las fuerzas externas e internas que actúan sobre las partículas del sistema ($\Sigma U_{1-2}$), es igual a la energía cinética final ($\Sigma T_2$) del sistema. Para mantener este balance de energía, debe tomarse en cuenta estrictamente el trabajo realizado por todas las fuerzas. Con respecto a esto, observe que aunque las fuerzas internas sobre partículas adyacentes ocurren en pares colineales iguales pero opuestos, el trabajo total realizado por cada una de esas fuerzas, en general, *no se cancelará* ya que las trayectorias sobre las que las partículas correspondientes viajan serán *diferentes*. Sin embargo, hay dos importantes excepciones a esta regla que a menudo ocurren en la práctica. Si las partículas están contenidas dentro de los límites de un *cuerpo rígido en traslación*, todas las fuerzas internas sufren el mismo desplazamiento, y por tanto el trabajo interno será cero. También, las partículas conectadas mediante cables inextensibles forman un sistema que tiene fuerzas internas que son desplazadas una cantidad igual. En este caso, las partículas adyacentes ejercen fuerzas internas iguales pero opuestas que tienen componentes que sufren el mismo desplazamiento, y por tanto el trabajo de esas fuerzas se cancela. Por otra parte, observe que cuando se supone que el cuerpo *no es rígido*, las partículas del cuerpo son desplazadas a lo largo de *trayectorias diferentes*, y debido a las interacciones de las fuerzas parte de la energía se pierde como calor o se almacena en el cuerpo si ocurren deformaciones permanentes. Discutiremos estos efectos brevemente al final de esta sección y en la sección 15.4. Sin embargo, en todo este texto se aplicará el principio del trabajo y la energía a la solución de problemas sólo cuando no tengan que tomarse en cuenta esas pérdidas de energía.

El procedimiento de análisis dado en la sección 14.2 proporciona un método para aplicar la ecuación 14-8; sin embargo, sólo una ecuación es aplicable a todo el sistema. Si las partículas están conectadas por cuerdas, pueden obtenerse otras ecuaciones usando los principios cinemáticos dados en la sección 12.9 para relacionar toda rapidez de las partículas. Vea el ejemplo 14.6.

**Trabajo de fricción causado por deslizamiento.** A continuación estudiaremos una clase especial de problemas que requiere una cuidadosa aplicación de la ecuación 14-8. Todos estos problemas implican casos donde un cuerpo está deslizándose sobre la superficie de otro en presencia de fricción. Por ejemplo, considere un bloque que se traslada una distancia $s$ sobre una superficie rugosa como se muestra en la figura 14-9*a*. Si la fuerza aplicada **P** equilibra justamente la fuerza de fricción *resultante* $\mu_k N$, figura 14-9*b*, entonces, por equilibrio, se mantiene una velocidad constante **v**, y esperaríamos aplicar la ecuación 14-8 como sigue:

$$\frac{1}{2}mv^2 + Ps - \mu_k N s = \frac{1}{2}mv^2$$

Realmente esta ecuación es satisfecha si $P = \mu_k N$; sin embargo, como sabemos por experiencia, el movimiento deslizante *generará calor*, una forma de energía que parece no tomarse en cuenta en la ecuación trabajo-energía. Para explicar esta paradoja y representar más exactamente la naturaleza de la fricción, debemos modelar el bloque de manera que las superficies de contacto sean *deformables* (no rígidas).* Recuerde que las porciones rugosas presentes en el fondo del bloque actúan como "dientes", y cuando el bloque se desliza esos dientes se *deforman ligeramente* y se rompen o vibran debido a efectos de trabazón y arranque sobre la superficie de contacto, figura 14-9*c*. Como resultado, las fuerzas de fricción que actúan sobre el bloque en esos puntos son desplazadas ligeramente, debido a las deformaciones localizadas, y entonces son reemplazadas por otras fuerzas de fricción conforme se establecen otros puntos de contacto. En cualquier instante, la *resultante* **F** de todas estas fuerzas de fricción permanece esencialmente constante, esto es, $\mu_k N$; sin embargo, debido a las muchas *deformaciones localizadas*, el desplazamiento real $s'$ de $\mu_k N$ *no* es el mismo desplazamiento $s$ que el de la fuerza aplicada **P**. En lugar de eso, $s'$ será *menor* que $s$ ($s' < s$), y por tanto el *trabajo externo* realizado por la fuerza externa de fricción será $\mu_k N s'$ y no $\mu_k N s$. La cantidad restante de trabajo, $\mu_k N(s - s')$, se manifiesta como un incremento de *energía interna*, la cual de hecho causa una elevación de temperatura en el bloque.

En resumen, la ecuación 14-8 puede ser aplicada a problemas que implican fricción por deslizamiento; sin embargo, debe entenderse claramente que el trabajo de la fuerza resultante de fricción no se representa por $\mu_k N s$; en vez de ello, este término representa el trabajo externo de fricción ($\mu_k N s'$) y el trabajo interno $[\mu_k N(s - s')]$ que es convertido en varias formas de energía interna, por ejemplo, en calor.†

(a)

(b)

(c)

Fig. 14-9

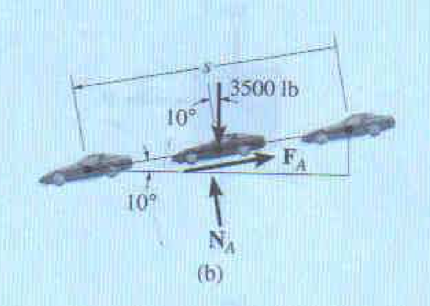
*Vea el capítulo 8 de *Mecánica vectorial para ingenieros: Estática*.

†Vea B. A. Sherwood y W. H. Bernard, "Work and Heat Transfer in the Presence of Sliding Friction", *Am. J. Phys.* 52, 1001 (1984).

## EJEMPLO 14.2




(a)




(b)

**Fig. 14-10**

El automóvil de 3500 lb mostrado en la figura 14-10*a* viaja hacia abajo por el camino inclinado 10° con una rapidez de 20 pies/s. Si el conductor acciona los frenos, ocasionando que las ruedas se traben, determine qué tan lejos *s* resbalan las ruedas sobre el camino. El coeficiente de fricción cinética entre las ruedas y el camino es $\mu_k = 0.5$.

### Solución I

Este problema puede ser resuelto usando el principio del trabajo y la energía, ya que implica fuerza, velocidad y desplazamiento.

***Trabajo (Diagrama de cuerpo libre).*** Como se muestra en la figura 14-10*b*, la fuerza normal $\mathbf{N}_A$ no trabaja puesto que nunca experimenta desplazamiento a lo largo de su línea de acción. El peso, 3500 lb, es desplazado *s* sen 10° y efectúa trabajo positivo. ¿Por qué? La fuerza de fricción $\mathbf{F}_A$ efectúa trabajo externo e interno cuando se *considera* que sufre un desplazamiento *s*. Este trabajo es negativo ya que ocurre en la dirección opuesta al desplazamiento. Aplicando la ecuación de equilibrio normal al camino, tenemos

$$+\nwarrow \Sigma F_n = 0; \qquad N_A - 3500 \cos 10° \text{ lb} = 0 \qquad N_A = 3446.8 \text{ lb}$$

Así,

$$F_A = 0.5N_A = 1723.4 \text{ lb}$$

***Principio del trabajo y la energía.***

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3500 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}\right)(20 \text{ pies/s})^2 + \{3500 \text{ lb}(s \text{ sen } 10°) - (1723.4 \text{ lb})s\} = 0$$

Despejando para *s* obtenemos

$$s = 19.5 \text{ pies}$$ *Resp.*

### Solución II

Si este problema es resuelto usando la ecuación de movimiento, están implicados dos pasos. Primero, a partir del diagrama de cuerpo libre, figura 14-10*b*, la ecuación de movimiento es aplicada a lo largo del plano inclinado. Esto da

$$+\swarrow \Sigma F_s = ma_s; \qquad 3500 \text{ sen } 10° \text{ lb} - 1723.4 \text{ lb} = \frac{3500 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}a$$

$$a = -10.3 \text{ pies/s}^2$$

Luego, usando la forma integrada de $a\,ds = v\,dv$ (cinemática), como $a$ es constante, tenemos

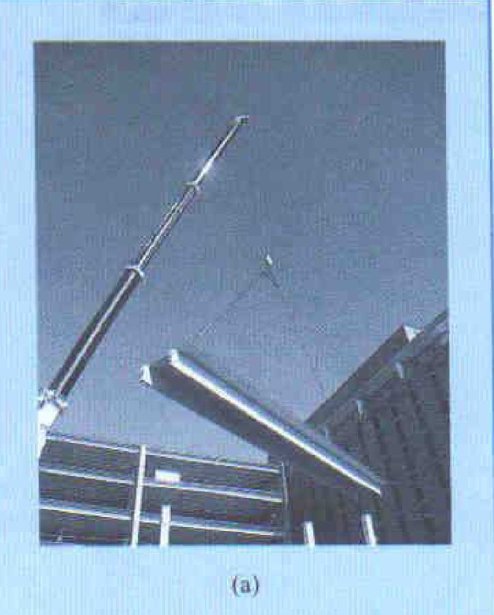
$$(+\swarrow) \quad v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0);$$

$$(0)^2 = (20 \text{ pies/s})^2 + 2(-10.3 \text{ pies/s}^2)(s - 0)$$

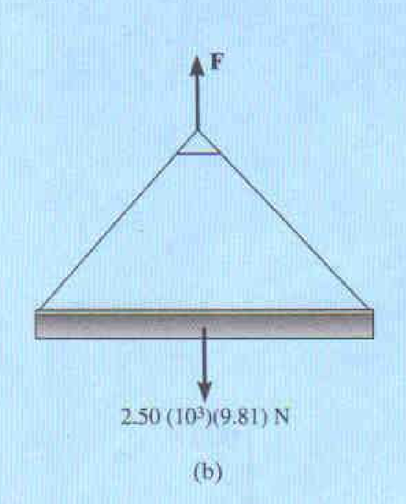
$$s = 19.5 \text{ pies}$$ *Resp.*

## EJEMPLO 14.3

Por un corto tiempo, la grúa mostrada en la figura 14-11$a$ levanta la viga de 2.50 Mg con una fuerza $F = (28 + 3s^2)$ kN. Determine la velocidad de la viga cuando se ha levantado $s = 3$ m. ¿Cuánto tiempo le toma alcanzar esta altura partiendo del reposo?



(a)




(b)

Fig. 14-11

### Solución

Podemos resolver parte de este problema usando el principio del trabajo y la energía ya que implica fuerza, velocidad y desplazamiento. La cinemática debe ser usada para determinar el tiempo.

*Trabajo (Diagrama de cuerpo libre).* Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre, figura 14-11$b$, la fuerza de izado **F** efectúa trabajo positivo, el cual debe ser determinado por integración ya que esta fuerza es variable. También, el peso es constante y realizará trabajo negativo ya que el desplazamiento es hacia arriba.



*Principios del trabajo y la energía.*

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$

$$0 + \int_0^s (28 + 3s^2)(10^3)ds - (2.50)(10^3)(9.81)s = \tfrac{1}{2}(2.50)(10^3)v^2$$

$$28(10^3)s + (10^3)s^3 - 24.525(10^3)s = 1.25(10^3)v^2$$

$$v = (2.78s + 0.8s^3)^{\frac{1}{2}}$$

Cuando $s = 3$ m,

$$v = 5.47 \text{ m/s}$$ *Resp.*

*Cinemática.* Como pudimos expresar la velocidad en función del desplazamiento, el tiempo puede ser determinado usando $v = ds/dt$. En este caso,

$$(2.78s + 0.8s^3)^{\frac{1}{2}} = \frac{ds}{dt}$$

$$t = \int_0^3 \frac{ds}{(2.78s + 0.8s^3)^{\frac{1}{2}}}$$

La integración puede ser efectuada numéricamente usando una calculadora de bolsillo. El resultado es

$$t = 1.79 \text{ s}$$ *Resp.*



## EJEMPLO 14.4

La plataforma $P$, mostrada en la figura 14-12*a*, tiene masa insignificante y está unida de manera que las cuerdas de 0.4 m de longitud mantienen comprimido 0.6 m a un resorte de 1 m de longitud cuando no hay *nada* sobre la plataforma. Si se coloca un bloque de 2 kg sobre la plataforma y se libera del reposo después que ésta es empujada hacia abajo 0.1 m, figura 14-12*b*, determine la altura $h$ máxima que el bloque se levanta en el aire, medida desde el suelo.

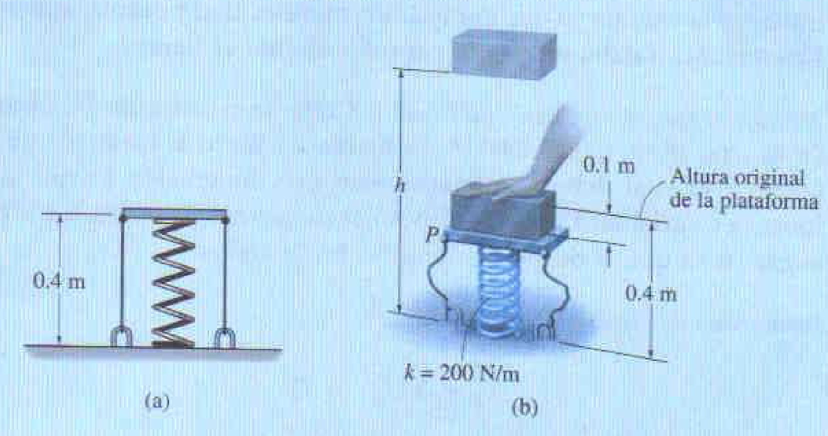
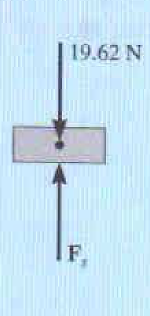



Fig. 14–12

### Solución

***Trabajo (Diagrama de cuerpo libre).*** Como el bloque es liberado del reposo y después alcanza su altura máxima, las velocidades inicial y final son cero. El diagrama de cuerpo libre del bloque cuando aún está en contacto con la plataforma se muestra en la figura 14-12*c*. Observe que el peso efectúa trabajo negativo y el resorte trabajo positivo. ¿Por qué? En particular, la *compresión inicial* en el resorte es $s_1 = 0.6 \text{ m} + 0.1 \text{ m} = 0.7 \text{ m}$. Debido a las cuerdas, la *compresión final* del resorte es $s_2 = 0.6 \text{ m}$ (después que el bloque deja la plataforma). El fondo del bloque se eleva desde una altura de $(0.4 \text{ m} - 0.1 \text{ m}) = 0.3 \text{ m}$ hasta una altura final $h$.




(c)

***Principio del trabajo y la energía.***

$$T_1 + \Sigma U_{1\text{-}2} = T_2$$

$$\tfrac{1}{2}mv_1^2 + \{-(\tfrac{1}{2}ks_2^2 - \tfrac{1}{2}ks_1^2) - W\Delta y\} = \tfrac{1}{2}mv_2^2$$

Observe que aquí $s_1 = 0.7 \text{ m} > s_2 = 0.6 \text{ m}$, por lo que el trabajo del resorte determinado por la ecuación 14-4 ciertamente será positivo una vez que se haga el cálculo. Así,

$$0 + \{-[\tfrac{1}{2}(200 \text{ N/m})(0.6 \text{ m})^2 - \tfrac{1}{2}(200 \text{ N/m})(0.7 \text{ m})^2] - (19.62 \text{ N})[h - (0.3 \text{ m})]\} = 0$$

Al resolver obtenemos

$$h = 0.963 \text{ m}$$ *Resp.*

**EJEMPLO 14.5**

Los paquetes con masa de 2 kg son entregados por una banda transportadora a una rampa circular lisa con una velocidad $v_0 = 1$ m/s, como se muestra en la figura 14-13*a*. Si el radio de la rampa es de 0.5 m, determine el ángulo $\theta = \theta_{máx}$ en el que cada paquete empieza a dejar la superficie.

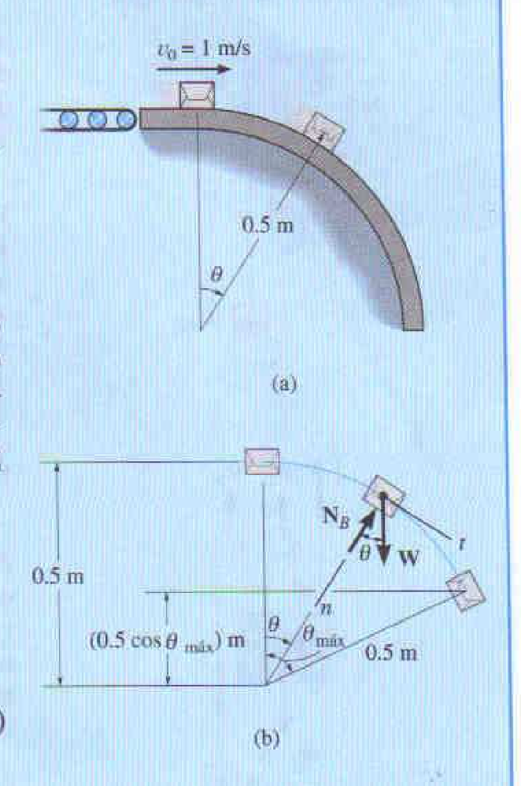



Fig. 14-13

## Solución

***Trabajo (Diagrama de cuerpo libre).*** El diagrama de cuerpo libre del bloque se muestra en la ubicación intermedia $\theta$. El peso $W = 2(9.81) = 19.62$ N efectúa trabajo positivo durante el desplazamiento. Si se supone que un paquete deja la superficie cuando $\theta = \theta_{máx}$, entonces el peso se mueve a través de un desplazamiento vertical de $[0.5 - 0.5\cos\theta_{máx}]$ m, como se muestra en la figura.

***Principio del trabajo y la energía.***

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$

$$\tfrac{1}{2}(2\text{ kg})(1\text{ m/s})^2 + \{19.62\text{ N}(0.5 - 0.5\cos\theta_{máx})\text{m}\} = \tfrac{1}{2}(2\text{ kg})v_2^2$$

$$v_2^2 = 9.81(1 - \cos\theta_{máx}) + 1 \qquad (1)$$

***Ecuación de movimiento.*** Hay dos incógnitas en la ecuación 1, $\theta_{máx}$ y $v_2$. Una segunda ecuación que relaciona esas dos variables se puede obtener aplicando la ecuación de movimiento en la *dirección normal* a las fuerzas en el diagrama de cuerpo libre. (El principio del trabajo y la energía ha reemplazado la aplicación de $\Sigma F_t = ma_t$ como se vio en la derivación.) Así,

$$+\swarrow \Sigma F_n = ma_n; \qquad -N_B + 19.62\text{ N}\cos\theta = (2\text{ kg})\left(\frac{v^2}{0.5\text{ m}}\right)$$

Cuando el paquete deja la rampa en $\theta = \theta_{máx}$, $N_B = 0$ y $v = v_2$; por tanto, esta ecuación resulta ser

$$\cos\theta_{máx} = \frac{v_2^2}{4.905} \qquad (2)$$

Eliminando la incógnita $v_2^2$ entre las ecuaciones 1 y 2 resulta

$$4.905\cos\theta_{máx} = 9.81(1 - \cos\theta_{máx}) + 1$$

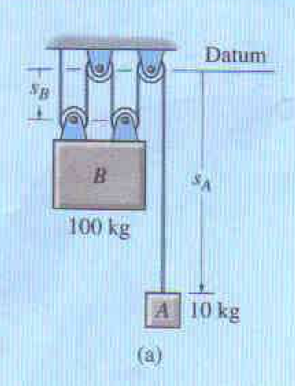
Despejando, obtenemos

$$\cos\theta_{máx} = 0.735$$

$$\theta_{máx} = 42.7° \qquad \textit{Resp.}$$

Este problema también ha sido resuelto en el ejemplo 13.9. Si se comparan los dos métodos de solución, quedará claro que un enfoque por trabajo y energía da una solución más directa.

## EJEMPLO 14.6



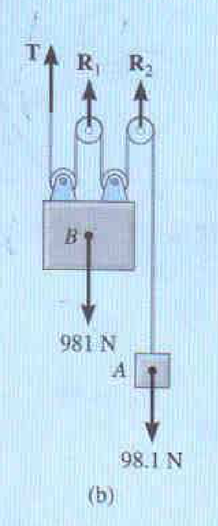




Fig. 14-14

Los bloques $A$ y $B$ mostrados en la figura 14-14*a* tienen masa de 10 y 100 kg, respectivamente. Determine la distancia que $B$ recorre desde el punto donde es liberado del reposo hasta el punto en que su rapidez es de 2 m/s.

### Solución

El problema puede ser resuelto considerando los bloques por separado y aplicando el principio del trabajo y la energía a cada bloque. Sin embargo, el trabajo de la tensión (desconocida) en el cable puede ser eliminado del análisis considerando los bloques $A$ y $B$ juntos como un *sistema*. La solución requerirá resolver simultáneamente las ecuaciones de trabajo y energía y cinemática. Para ser consistentes con nuestra convención de signos, supondremos que ambos bloques se mueven en la dirección positiva *hacia abajo*.

*Trabajo (Diagrama de cuerpo libre).* Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre del sistema, figura 14-14*b*, la fuerza $\mathbf{T}$ presente en el cable y las reacciones $\mathbf{R}_1$ y $\mathbf{R}_2$ *no trabajan*, ya que estas fuerzas representan las reacciones en los soportes y, en consecuencia, no se mueven mientras los bloques son desplazados. Los pesos realizan trabajo positivo ya que, como se indicó, se supone que ambos se mueven hacia abajo.

*Principio del trabajo y la energía.* Observando que los bloques son liberados del reposo, tenemos

$$\Sigma T_1 + \Sigma U_{1\text{-}2} = \Sigma T_2$$

$$\{\tfrac{1}{2}m_A(v_A)_1^2 + \tfrac{1}{2}m_B(v_B)_1^2\} + \{W_A\,\Delta s_A + W_B\,\Delta s_B\} = \{\tfrac{1}{2}m_A(v_A)_2^2 + \tfrac{1}{2}m_B(v_B)_2^2\}$$

$$\{0 + 0\} + \{98.1\text{ N}(\Delta s_A) + 981\text{ N}(\Delta s_B)\} = \{\tfrac{1}{2}(10\text{ kg})(v_A)_2^2 + \tfrac{1}{2}(100\text{ kg})(2\text{ m/s})^2\} \qquad (1)$$

*Cinemática.* Usando los métodos de la cinemática analizados en la sección 12.9, en la figura 14-14*a* puede verse que en cualquier instante la longitud total $l$ de todos los segmentos verticales de cable puede ser expresada en términos de las coordenadas de posición $s_A$ y $s_B$ como

$$s_A + 4s_B = l$$

Por consiguiente, un cambio en posición da la ecuación de desplazamiento

$$\Delta s_A + 4\,\Delta s_B = 0$$

$$\Delta s_A = -4\,\Delta s_B \qquad (2)$$

Tal como se requiere, ambos desplazamientos son positivos hacia abajo. Tomando la derivada con respecto al tiempo resulta

$$v_A = -4v_B = -4(2\text{ m/s}) = -8\text{ m/s}$$

*Reteniendo* el signo negativo en la ecuación 2 y sustituyendo en la ecuación 1 obtenemos

$$\Delta s_B = 0.883\text{ m}\downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

# PROBLEMAS

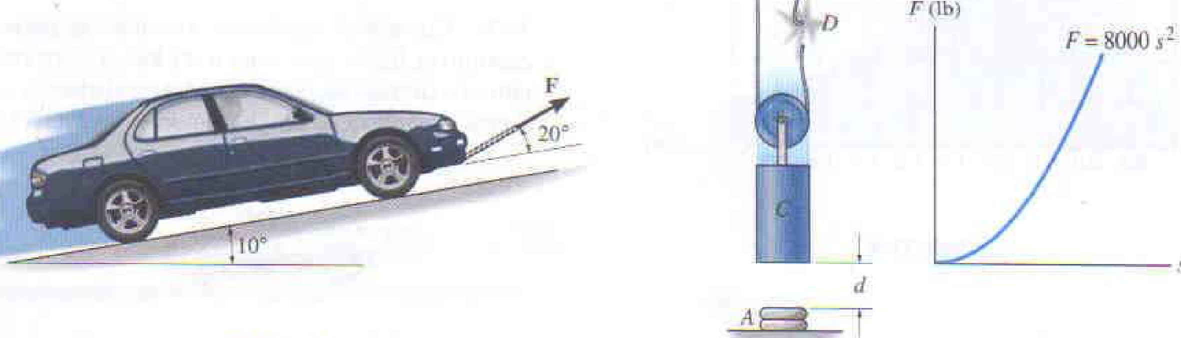
**14-1.** Una mujer con masa de 70 kg está de pie en un elevador que tiene una aceleración hacia abajo de 4 $m/s^2$ partiendo del reposo. Determine el trabajo realizado por su peso y el trabajo de la fuerza normal que el piso ejerce sobre ella cuando el elevador desciende 6 m. Explique por qué el trabajo de estas fuerzas es diferente.

**14-2.** El automóvil con masa de 2 Mg originalmente está viajando a 2 m/s. Determine la distancia que debe ser jalado por una fuerza $F = 4$ kN para que alcance una rapidez de 5 m/s. Desprecie la fricción y la masa de las ruedas.



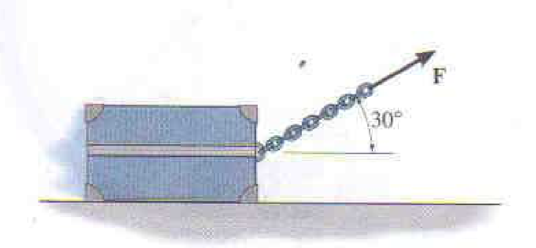

**Prob. 14–2**

***14-4.** El "resorte de aire" $A$ se usa para proteger la estructura de soporte $B$ y prevenir daño al peso tensionante $C$ de la banda transportadora en el caso de que ocurra una falla en la banda $D$. La fuerza desarrollada por el resorte como una función de su deflexión se muestra en la gráfica. Si el peso es de 50 lb y está suspendido a una altura $d = 1.5$ pies por arriba de la parte superior del resorte, determine la deformación máxima del resorte en caso de que la banda transportadora falle. Desprecie la masa de la polea y la banda.



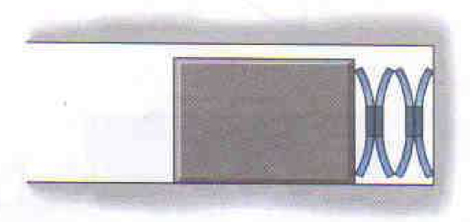

**Prob. 14–4**

**14-3.** La caja de 20 kg está sometida a una fuerza que tiene dirección constante y magnitud $F = 100$ N, donde $s$ es medida en metros. Cuando $s = 15$ m, la caja se está moviendo hacia la derecha con rapidez de 8 m/s. Determine su rapidez cuando $s = 25$ m. El coeficiente de fricción cinética entre la caja y el suelo es $\mu_k = 0.25$.



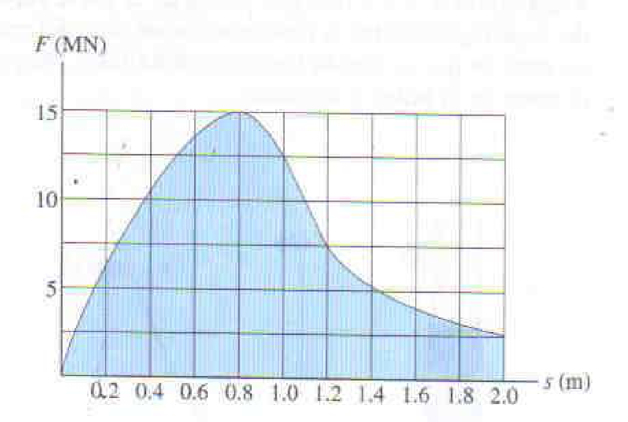

**Prob. 14–3**

**14-5.** El tapón liso tiene un peso de 20 lb y es empujado contra una serie de roldanas de resorte Belleville de manera que la compresión en el resorte es $s = 0.05$ pies. Si la fuerza de éste sobre el tapón es $F = (3s^{1/3})$ lb, donde $s$ está dada en pies, determine la rapidez del tapón después que se mueve alejándose del resorte. Desprecie la fricción.



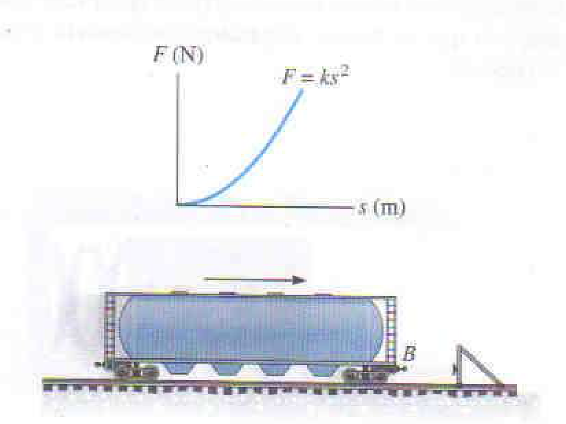
**Prob. 14–5**

**14-6.** Cuando un proyectil de 7 kg es disparado por el barril de un cañón que tiene 2 m de longitud, la fuerza explosiva ejercida sobre el proyectil, mientras está en el barril, varía como se muestra en el diagrama. Determine la velocidad aproximada del proyectil en el instante en que sale del barril. Desprecie los efectos de la fricción dentro del barril y suponga que éste es horizontal.



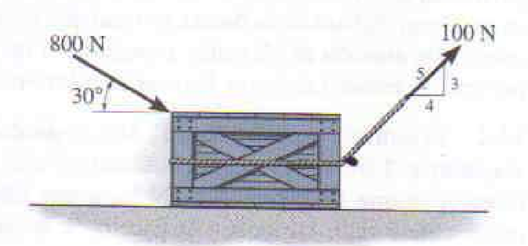

Prob. 14–6

**14-7.** Consideraciones de diseño para el amortiguador $B$ sobre el carro de 5 Mg de un ferrocarril requieren el uso de un resorte no lineal cuyas características carga−deflexión se muestran en la gráfica. Seleccione el valor apropiado de $k$ de manera que la deflexión máxima del resorte sea de 0.2 m cuando el carro, viajando a 4 m/s, choque contra el tope rígido. Desprecie la masa de las ruedas del carro.




Prob. 14–7

***14-8.** La caja, que tiene masa de 100 kg, está sometida a la acción de las dos fuerzas. Si originalmente está en reposo, determine la distancia que se desliza para alcanzar una rapidez de 6 m/s. El coeficiente de fricción cinética entre la caja y la superficie es $\mu_k = 0.2$.



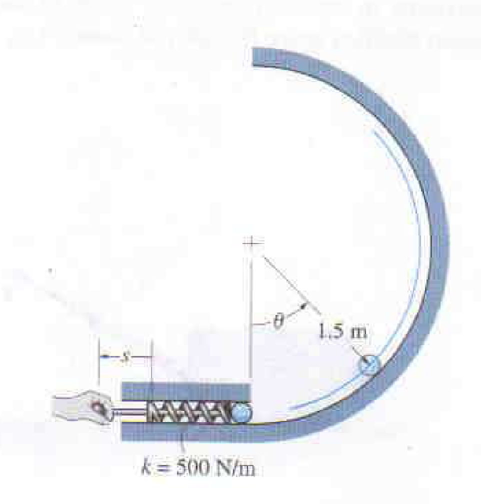

Prob. 14–8

**14-9.** Cuando el conductor acciona los frenos de una camioneta ligera que viaja a 40 km/h, ésta resbala 3 m antes de detenerse. ¿Qué distancia resbalará la camioneta si está viajando a 80 km/h cuando se accionan los frenos?



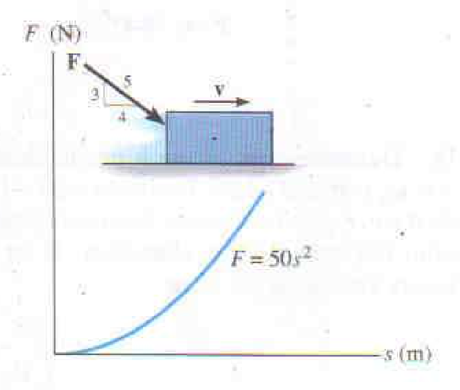
Prob. 14–9

**14-10.** La bola de 0.5 kg de tamaño insignificante es disparada hacia arriba por la vía vertical circular usando el émbolo de resorte. El émbolo mantiene comprimido al resorte 0.08 m cuando $s = 0$. Determine qué tan lejos, $s$, debe ser jalado hacia atrás el émbolo y liberado de manera que la bola empiece a dejar la vía cuando $\theta = 135°$.



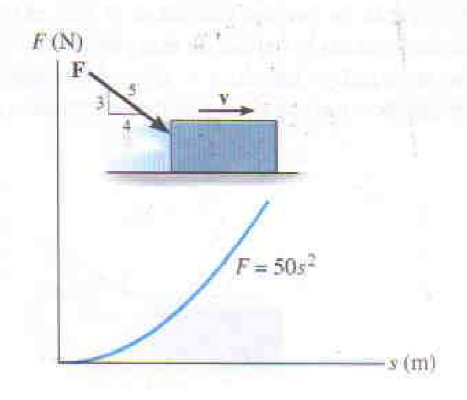

Prob. 14–10

■**14-11.** La fuerza **F**, que actúa en dirección constante sobre el bloque de 20 kg, tiene una magnitud que varía con la posición $s$ del bloque. Determine qué distancia se desliza el bloque antes que su velocidad sea de 5 m/s. Cuando $s = 0$, el bloque se está moviendo hacia la derecha a 2 m/s. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie es $\mu_k = 0.3$.



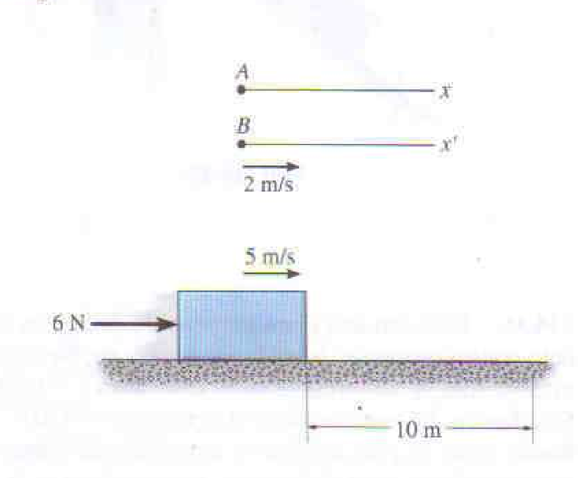

**Prob. 14–11**

*__14-12.__ La fuerza **F**, que actúa en dirección constante sobre el bloque de 20 kg, tiene una magnitud que varía con la posición $s$ del bloque. Determine la rapidez del bloque después que se ha deslizado 3 m. Cuando $s = 0$ el bloque se está moviendo hacia la derecha a 2 m/s. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la superficie es $\mu_k = 0.3$.



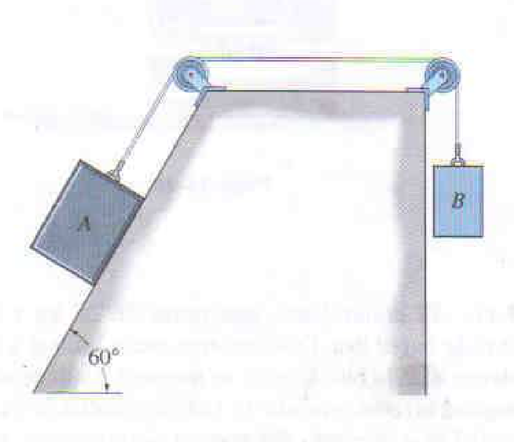

**Prob. 14–12**

**14-13.** Como se indicó en la derivación, el principio del trabajo y la energía es válido para observadores en *cualquier* marco de referencia inercial. Demuestre que esto es así mediante la consideración del bloque de 10 kg que descansa sobre la superficie lisa y está sometido a una fuerza horizontal de 6 N. Si el observador $A$ se encuentra en un marco *fijo* $x$, determine la rapidez final del bloque si tiene una rapidez inicial de 5 m/s y viaja 10 m, ambas dirigidas hacia la derecha y medidas desde el marco fijo. Compare el resultado con el obtenido por un observador $B$, unido al eje $x'$ y moviéndose a velocidad constante de 2 m/s con relación a $A$. *Sugerencia*: La distancia que viaja el bloque tendrá que ser calculada primero para el observador $B$ antes de aplicar el principio del trabajo y la energía.



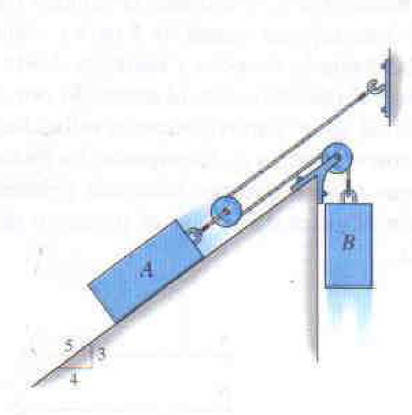

**Prob. 14–13**

**14-14.** Determine la velocidad del bloque $A$ de 20 kg después de liberarlo del reposo y que se mueve 2 m hacia abajo por el plano. El bloque $B$ tiene masa de 10 kg y el coeficiente de fricción cinética entre el plano y el bloque $A$ es $\mu_k = 0.2$. ¿Cuál es la tensión en la cuerda?



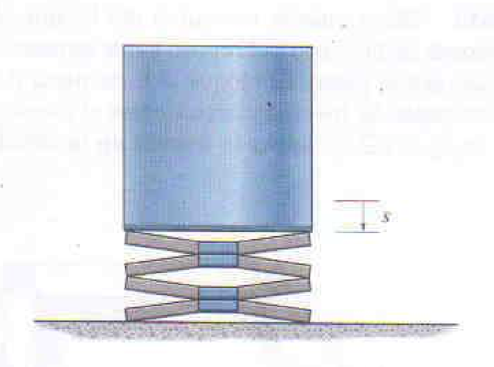

**Prob. 14–14**

**14-15.** El bloque $A$ pesa 60 lb y el bloque $B$ 10 lb. Determine la rapidez del bloque $A$ después de que se mueve 5 pies hacia abajo por el plano, partiendo del reposo. Desprecie la fricción y la masa de cuerda y poleas.



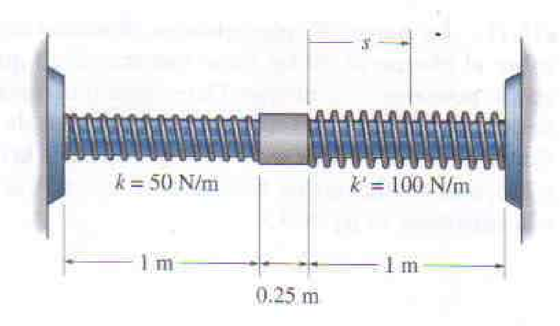

Prob. 14-15

***14-16.** El tapón liso tiene un peso de 20 lb y es empujado contra una serie de roldanas de resorte Belleville de manera que la compresión en el resorte es $s = 0.05$ pies. Si la fuerza del resorte sobre el tapón es $F = (100s^{1/3})$ lb, donde $s$ está en pies, determine la rapidez del tapón justo después que se aleja del resorte, es decir, en $s = 0$.



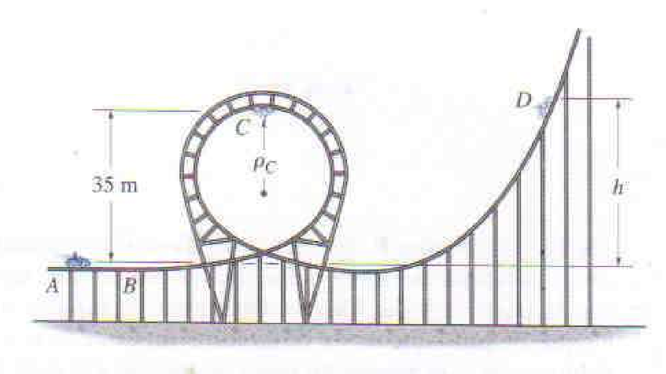

Prob. 14-16

**14-17.** El collar tiene una masa de 20 kg y descansa sobre la barra lisa. Dos resortes están unidos a él y a los extremos de la barra como se muestra. Cada resorte tiene longitud no comprimida de 1 m. Si el collar es desplazado $s = 0.5$ m y liberado del reposo, determine su velocidad en el instante en que retorna al punto $s = 0$.



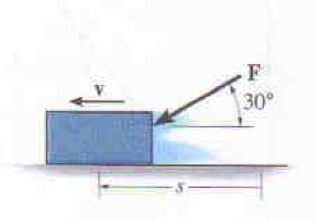

Prob. 14-17

**14-18.** Determine qué altura $h$ puede alcanzar el carro de 200 kg sobre el plano inclinado curvo $D$ si se lanza desde $B$ con rapidez suficiente justo para alcanzar la parte superior del lazo en $C$ sin abandonar la vía. El radio de curvatura en $C$ es $\rho_C = 25$ m.



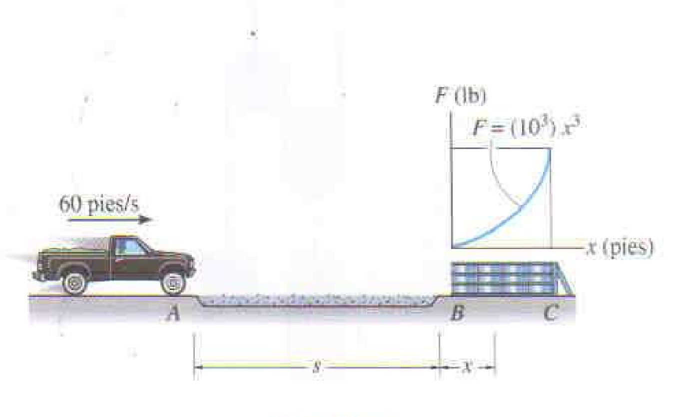

Prob. 14-18

**14-19.** El bloque de 2 kg está sometido a una fuerza de dirección constante y magnitud $F = (300/(1 + s))$ N, donde $s$ está en metros. Cuando $s = 4$ m, el bloque se está moviendo hacia la izquierda con rapidez de 8 m/s. Determine su rapidez cuando $s = 12$ m. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el suelo es $\mu_k = 0.25$.



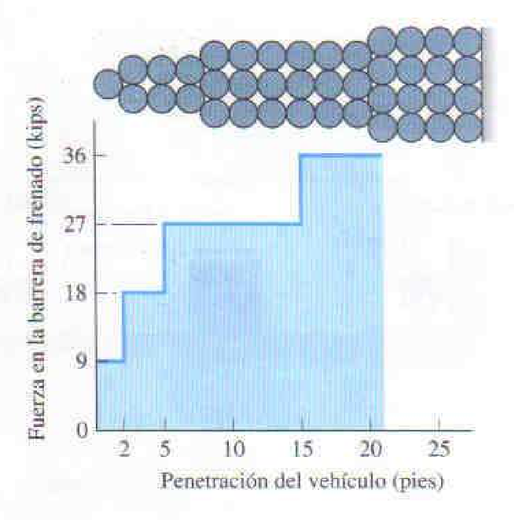

Prob. 14-19

*14-20. El movimiento de una camioneta es frenado usando una cama de piedras sueltas $AB$ y un conjunto de barriles antichoque $BC$. Si los experimentos muestran que las piedras proporcionan una resistencia al rodamiento de 160 lb por rueda y los barriles proporcionan una resistencia como se muestra en la gráfica, determine la distancia $x$ que la camioneta de 4500 lb penetra en los barriles si está viajando libremente a 60 pies/s cuando se acerca a $A$. Considere $s$ = 50 pies y desprecie el tamaño de la camioneta.

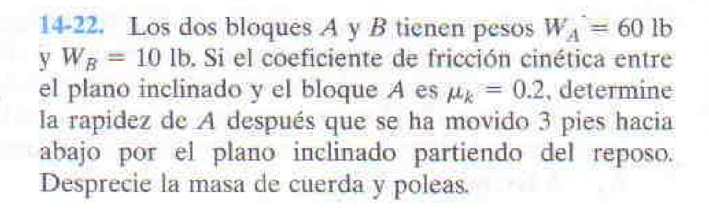



Prob. 14–20

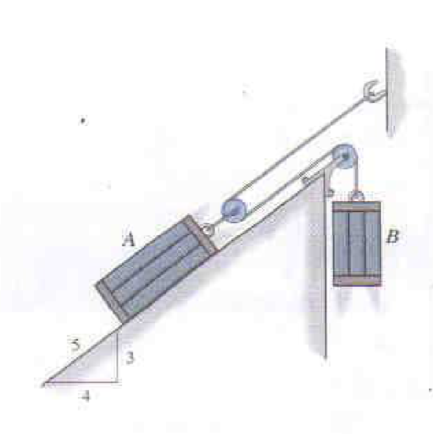
14-21. La barrera antichoque en una autopista consiste en un grupo de barriles llenos con material absorbente de impactos. La fuerza de contención de la barrera se mide contra la penetración del vehículo en ella. Determine la distancia que un carro con peso de 4000 lb penetrará la barrera si está viajando originalmente a 55 pies/s cuando golpea el primer barril.




Prob. 14–21

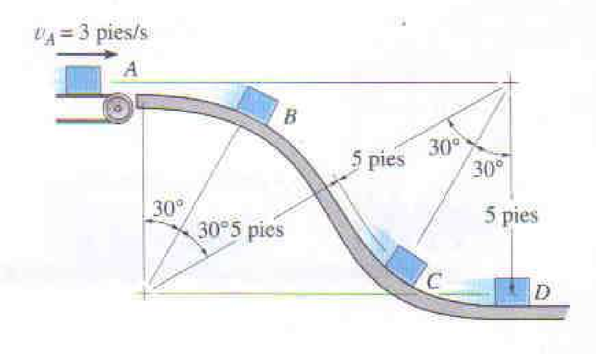


14-22. Los dos bloques $A$ y $B$ tienen pesos $W_A$ = 60 lb y $W_B$ = 10 lb. Si el coeficiente de fricción cinética entre el plano inclinado y el bloque $A$ es $\mu_k$ = 0.2, determine la rapidez de $A$ después que se ha movido 3 pies hacia abajo por el plano inclinado partiendo del reposo. Desprecie la masa de cuerda y poleas.



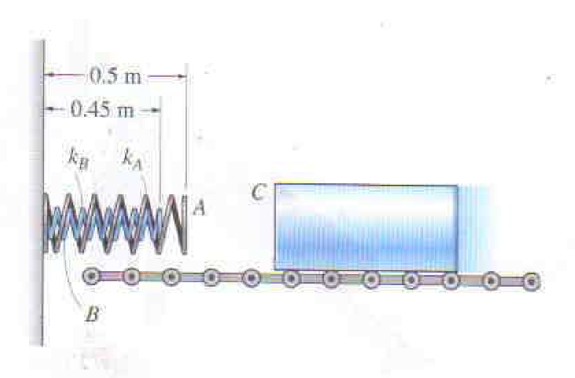

Prob. 14–22

14-23. Los paquetes, que tienen un peso de 50 lb, son entregados a la canaleta a $v_A$ = 3 pies/s usando una banda transportadora. Determine su rapidez cuando llegan a los puntos $B$, $C$ y $D$. Calcule también la fuerza normal de la canaleta sobre los paquetes en $B$ y $C$. Desprecie la fricción y el tamaño de los paquetes.



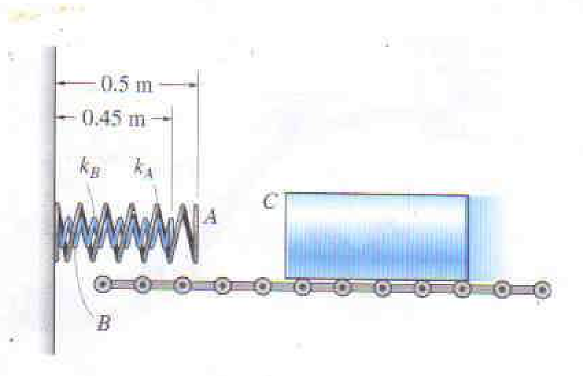

Prob. 14–23

*14-24. El lingote de acero tiene masa de 1800 kg. Viaja a lo largo de la banda transportadora con rapidez $v = 0.5$ m/s cuando choca con el dispositivo de resortes "anidados". Determine la deflexión máxima necesaria en cada resorte para detener el movimiento del lingote. Considere $k_A = 5$ kN/m, $k_B = 3$ kN/m.



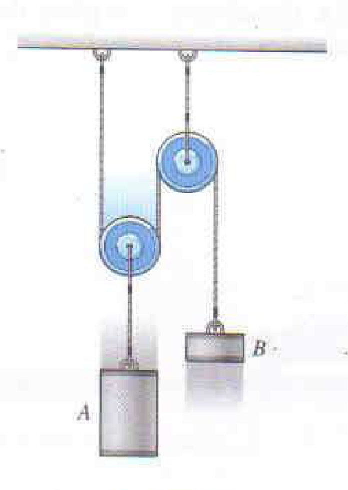

Prob. 14–24

14-25. El lingote de acero tiene masa de 1800 kg. Viaja a lo largo de la banda transportadora con rapidez $v = 0.5$ m/s cuando choca con el conjunto de resortes "anidados". Si la rigidez del resorte exterior es $k_A = 5$ kN/m, determine la rigidez $k_B$ requerida en el resorte interno de manera que el movimiento del lingote sea detenido en el momento en que el frente $C$ del lingote esté a 0.3 m de la pared.



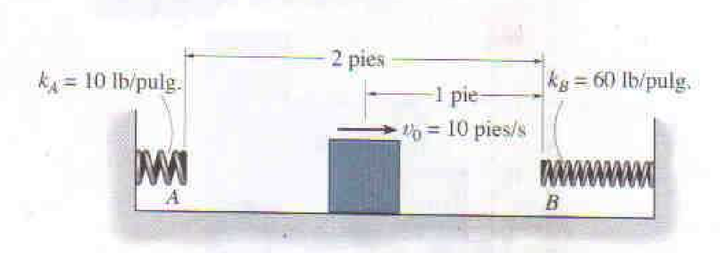

Prob. 14–25

14-26. El bloque $A$ pesa 60 lb y el bloque $B$ 10 lb. Determine la distancia que $A$ debe descender desde el reposo antes de obtener una rapidez de 8 pies/s. ¿Cuál es la tensión en la cuerda que soporta al bloque $A$? Desprecie la masa de cuerda y poleas.



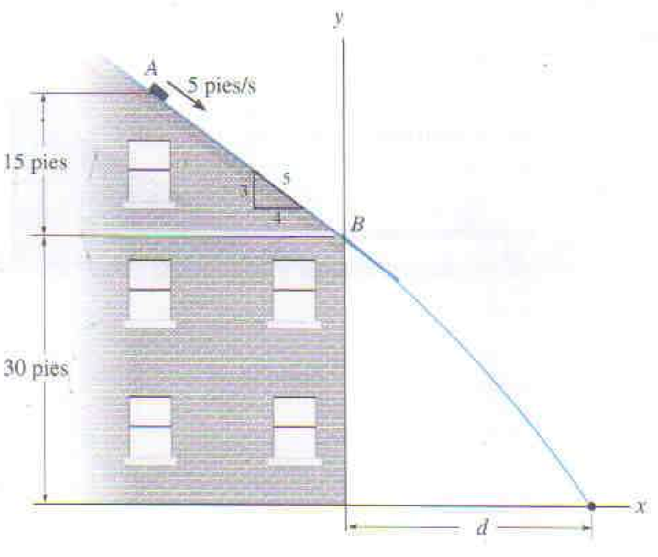

Prob. 14–26

14-27. El bloque de 25 lb tiene rapidez inicial $v_0 = 10$ pies/s cuando está a la mitad del camino entre $A$ y $B$. Después de golpear al resorte $B$, rebota y se desliza por el plano horizontal hacia el resorte $A$, etc. Si el coeficiente de fricción cinética entre el plano y el bloque es $\mu_k = 0.4$, determine la distancia total recorrida por el bloque antes de detenerse.



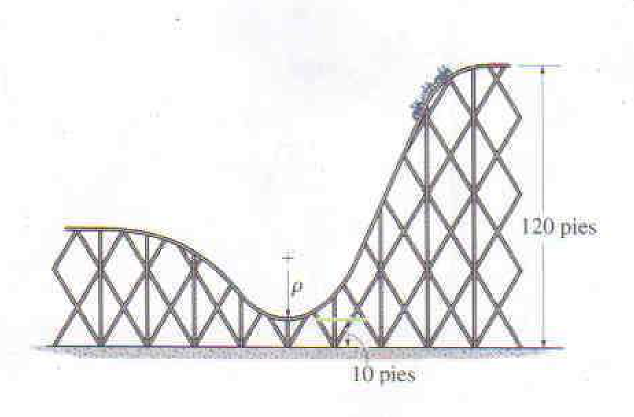

Prob. 14–27

*14-28. El ladrillo de 2 lb se desliza hacia abajo por un techo liso de tal forma que cuando está en $A$ su velocidad es de 5 pies/s. Determine la rapidez del bloque justo antes de dejar la superficie en $B$, la distancia $d$ desde la pared hasta donde toca el suelo, y la rapidez con que toca el suelo.



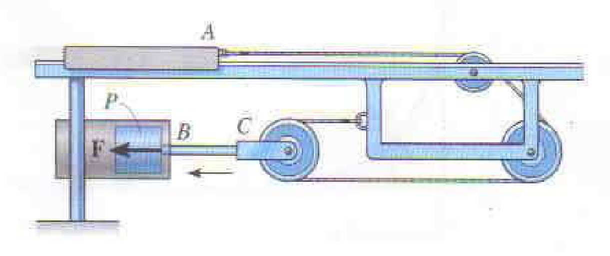

Prob. 14-28

14-29. Las montañas rusas son diseñadas de manera que los pasajeros no experimenten más de 3.5 veces su peso como fuerza normal contra el asiento del carro. Determine el radio de curvatura $\rho$ más pequeño de la vía en su punto más bajo si el carro tiene rapidez de 5 pies/s en la cresta de la caída. Desprecie la fricción.



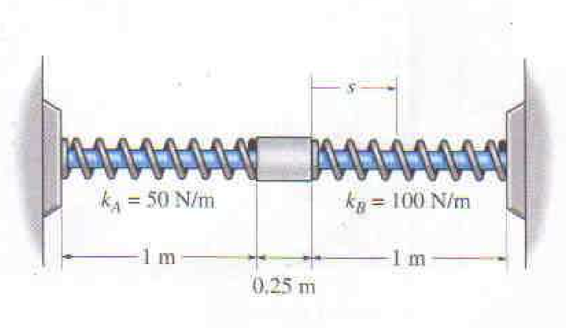

Prob. 14-29

14-30. El mecanismo de catapulta se usa para impulsar el deslizador $A$ de 10 kg hacia la derecha a lo largo de la vía lisa. La acción de propulsión se obtiene jalando la polea unida a la barra $BC$ rápidamente hacia la izquierda por medio de un pistón $P$. Si el pistón aplica una fuerza constante $F = 20$ kN a la barra $BC$ de tal manera que la mueve 0.2 m, determine la rapidez alcanzada por el deslizador que originalmente estaba en reposo. Desprecie la masa de poleas, cable, pistón y barra $BC$.



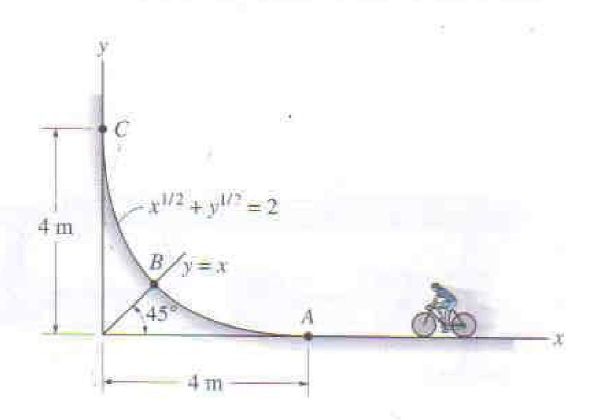

Prob. 14-30

14-31. El collar tiene masa de 20 kg y se desliza a lo largo de la barra lisa. Dos resortes están unidos al collar y a los extremos de la barra como se muestra. Si cada resorte tiene longitud no comprimida de 1 m y el collar tiene rapidez de 2 m/s cuando $s = 0$, determine la compresión máxima de cada resorte debida al movimiento de vaivén (oscilatorio) del collar.



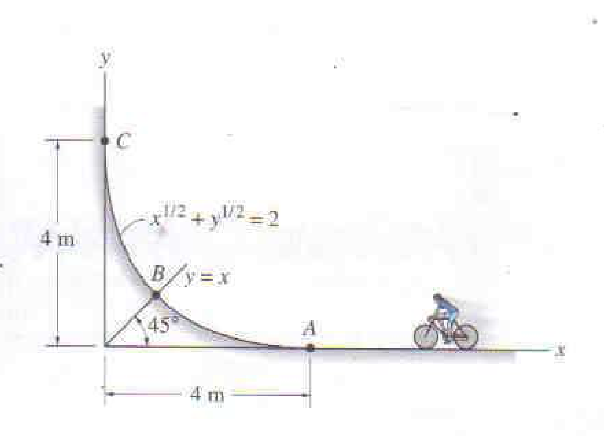

Prob. 14-31

*14-32. El ciclista viaja al punto $A$ pedaleando hasta que alcanza una rapidez de $v_A = 8$ m/s. Luego viaja libremente hacia arriba por la superficie curva. Determine la fuerza normal que él ejerce sobre la superficie cuando llega al punto $B$. La masa total de la bicicleta y el ciclista es de 75 kg. Desprecie la fricción, la masa de las ruedas y el tamaño de la bicicleta.



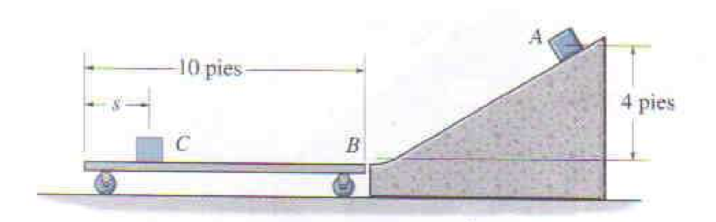

Prob. 14–32

14-33. El ciclista viaja al punto $A$ pedaleando hasta que alcanza una rapidez de $v_A = 4$ m/s. Luego viaja libremente hacia arriba por la superficie curva. Determine qué tan alto sube él por la superficie antes de detenerse. También, ¿cuáles son la fuerza normal resultante sobre la superficie en este punto y la aceleración? La masa total de la bicicleta y el ciclista es de 75 kg. Desprecie la fricción, la masa de las ruedas y el tamaño de la bicicleta.



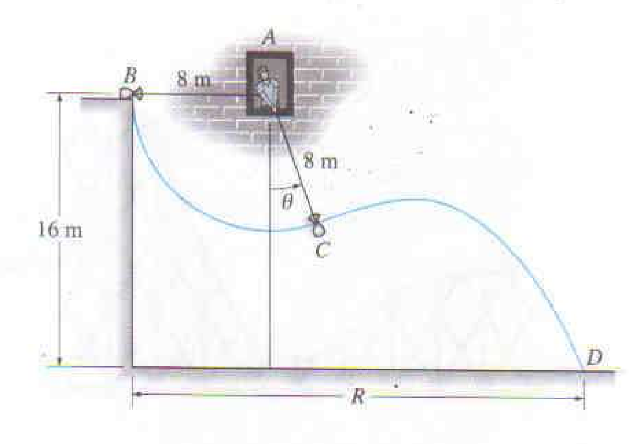

Prob. 14–33

14-34. La caja $A$ de 30 lb es liberada del reposo y se desliza hacia abajo a lo largo de la rampa lisa y sobre la superficie de un carro. Si el carro está *fijo*, determine la distancia $s$ desde el extremo del carro hasta donde la caja se detiene. El coeficiente de fricción cinética entre el carro y la caja es $\mu_k = 0.6$.



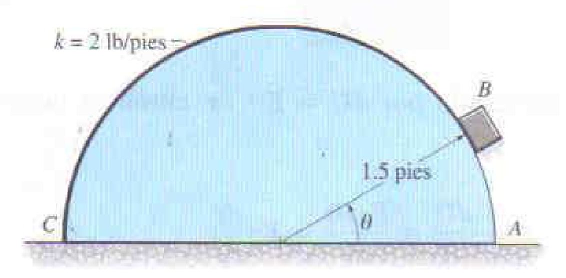

Prob. 14–34

14-35. El hombre situado en la ventana $A$ desea lanzar el saco de 30 kg sobre el suelo. Para lograrlo hace oscilar el saco desde el reposo en $B$ hasta el punto $C$, donde libera la cuerda en $\theta = 30°$. Determine la rapidez con que el saco toca el suelo y la distancia $R$.



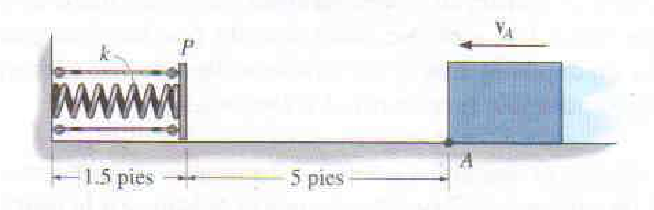

Prob. 14–35

*14-36. Un bloque de 2 lb descansa sobre la superficie lisa semicilíndrica. Una cuerda elástica con rigidez $k = 2$ lb/pie está unida al bloque en $B$ y a la base del semicilindro en el punto $C$. Si el bloque es liberado del reposo en $A$ ($\theta = 0°$), determine la longitud no alargada de la cuerda de manera que el bloque empiece a dejar el semicilindro en el instante $\theta = 45°$. Desprecie el tamaño del bloque.



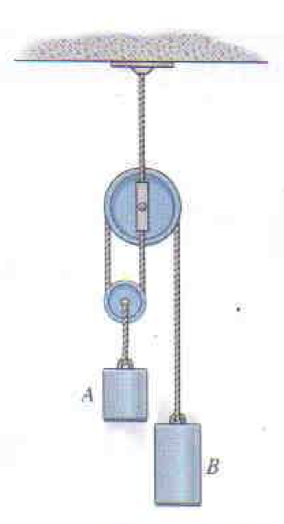

Prob. 14-36

14-37. El parachoques de resorte se usa para detener el movimiento del bloque de 4 lb que se está deslizando hacia él a $v = 9$ pies/s. Como se muestra, el resorte está confinado por la placa $P$ y el muro usando cables de manera que su longitud es de 1.5 pies. Si la rigidez del resorte es $k = 50$ lb/pie, determine la longitud no alargada requerida en el resorte de manera que la placa no sea desplazada más de 0.2 pies después que el bloque choca con él. Desprecie la fricción, la masa de la placa y el resorte, y la energía perdida entre la placa y el bloque durante la colisión.



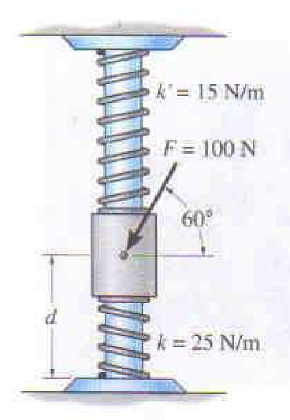

Prob. 14-37

14-38. El cilindro $A$ tiene masa de 3 kg y el cilindro $B$ tiene masa de 8 kg. Determine la rapidez de $A$ después que se mueve hacia arriba 2 m partiendo del reposo. Desprecie la masa de cuerda y poleas.



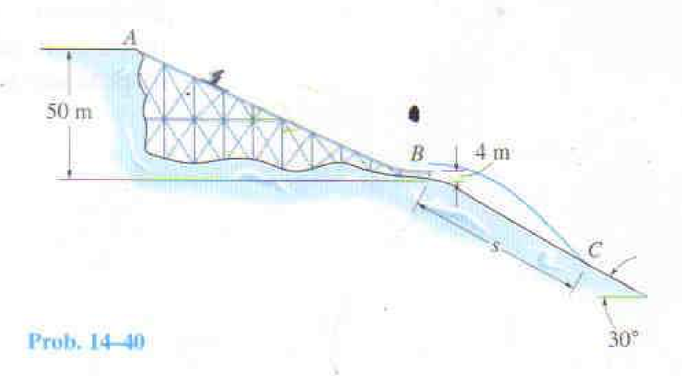

Prob. 14-38

14-39. El collar tiene masa de 20 kg y está soportado sobre la barra lisa. Los resortes unidos a él no están deformados cuando $d = 0.5$ m. Determine la rapidez del collar después que la fuerza aplicada $F = 100$ N provoca que se desplace de manera que $d = 0.3$ m. Cuando $d = 0.5$ m el collar está en reposo.




Prob. 14-39

*14-40. El esquiador parte del reposo en $A$ y viaja hacia abajo por la rampa. Si la fricción y la resistencia del aire pueden ser despreciadas, determine su rapidez $v_B$ cuando llega a $B$. Encuentre también la distancia $s$ en donde él golpea el suelo en $C$ cuando efectúa el salto viajando horizontalmente en $B$. Desprecie el tamaño del esquiador, que tiene masa de 70 kg.




Prob. 14-40

## 14.4 Potencia y eficiencia

**Potencia.** La *potencia* se define como la cantidad de trabajo realizado por unidad de tiempo. Así, la *potencia* generada por una máquina o un motor que realizan una cantidad de trabajo $dU$ dentro del intervalo de tiempo $dt$ es

$$P = \frac{dU}{dt} \qquad (14\text{–}9)$$

Si el trabajo $dU$ es expresado por $dU = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$, entonces también es posible escribir

$$P = \frac{dU}{dt} = \frac{\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{dt}$$

o bien

$$P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} \qquad (14\text{–}10)$$



La salida de potencia de esta locomotora proviene de la fuerza impulsora de fricción **F** desarrollada en sus ruedas. Esta es la fuerza que vence la resistencia de fricción de los carros y puede subir el peso del tren por la pendiente.

Por consiguiente, la potencia es un *escalar*, en donde la formulación $\mathbf{v}$ representa la velocidad del punto sobre el que actúa la fuerza **F**.

Las unidades básicas de potencia usadas en los sistemas SI y FPS son el watt (W) y el caballo de potencia (hp), respectivamente. Esas unidades son definidas como

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ N} \cdot \text{m/s}$$

$$1 \text{ hp} = 550 \text{ pies} \cdot \text{lb/s}$$

Para la conversión entre los dos sistemas de unidades, 1 hp = 746 W.

El término "potencia" proporciona una base útil para determinar el tipo de motor o máquina requeridos para efectuar cierta cantidad de trabajo en un tiempo dado. Por ejemplo, cada una de dos bombas puede ser capaz de vaciar un depósito si se le da suficiente tiempo; sin embargo, la bomba con mayor potencia terminará el trabajo más pronto.

**Eficiencia.** La *eficiencia mecánica* de una máquina se define como la razón de la salida de potencia útil producida por la máquina a la entrada de potencia suministrada a la máquina. Por consiguiente,

$$\epsilon = \frac{\text{salida de potencia}}{\text{entrada de potencia}} \qquad (14\text{–}11)$$

Si la energía aplicada a la máquina ocurre durante el *mismo intervalo de tiempo* en que es retirada, entonces la eficiencia puede ser expresada también en términos de la razón de salida de energía a entrada de energía; es decir,

$$\epsilon = \frac{\text{salida de energía}}{\text{entrada de energía}} \tag{14–12}$$

Como las máquinas constan de una serie de partes móviles, las fuerzas de fricción siempre serán desarrolladas dentro de la máquina, y como resultado, es necesaria energía o potencia adicional para vencer esas fuerzas. En consecuencia, *la eficiencia de una máquina siempre es menor que 1.*



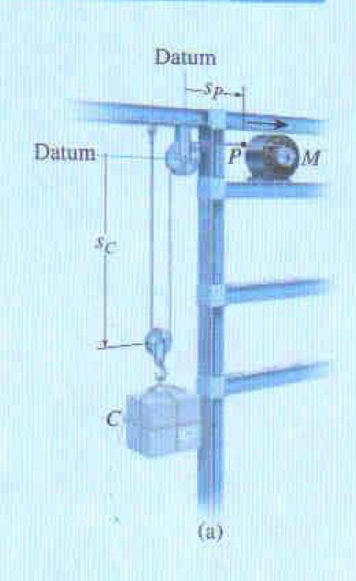

Los requisitos de potencia de este elevador dependen de la fuerza vertical **F** que actúa sobre el elevador y causa que se mueva hacia arriba. Si la velocidad del elevador es **v**, entonces la salida de potencia es $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$.

## PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

La potencia suministrada a un cuerpo puede calcularse usando el siguiente procedimiento.

- Primero determine la fuerza externa **F** que actúa sobre el cuerpo que causa el movimiento. Esta fuerza es usualmente desarrollada por una máquina o un motor colocados dentro o fuera del cuerpo.
- Si el cuerpo está acelerando, puede ser necesario Dibujar su diagrama de cuerpo libre y aplicar la ecuación de movimiento ($\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$) para determinar **F**.
- Una vez que **F** y la velocidad **v** del punto donde **F** está aplicada han sido encontrados, la potencia es determinada multiplicando la magnitud de la fuerza por la componente de velocidad que actúa en la dirección de **F**, (esto es, $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v} = Fv \cos \theta$).
- En algunos problemas la potencia puede ser encontrada calculando el trabajo realizado mediante **F** por unidad de tiempo ($P_{\text{prom}} = \Delta U/\Delta t$, o $P = dU/dt$).

## EJEMPLO 14.7



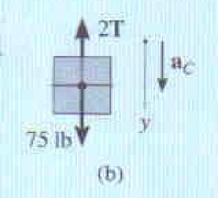




Fig. 14–15

El motor $M$ del malacate mostrado en la figura 14-15$a$ opera con eficiencia $\epsilon = 0.85$. Determine la potencia que debe suministrarse al motor para levantar la caja $C$ de 75 lb en el instante en que el punto $P$ sobre el cable tiene aceleración de 4 pies/s$^2$ y velocidad de 2 pies/s. Desprecie la masa de la polea y el cable.

### Solución

Para calcular la salida de potencia del motor, primero es necesario determinar la tensión en el cable ya que esta fuerza es desarrollada por el motor.

A partir del diagrama de cuerpo libre, figura 14-15$b$, tenemos

$$+\downarrow \Sigma F_y = ma_y; \qquad -2T + 75 \text{ lb} = \frac{75 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2} a_c \qquad (1)$$

La aceleración de la caja puede obtenerse usando cinemática para relacionarla con la aceleración conocida del punto $P$, figura 14-15$a$. Usando los métodos de la sección 12.9, las coordenadas $s_C$ y $s_P$ en la figura 14-15$a$ pueden ser relacionadas con una porción constante de cable de longitud $l$ que está cambiando en las direcciones vertical y horizontal. Tenemos $2s_C + s_P = l$. Tomando la segunda derivada con respecto al tiempo de esta ecuación resulta

$$2a_C = -a_P \qquad (2)$$

Como $a_P = +4$ pies/s$^2$, entonces $a_C = (-4 \text{ pies/s}^2)/2 = -2$ pies/s$^2$. ¿Qué indica el signo negativo? Sustituyendo este resultado en la ecuación 1 y *reteniendo* el signo negativo ya que la aceleración en *ambas* ecuaciones 1 y 2 es considerado positivo hacia abajo, tenemos

$$-2T + 75 \text{ lb} = \frac{75 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}(-2 \text{ pies/s}^2)$$
$$T = 39.8 \text{ lb}$$

La salida de potencia, medida en unidades de caballos de potencia, requerida para extraer el cable a razón de 2 pies/s es, por tanto,

$$P = \mathbf{T} \cdot \mathbf{v} = (39.8 \text{ lb})(2 \text{ pies/s})[1 \text{ hp}/(550 \text{ pies} \cdot \text{lb/s})]$$
$$= 0.145 \text{ hp}$$

Esta *salida de potencia* requiere que el motor proporcione una *entrada de potencia* de

$$\text{entrada de potencia} = \frac{1}{\epsilon}(\text{salida de potencia})$$
$$= \frac{1}{0.85}(0.145 \text{ hp}) = 0.170 \text{ hp} \qquad \textit{Resp.}$$

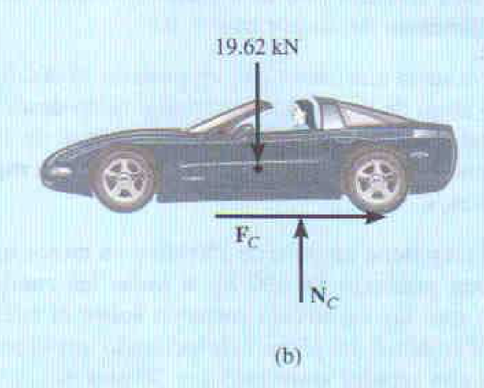
Como la velocidad de la caja está cambiando constantemente, observe que este requisito de potencia es *instantáneo*.

## EJEMPLO 14.8

El carro deportivo mostrado en la figura 14-16*a* tiene masa de 2 Mg y está viajando con rapidez de 25 m/s, cuando los frenos de todos los neumáticos son aplicados. Si el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.35$, determine la potencia desarrollada por la fuerza de fricción cuando el automóvil resbala. Luego encuentre la rapidez del automóvil después que se ha deslizado 10 m.




(a)




(b)

Fig. 14-16

### Solución

Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre, figura 14-16*b*, la fuerza normal $\mathbf{N}_C$ y la fuerza de fricción $\mathbf{F}_C$ representan las *fuerzas resultantes* de las cuatro ruedas.

Aplicando la ecuación de equilibrio en la dirección *y* para determinar $N_C$, tenemos

$$+\uparrow \Sigma F_y = 0; \qquad N_C = 19.62 \text{ kN}$$

La fuerza de fricción es, por tanto,

$$F_C = 0.35(19.62 \text{ kN}) = 6.867 \text{ kN}$$

La velocidad del automóvil puede ser determinada cuando $s = 10$ m aplicando el principio del trabajo y la energía. ¿Por qué?

$$T_1 + \Sigma U_{1\text{-}2} = T_2$$

$$\tfrac{1}{2}(2000 \text{ kg})(25 \text{ m/s})^2 - 6.867(10^3)\text{N}(10 \text{ m}) = \tfrac{1}{2}(2000 \text{ kg})v^2$$

$$v = 23.59 \text{ m/s}$$

La potencia de la fuerza de fricción en este instante es entonces

$$P = |\mathbf{F}_C \cdot \mathbf{v}| = 6.867(10^3)\text{N}(25 \text{ m/s}) = 172 \text{ kW} \qquad \textit{Resp.}$$

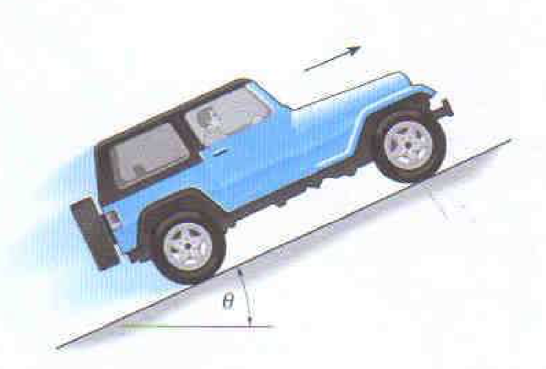
## PROBLEMAS

**14-41.** El motor diesel de un tren de 400 Mg incrementa su rapidez uniformemente desde el reposo hasta 10 m/s en 100 s a lo largo de una vía horizontal. Determine la potencia promedio desarrollada.

**14-42.** Determine la entrada de potencia necesaria en un motor para levantar 300 lb a razón constante de 5 pies/s. La eficiencia del motor es $\epsilon = 0.65$.

**14-43.** Un tranvía eléctrico tiene un peso de 15 000 lb y acelera a lo largo de un camino horizontal recto desde el reposo de tal manera que la potencia es siempre de 100 hp. Determine cuánto tiempo le toma alcanzar una rapidez de 40 pies/s.

***14-44.** El jeep tiene un peso de 2500 lb y un motor que transmite una potencia de 100 hp a *todas* las ruedas. Suponiendo que las ruedas no resbalan sobre el suelo, determine el ángulo $\theta$ del plano más inclinado que el jeep puede subir con rapidez constante $v = 30$ pies/s.




Prob. 14–44

**14-45.** Un automóvil con masa de 2 Mg viaja hacia arriba por una pendiente de 7° con rapidez constante $v = 100$ km/h. Si la fricción mecánica y la resistencia del aire son despreciadas, determine la potencia desarrollada por el motor si el automóvil tiene una eficiencia $\epsilon = 0.65$.



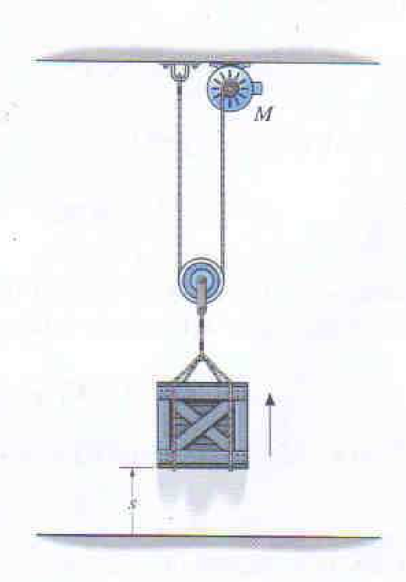

Prob. 14–45

**14-46.** Un camión cargado pesa $16(10^3)$ lb y acelera uniformemente en un camino a nivel desde 15 pies/s hasta 30 pies/s durante 4 s. Si la resistencia por fricción del movimiento es de 325 lb, determine la potencia máxima que debe ser entregada a las ruedas.

**14-47.** Un tranvía eléctrico tiene un peso de 15 000 lb y acelera a lo largo de una vía horizontal recta desde el reposo de tal manera que la potencia es siempre igual a 100 hp. Determine qué tan lejos debe viajar para alcanzar una rapidez de 40 pies/s.

***14-48.** Los escalones de una escalera mecánica se mueven con rapidez constante de 0.6 m/s. Si los escalones tienen 125 mm de alto y 250 mm de longitud, determine la potencia necesaria en el motor para levantar una masa promedio de 150 kg por escalón. Se tienen 32 escalones.

**14-49.** A la caja de 50 lb se le imprime una rapidez de 10 pies/s en $t = 4$ s partiendo del reposo. Si la aceleración es constante, determine la potencia que debe ser suministrada al motor cuando $t = 2$ s. El motor tiene eficiencia $\epsilon = 0.76$. Desprecie la masa de la polea y el cable.

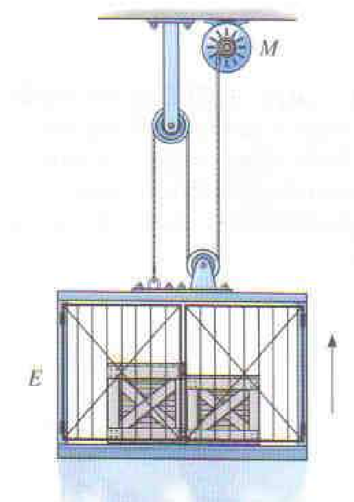



Prob. 14–49

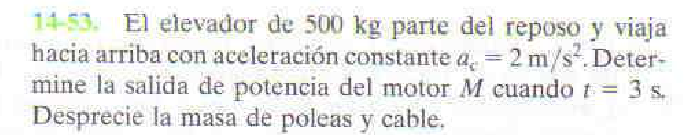
**14-50.** Un carro tiene masa $m$ y acelera a lo largo de un camino recto horizontal desde el reposo de tal manera que la potencia es siempre una cantidad constante $P$. Determine qué tan lejos debe viajar el carro para alcanzar una rapidez de $v$.

**14-51.** Para dramatizar la pérdida de energía en un automóvil, considere un carro con peso de 5 000 lb que está viajando a 35 mi/h. Si el carro es detenido, determine cuánto tiempo debe permanecer encendido un foco de 100 W para consumir la misma cantidad de energía. (1 mi = 5280 pies.)

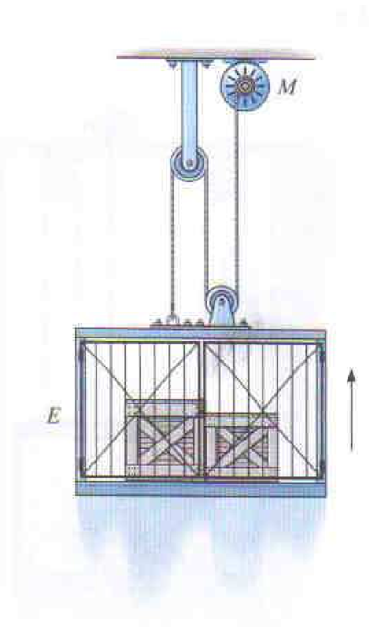
***14-52.** El motor $M$ se usa para levantar el elevador de 500 kg con velocidad constante $v_E = 8$ m/s. Si el motor extrae 60 kW de potencia eléctrica, determine su eficiencia. Desprecie la masa de poleas y cable.




Prob. 14–52

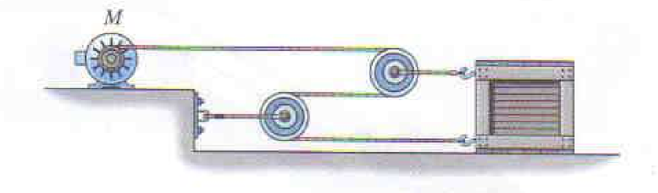


**14-53.** El elevador de 500 kg parte del reposo y viaja hacia arriba con aceleración constante $a_c = 2\ \text{m/s}^2$. Determine la salida de potencia del motor $M$ cuando $t = 3$ s. Desprecie la masa de poleas y cable.



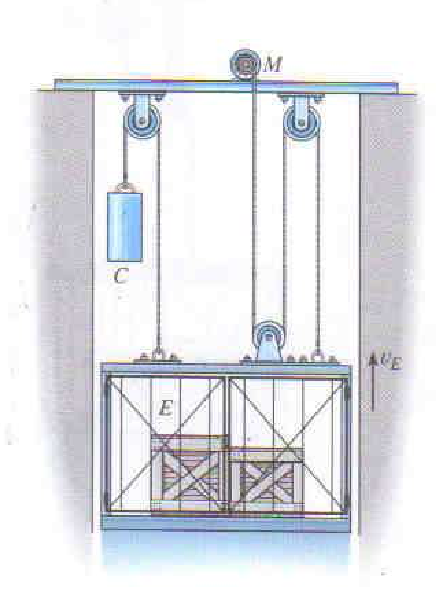

Prob. 14-53

**14-54.** La caja tiene masa de 150 kg y descansa sobre una superficie para la cual los coeficientes de fricción estática y cinética son $\mu_s = 0.3$ y $\mu_k = 0.2$, respectivamente. Si el motor $M$ suministra en el cable una fuerza $F = (8t^2 + 20)$ N, donde $t$ está en segundos, determine la salida de potencia desarrollada por el motor cuando $t = 5$ s.



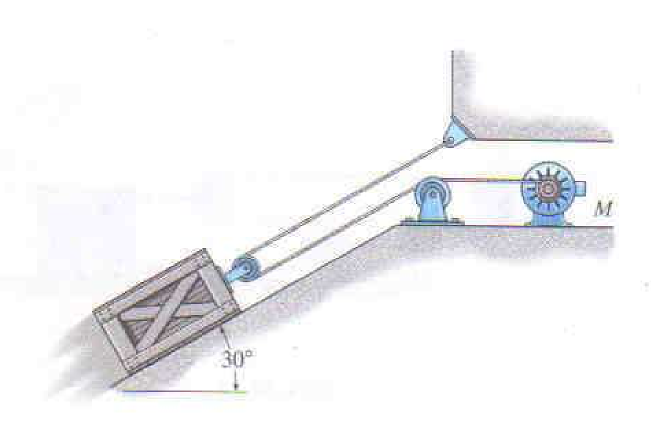

Prob. 14–54

**14-55.** El elevador $E$ y su carga tienen una masa total de 400 kg. El izado es proporcionado por el motor $M$ y el bloque $C$ de 60 kg. Si el motor tiene eficiencia $\epsilon = 0.6$, determine la potencia que debe suministrarse a éste cuando el elevador es izado con rapidez constante $v_E = 4$ m/s.




Prob. 14-55

***14-56.** La caja de 50 kg es levantada por el plano inclinado 30° mediante el sistema de polea y motor $M$. Si la caja parte del reposo y por aceleración constante alcanza una rapidez de 4 m/s después de viajar 8 m a lo largo del plano, determine la potencia que debe ser suministrada al motor en este instante. Desprecie la fricción a lo largo del plano. El motor tiene eficiencia $\epsilon = 0.74$.




Prob. 14-56

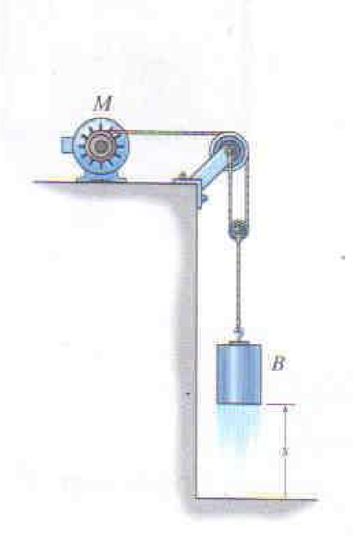
**14-57.** El carro deportivo tiene masa de 2.3 Mg y mientras está viajando a 28 m/s el conductor lo acelera a 5 m/s². Si la resistencia debida al viento es $F_D = (0.3v^2)$ N sobre el carro, donde $v$ es la velocidad en m/s, determine la potencia suministrada al motor en este instante. El motor tiene eficiencia $\epsilon = 0.68$.

**14-58.** El carro deportivo tiene masa de 2.3 Mg y acelera a 6 m/s², partiendo del reposo. Si la resistencia debida al viento es $F_D = (10v)$ N sobre el carro, donde $v$ es la velocidad en m/s, determine la potencia suministrada al motor cuando $t = 5$ s. Éste tiene eficiencia $\epsilon = 0.68$.



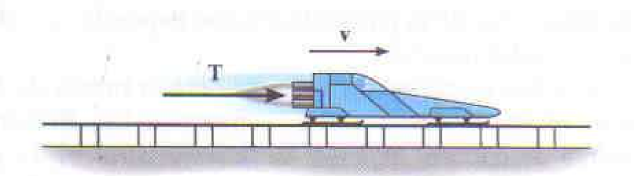

Prob. 14-57/58

**14-59.** La carga de 50 lb es levantada mediante el sistema de polea y motor $M$. Si éste ejerce una fuerza constante de 30 lb sobre el cable, determine la potencia que le debe ser suministrada si la carga ha sido levantada $s = 10$ pies partiendo del reposo. El motor tiene eficiencia $\epsilon = 0.76$.



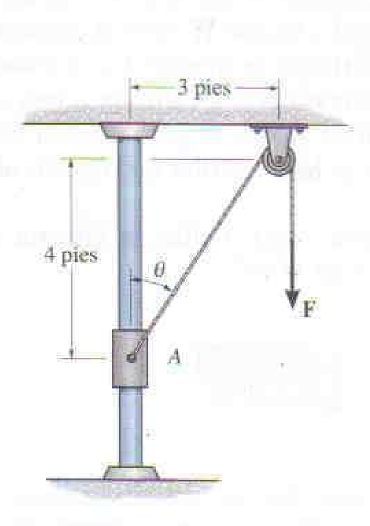

Prob. 14-59

*14-60. El trineo cohete tiene masa de 4 Mg y viaja desde el reposo a lo largo de la vía horizontal para la cual el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.20$. Si el motor proporciona un empuje constante $T = 150$ kN, determine su salida de potencia como función del tiempo. Desprecie la pérdida de masa combustible y la resistencia del aire.




Prob. 14-60

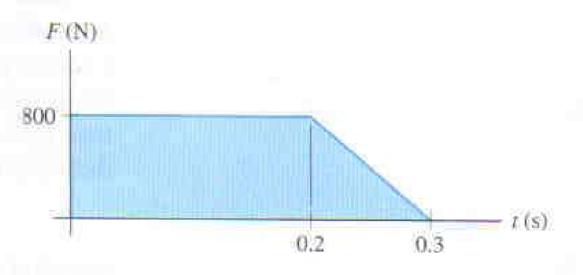
14-61. El collar de 10 lb parte del reposo en $A$ y es levantado aplicando una fuerza constante $F = 25$ lb a la cuerda. Si la barra es lisa, determine la potencia desarrollada por la fuerza en el instante $\theta = 60°$.

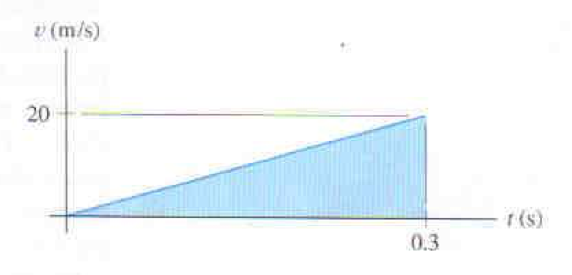



Prob. 14-61

14-62. Un atleta empuja contra una máquina de ejercicio con una fuerza que varía con el tiempo como se muestra en la primera gráfica. Además, la velocidad del brazo del atleta actuando en la misma dirección que la fuerza varía con el tiempo como se muestra en la segunda gráfica. Determine la potencia aplicada como función del tiempo y el trabajo realizado en $t = 0.3$ s.

14-63. Un atleta empuja contra una máquina de ejercicio con una fuerza que varía con el tiempo como se muestra en la primera gráfica. Además, la velocidad del brazo del atleta actuando en la misma dirección que la fuerza varía con el tiempo como se muestra en la segunda gráfica. Determine la potencia máxima desarrollada durante el periodo de 0.3 segundos.




Probs. 14-62/63

## 14.5 Fuerzas conservativas y energía potencial

**Fuerza conservativa.** Cuando el trabajo realizado por una fuerza al mover una partícula de un punto a otro es *independiente de la trayectoria* seguida por la partícula, entonces esta fuerza se denomina *fuerza conservativa*. El peso de una partícula y la fuerza de un resorte elástico son dos ejemplos de fuerzas conservativas encontradas a menudo en mecánica. El trabajo realizado por el peso de una partícula es *independiente de la trayectoria* ya que depende sólo del *desplazamiento vertical* de la partícula. El trabajo realizado por un resorte que *actúa sobre una partícula* es *independiente de la trayectoria* de la partícula, ya que depende sólo de la extensión o compresión $s$ del resorte.

En contraste con una fuerza conservativa, considere la fuerza de fricción ejercida *sobre un objeto deslizable* por una superficie fija. El trabajo realizado por la fuerza de fricción *depende de la trayectoria*; entre más larga sea la trayectoria, mayor es el trabajo. En consecuencia, *las fuerzas de fricción no son conservativas*. El trabajo es disipado por el cuerpo en forma de calor.

**Energía potencial.** La energía puede ser definida como la capacidad de efectuar trabajo. Cuando la energía proviene del *movimiento* de la partícula se llama *energía cinética*. Cuando proviene de la *posición* de la partícula, medida desde un datum fijo o plano de referencia, la fuerza se denomina energía potencial. Así, la *energía potencial* es una medida de la cantidad de trabajo que una fuerza conservativa realizará cuando se mueva desde una posición dada hasta el datum. En mecánica, la energía potencial debida a la gravedad (peso) o a un resorte elástico es de gran importancia.

**Energía potencial gravitatoria.** Si una partícula está localizada a una distancia $y$ por *arriba* de un datum elegido arbitrariamente, como se muestra en la figura 14-17, el peso **W** de la partícula tiene una *energía potencial gravitatoria* positiva, $V_g$, ya que **W** tiene la capacidad de efectuar trabajo positivo cuando la partícula es movida hacia abajo de regreso al datum. Igualmente, si la partícula está localizada a una distancia $y$ por *abajo* del datum, $V_g$ es negativa ya que el peso efectúa trabajo negativo cuando la partícula es movida hacia arriba de regreso al datum. En el datum $V_g = 0$.

En general, si $y$ es positiva hacia arriba, la energía potencial gravitatoria de la partícula de peso $W$ es*

$$V_g = Wy \tag{14–13}$$

*Aquí el peso se supone *constante*. Esta suposición es adecuada para pequeñas diferencias en elevación $\Delta y$. Sin embargo, cuando el cambio en elevación es importante, una variación del peso con la elevación debe ser tomada en cuenta (vea el Prob. 14-96).

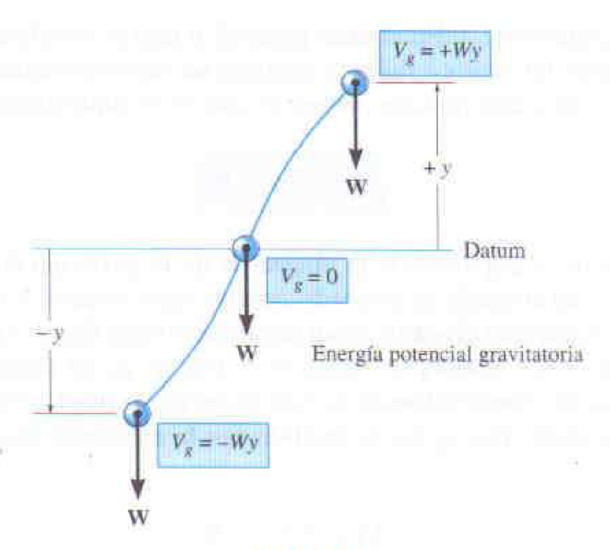



Fig. 14-17

**Energía potencial elástica.** Cuando un resorte elástico es alargado o comprimido una distancia $s$ desde su posición no alargada, la energía potencial elástica $V_e$ debida a la configuración del resorte puede ser expresada como

$$V_e = +\frac{1}{2}ks^2 \tag{14-14}$$

Aquí $V_e$ es *siempre positiva* ya que, en la posición deformada, la fuerza del resorte siempre tiene la *capacidad* de efectuar trabajo positivo sobre la partícula cuando el resorte retorna a su posición no alargada, figura 14-18.

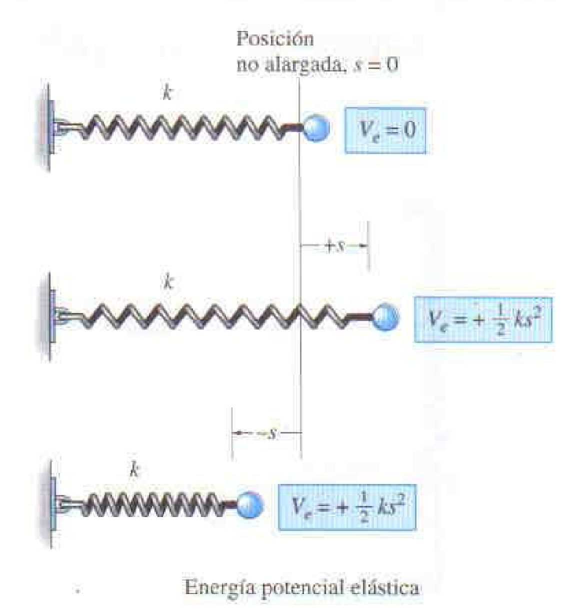



Fig. 14-18

**Función potencial.** En el caso general, si una partícula está sometida a fuerzas gravitatorias y a fuerzas elásticas, su energía potencial puede ser expresada como una *función potencial*, que es la suma algebraica

$$V = V_g + V_e \tag{14–15}$$

La medida de $V$ depende de la ubicación de la partícula con respecto a un datum seleccionado de acuerdo con las ecuaciones 14-13 y 14-14.

Si la partícula está ubicada en un punto arbitrario $(x, y, z)$ en el espacio, esta función potencial es entonces $V = V(x, y, z)$. El trabajo realizado por una fuerza conservativa al mover la partícula desde el punto $(x_1, y_1, z_1)$ hasta el punto $(x_2, y_2, z_2)$ es medido por la *diferencia* de esta función, esto es,

$$U_{1-2} = V_1 - V_2 \tag{14–16}$$

Por ejemplo, la función potencial para una partícula de peso $W$ suspendida de un resorte puede ser expresada en términos de su posición $s$ medida desde un datum ubicado en la longitud no alargada del resorte, figura 14-19. Tenemos

$$\begin{aligned} V &= V_g + V_e \\ &= -Ws + \tfrac{1}{2}ks^2 \end{aligned}$$

Si la partícula se mueve desde $s_1$ hasta una posición inferior $s_2$, entonces, aplicando la ecuación 14-16, puede verse que el trabajo de $\mathbf{W}$ y $\mathbf{F}_s$ es

$$\begin{aligned} U_{1-2} = V_1 - V_2 &= (-Ws_1 + \tfrac{1}{2}ks_1^2) - (-Ws_2 + \tfrac{1}{2}ks_2^2) \\ &= W(s_2 - s_1) - (\tfrac{1}{2}ks_2^2 - \tfrac{1}{2}ks_1^2) \end{aligned}$$

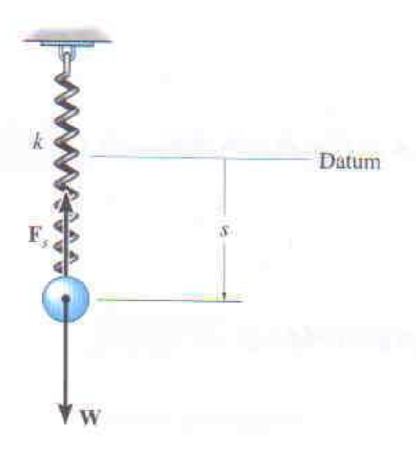



Fig. 14–19

Cuando el desplazamiento a lo largo de la trayectoria es infinitesimal, es decir, del punto $(x, y, z)$ a $(x + dx, y + dy, z + dz)$, la ecuación 14-16 toma la forma

$$\begin{aligned} dU &= V(x, y, z) - V(x + dx, y + dy, z + dz) \\ &= -dV(x, y, z) \end{aligned} \tag{14–17}$$

Si la fuerza y el desplazamiento son definidos usando coordenadas rectangulares, entonces el trabajo también puede ser expresado como

$$\begin{aligned} dU &= \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = (F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}) \cdot (dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}) \\ &= F_x dx + F_y dy + F_z dz \end{aligned}$$

Sustituyendo este resultado en la ecuación 14-17 y expresando la diferencial $dV(x, y, z)$ en términos de sus derivadas parciales obtenemos

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\left(\frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz\right)$$

Como todos los cambios en $x$, $y$ y $z$ son independientes uno de otro, esta ecuación se satisface si

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}, \qquad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}, \qquad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} \tag{14–18}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\frac{\partial V}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\mathbf{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\mathbf{k} \\ &= -\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)V \end{aligned}$$

o bien

$$\mathbf{F} = -\nabla V \tag{14–19}$$

donde $\nabla$ representa el operador vectorial $\nabla = (\partial/\partial x)\mathbf{i} + (\partial/\partial y)\mathbf{j} + (\partial/\partial z)\mathbf{k}$.

La ecuación 14-19 relaciona una fuerza $\mathbf{F}$ con su función potencial $V$ y con ello proporciona un criterio matemático para probar que $\mathbf{F}$ es conservativa. Por ejemplo, la función potencial gravitatoria para un peso localizado a una distancia $y$ por arriba de un datum es $V_g = Wy$. Para probar que $\mathbf{W}$ es conservativa, es necesario mostrar que satisface la ecuación 14-19 (o la Ec. 14-18), en cuyo caso

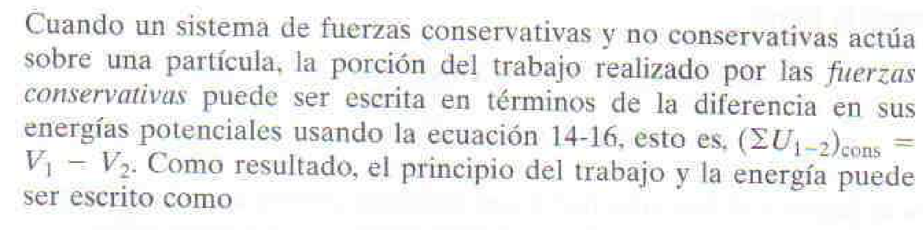
$$F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}; \qquad F = -\frac{\partial}{\partial y}(Wy) = -W$$

El signo negativo indica que $\mathbf{W}$ actúa hacia abajo, opuesta a la $y$ positiva, que es hacia arriba.

## 14.6 Conservación de la energía



El peso de los sacos que descansan sobre esta plataforma ocasiona que energía potencial sea almacenada en los resortes de soporte. Al retirar cada saco, la plataforma se *levantará* ligeramente ya que parte de la energía potencial de los resortes se transferirá como un incremento a la energía potencial gravitatoria de los sacos restantes. Tal dispositivo es útil para retirar los sacos sin tener que inclinarse para tomarlos cuando son descargados.



Cuando un sistema de fuerzas conservativas y no conservativas actúa sobre una partícula, la porción del trabajo realizado por las *fuerzas conservativas* puede ser escrita en términos de la diferencia en sus energías potenciales usando la ecuación 14-16, esto es, $(\Sigma U_{1-2})_{cons} = V_1 - V_2$. Como resultado, el principio del trabajo y la energía puede ser escrito como

$$T_1 + V_1 + (\Sigma U_{1-2})_{\text{no cons.}} = T_2 + V_2 \qquad (14\text{–}20)$$

Aquí $(\Sigma U_{1-2})_{\text{no cons}}$ representa el trabajo de las fuerzas no conservativas que actúan sobre la partícula. Si *sólo fuerzas conservativas* son aplicadas al cuerpo, este término es cero y entonces tenemos

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \qquad (14\text{–}21)$$

A esta ecuación se le conoce como *ecuación de la conservación de la energía mecánica*, o simplemente como de la *conservación de la energía*. Esta ecuación establece que durante el movimiento, la suma de las energías cinética y potencial de la partícula permanece *constante*. Para que esto ocurra, la energía cinética debe ser transformada en energía potencial, y viceversa. Por ejemplo, si una bola de peso **W** es dejada caer desde una altura $h$ sobre el suelo (datum), figura 14-20, la energía potencial de la bola es máxima antes de dejarla caer y su energía cinética es cero. La energía mecánica total de la bola en su posición inicial es entonces

$$E = T_1 + V_1 = 0 + Wh = Wh$$

Cuando la bola ha caído una distancia $h/2$, su rapidez puede ser determinada usando $v^2 = v_0^2 + 2a_c(y - y_0)$, que da $v = \sqrt{2g(h/2)} = \sqrt{gh}$. La energía de la bola en la posición a media altura es, por tanto,

$$E = T_2 + V_2 = \frac{1}{2}\frac{W}{g}(\sqrt{gh})^2 + W\frac{h}{2} = Wh$$

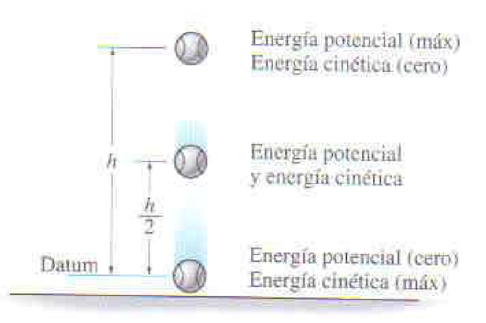



**Fig. 14–20**

Justo antes de que la bola toque el suelo, su energía potencial es cero y su rapidez $v = \sqrt{2gh}$. Aquí, de nuevo, la energía total de la bola es

$$E = T_3 + V_3 = \frac{1}{2}\frac{W}{g}(\sqrt{2gh})^2 + 0 = Wh$$

Observe que cuando la bola entra en contacto con el suelo se deforma en alguna medida, y si el suelo es lo suficientemente duro, la bola rebotará alcanzando una nueva altura $h'$, la cual será menor que la altura $h$ desde la cual fue soltada primero. Despreciando la fricción del aire, la diferencia en altura explica la pérdida de energía, $E_l = W(h - h')$, que ocurre durante la colisión. Porciones de esta pérdida producen ruido, deformación localizada en la bola y el suelo, y calor.

**Sistema de partículas.** Si un sistema de partículas está *sometido sólo a fuerzas conservativas*, entonces, para las partículas, puede ser escrita una ecuación similar a la 14-21. Aplicando las ideas del análisis precedente, la ecuación 14-8 o $\Sigma T_1 + \Sigma U_{1-2} = \Sigma T_2$, toma la forma

$$\Sigma T_1 + \Sigma V_1 = \Sigma T_2 + \Sigma V_2 \tag{14-22}$$

Aquí, la suma de las energías iniciales cinética y potencial del sistema es igual a la suma de las energías finales cinética y potencial del sistema. En otras palabras, $\Sigma T + \Sigma V =$ constante.

Es importante recordar que sólo problemas que impliquen sistemas conservadores de fuerzas (pesos y resortes) pueden ser resueltos usando el teorema de la conservación de la energía. Como se indicó, las fuerzas de fricción o fuerzas resistentes al arrastre, que dependen de la velocidad o de la aceleración, son no conservativas. Una porción del trabajo realizado por tales fuerzas es transformado en energía térmica, y en consecuencia esta energía se disipa en el entorno y no puede ser recuperada.

## PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

La ecuación de la conservación de la energía se usa para resolver problemas que implican *velocidad, desplazamiento* y *sistemas conservadores de fuerzas*. Por lo general es *más fácil aplicarla* que emplear el principio del trabajo y la energía porque la ecuación de energía requiere de especificar únicamente las energías cinética y potencial en sólo *dos puntos* a lo largo de la trayectoria, en vez de determinar el trabajo cuando la partícula se mueve a través de un *desplazamiento*. Para aplicaciones se sugiere usar el siguiente procedimiento.

*Energía potencial*

- Dibuje dos diagramas que muestren a la partícula ubicada en sus puntos inicial y final a lo largo de la trayectoria.
- Si la partícula está sometida a un desplazamiento vertical, establezca el datum fijo horizontal para medir desde ahí la energía potencial gravitatoria $V_g$ de la partícula.
- Los datos pertinentes a la elevación $y$ de la partícula desde el datum y la extensión o compresión $s$ de cualquier resorte conectado pueden ser determinados a partir de la geometría asociada con los dos diagramas.
- Recuerde que $V_g = Wy$, donde $y$ es positiva hacia arriba desde el datum y negativa hacia abajo desde el datum; también $V_e = \frac{1}{2}ks^2$, que es *siempre positiva*.

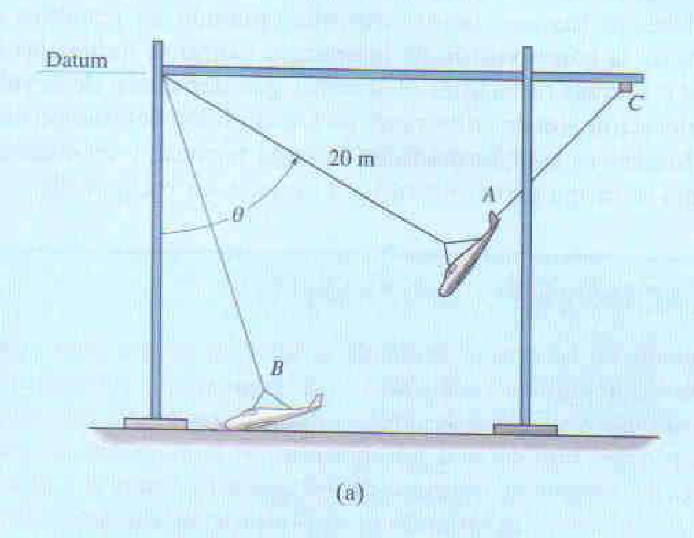
*Conservación de la energía*

- Aplique la ecuación $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$.
- Al determinar la energía cinética, $T = \frac{1}{2}mv^2$, la rapidez $v$ de la partícula debe ser medida desde un marco de referencia inercial.

## EJEMPLO 14.9



El pórtico que aparece en la fotografía se usa para probar la respuesta de un avión durante un choque. Como se muestra en la figura 14–21*a*, el avión con masa de 8 Mg es levantado hacia atrás hasta que $\theta = 60°$, y luego el cable *AC* que lo ha jalado se libera cuando el avión está en reposo. Determine la rapidez del avión justo antes de estrellarse contra el suelo, $\theta = 15°$. ¿Cuál es la tensión máxima desarrollada en el cable de soporte durante el movimiento? Desprecie el efecto de elevación causado por las alas durante el movimiento así como el tamaño del avión.




(a)




(b)

Fig. 14–21

### Solución

Como la fuerza del cable *no trabaja* sobre el avión, debe ser obtenida usando la ecuación de movimiento. Sin embargo, primero debemos determinar la rapidez del avión en *B*.

***Energía potencial.*** Por conveniencia, el datum ha sido establecido en la parte superior del pórtico.

***Conservación de la energía.***

$$T_A + V_A = T_B + V_B$$

$$0 - 8000\text{ kg }(9.81\text{ m/s}^2)(20\cos 60°\text{ m}) =$$

$$\tfrac{1}{2}(8000\text{ kg})v_B^2 - 8000\text{ kg }(9.81\text{ m/s}^2)(20\cos 15°\text{ m})$$

$$v_B = 13.5\text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

***Ecuación de movimiento.*** Usando los datos tabulados en el diagrama de cuerpo libre cuando el avión está en *B*, figura 14-21*b*, tenemos

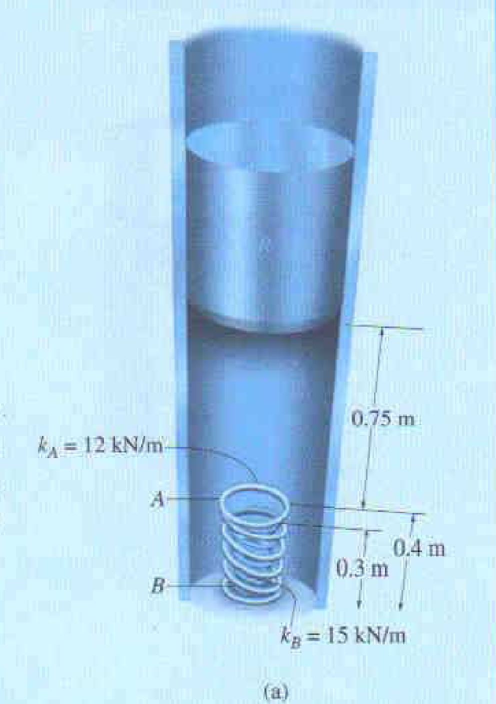
$$+\nwarrow \quad \Sigma F_n = ma_n;$$

$$T - 8000\,(9.81)\text{N}\cos 15° = (8000\text{ kg})\frac{(13.5\text{ m/s})^2}{20\text{ m}}$$

$$T = 149\text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

## EJEMPLO 14.10

El émbolo $R$ mostrado en la figura 14-22$a$ tiene masa de 100 kg y es liberado del reposo 0.75 m desde la parte superior de un resorte $A$ que tiene rigidez $k_A = 12$ kN/m. Si un segundo resorte $B$, con rigidez $k_B = 15$ kN/m está "anidado" en $A$, determine el desplazamiento máximo de $A$ necesario para detener el movimiento hacia abajo del émbolo. La longitud no alargada de cada resorte está indicada en la figura. Desprecie la masa de los resortes.



(a)

### Solución

***Energía potencial.*** *Supondremos* que el émbolo comprime *ambos* resortes en el instante en que llega al reposo. El datum pasa por el centro de gravedad del émbolo en su posición inicial, figura 14-22$b$. Cuando la energía cinética se reduce a cero ($v_2 = 0$), $A$ es comprimido una distancia $s_A$ y $B$ se comprime una distancia $s_B = s_A - 0.1$ m.

***Conservación de la energía.***

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$0 + 0 = 0 + \{\tfrac{1}{2}k_A s_A^2 + \tfrac{1}{2}k_B(s_A - 0.1)^2 - Wh\}$$

$$0 + 0 = 0 + \{\tfrac{1}{2}(12\,000 \text{ N/m})s_A^2 + \tfrac{1}{2}(15\,000 \text{ N/m})(s_A - 0.1\text{m})^2 - 981 \text{ N}(0.75 \text{ m} + s_A)\}$$

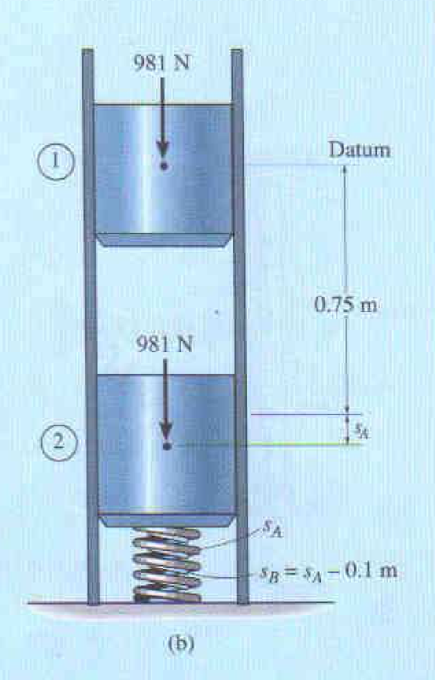
Reordenando los términos,

$$13\,500 s_A^2 - 2481 s_A - 660.75 = 0$$

Usando la fórmula cuadrática y despejando la raíz positiva,* tenemos

$$s_A = 0.331 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

Como $s_B = 0.331$ m $- 0.1$ m $= 0.231$ m, que es positiva, la suposición de que *ambos* resortes están comprimidos por el émbolo es correcta.

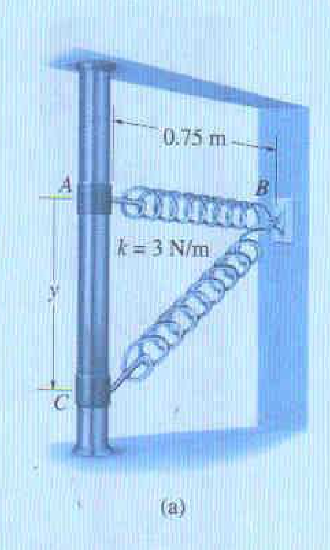


(b)

Fig. 14–22

*La segunda raíz, $s_A = -0.148$ m, no representa la situación física. Como $s$ positiva es medida hacia abajo, el signo negativo indica que el resorte $A$ tendría que ser "extendido" una cantidad de 0.148 m para detener el émbolo.

## EJEMPLO 14.11




(a)

Un collar $C$ liso de 2 kg, mostrado en la figura 14-23$a$, se ajusta con holgura sobre la flecha vertical. Si el resorte no está alargado cuando el collar se encuentra en la posición $A$, determine la rapidez con que el collar se está moviendo cuando $y = 1$ m si (a) es liberado del reposo en $A$, y (b) si es liberado en $A$ con una velocidad *hacia arriba* $v_A = 2$ m/s.

### Solución

#### Parte (a)

***Energía potencial.*** Por conveniencia, el datum es establecido a través de $AB$, figura 14-23$b$. Cuando el collar está en $C$, la energía potencial gravitatoria es $-(mg)y$, ya que el collar está *debajo* del datum, y la energía potencial elástica es $\frac{1}{2}ks^2_{CB}$. Aquí $s_{CB} = 0.5$ m, lo cual representa el *elongamiento* en el resorte como se muestra en la figura.

***Conservación de la energía.***

$$T_A + V_A = T_C + V_C$$

$$0 + 0 = \tfrac{1}{2}mv_C^2 + \{\tfrac{1}{2}ks_{CB}^2 - mgy\}$$

$$0 + 0 = \{\tfrac{1}{2}(2\text{ kg})v_C^2\} + \{\tfrac{1}{2}(3\text{ N/m})(0.5\text{ m})^2 - 2(9.81)\text{ N}(1\text{ m})\}$$

$$v_C = 4.39\text{ m/s}\downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

Este problema también puede ser resuelto usando la ecuación de movimiento o el principio del trabajo y la energía. Observe que en esos *dos* métodos la variación de la magnitud y la dirección de la fuerza del resorte debe ser tomada en cuenta (vea el ejemplo 13.4). Aquí, sin embargo, el método anterior de solución es claramente ventajoso ya que los cálculos dependen *sólo* de datos calculados en los puntos inicial y final de la trayectoria.

#### Parte (b)

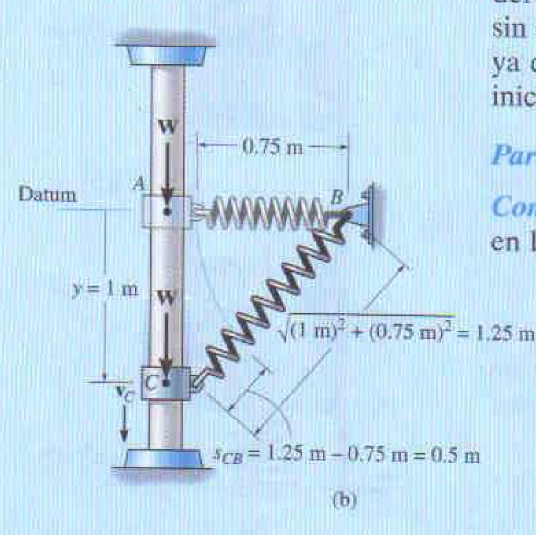
***Conservación de la energía.*** Si $v_A = 2$ m/s, usando los datos dados en la figura 14-23$b$, tenemos

$$T_A + V_A = T_C + V_C$$

$$\tfrac{1}{2}mv_A^2 + 0 = \tfrac{1}{2}mv_C^2 + \{\tfrac{1}{2}ks_{CB}^2 - mgy\}$$

$$\tfrac{1}{2}(2\text{ kg})(2\text{ m/s})^2 + 0 = \tfrac{1}{2}(2\text{ kg})v_C^2 + \{\tfrac{1}{2}(3\text{ N/m})(0.5\text{ m})^2 - 2(9.81)\text{ N}(1\text{ m})\}$$

$$v_C = 4.82\text{ m/s}\downarrow \qquad \textit{Resp.}$$




(b)

**Fig. 14–23**

Observe que la energía cinética del collar depende sólo de la magnitud de la velocidad, y por tanto no es importante si el collar se mueve hacia arriba o hacia abajo a 2 m/s al ser liberado en $A$.

# PROBLEMAS

*14-64. Resuelva el problema 14-18 usando la ecuación de la conservación de la energía.

14-65. Resuelva el problema 14-15 usando la ecuación de la conservación de la energía.

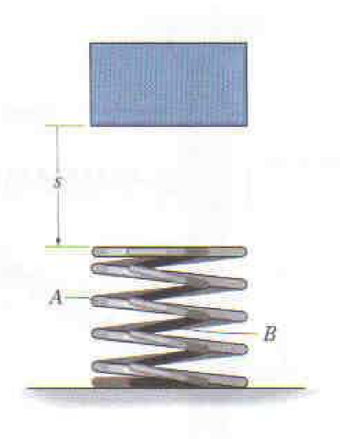
14-66. Resuelva el problema 14-17 usando la ecuación de la conservación de la energía.

14-67. Resuelva el problema 14-31 usando la ecuación de la conservación de la energía.

*14-68. Resuelva el problema 14-36 usando la ecuación de la conservación de la energía.

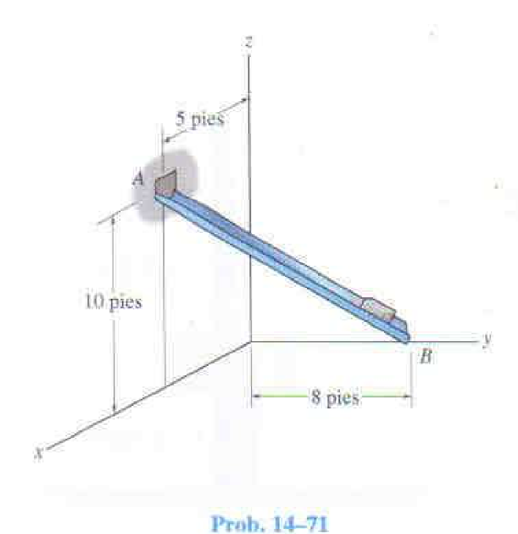
14-69. Resuelva el problema 14-23 usando la ecuación de la conservación de la energía.

14-70. Dos resortes de igual longitud están "anidados" uno en el otro para formar un amortiguador. Si éste está diseñado para detener el movimiento de una masa de 2 kg que se deja caer desde $s = 0.5$ m por arriba de los resortes desde el reposo, y la compresión máxima de los resortes debe ser de 0.2 m, determine la rigidez requerida del resorte interno, $k_B$, si el resorte externo tiene rigidez $k_A = 400$ N/m.



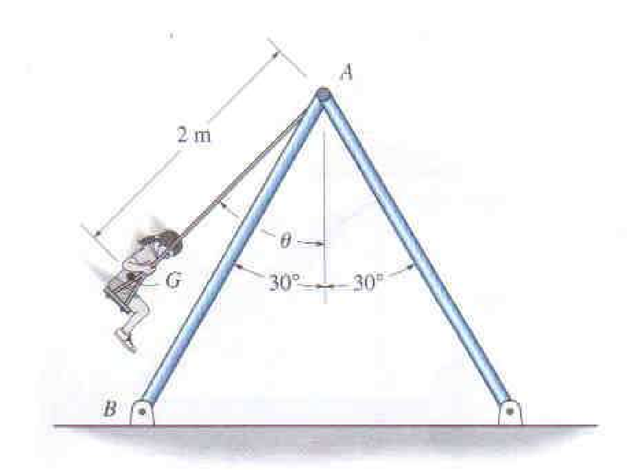

Prob. 14–70

14-71. El bloque tiene un peso de 1.5 lb y se desliza a lo largo de la canaleta lisa $AB$. El bloque es liberado del reposo en el punto $A$, que tiene coordenadas $A$(5 pies, 0, 10 pies). Determine la rapidez con que se desliza en $B$, que tiene coordenadas $B$(0, 8 pies, 0).




Prob. 14–71

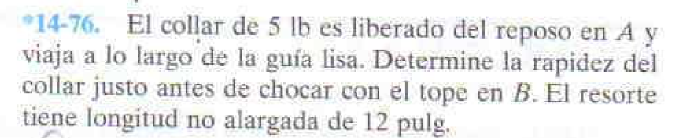
*14-72. La niña tiene masa de 40 kg y centro de masa en $G$. Si ella está oscilando a una altura máxima definida por $\theta = 60°$, determine la fuerza desarrollada a lo largo de cada uno de los postes de soporte como el $AB$ en el instante $\theta = 0°$. El columpio está ubicado centralmente entre los postes.




Prob. 14–72

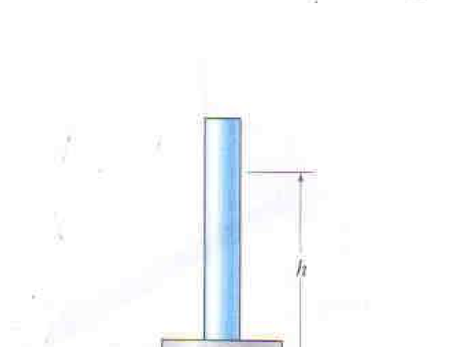
**14-73.** El collar tiene un peso de 8 lb. Si se empuja hacia abajo de modo que comprima al resorte 2 pies y entonces es liberado del reposo ($h = 0$), determine su rapidez cuando se ha desplazado $h = 4.5$ pies. El resorte no está unido al collar. Desprecie la fricción.

**14-74.** El collar tiene un peso de 8 lb. Si es liberado del reposo a una altura de $h = 2$ pies desde la parte superior del resorte no comprimido, determine la rapidez del collar después de caer y comprimir el resorte 0.3 pies.

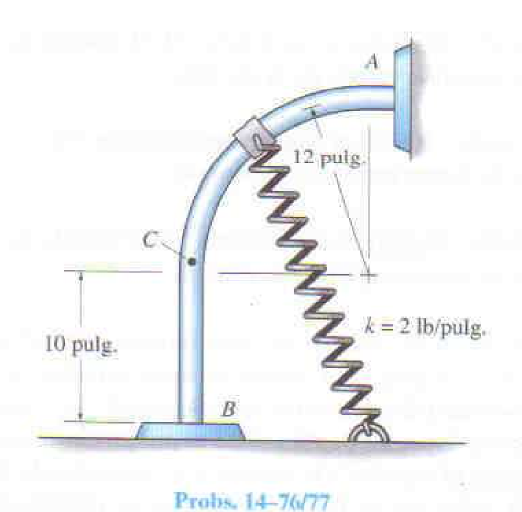


***14-76.** El collar de 5 lb es liberado del reposo en $A$ y viaja a lo largo de la guía lisa. Determine la rapidez del collar justo antes de chocar con el tope en $B$. El resorte tiene longitud no alargada de 12 pulg.

**14-77.** El collar de 5 lb es liberado del reposo en $A$ y viaja a lo largo de la guía lisa. Determine su rapidez cuando su centro alcanza el punto $C$ y la fuerza normal que ejerce sobre la barra en este punto. El resorte tiene longitud no alargada de 12 pulg., y el punto $C$ está localizado justo antes del extremo de la porción curva de la barra.



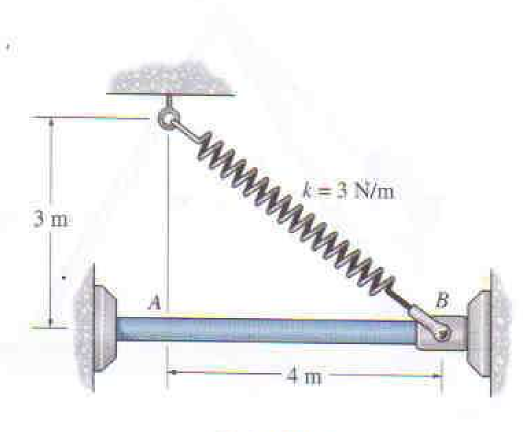

Probs. 14-73/74



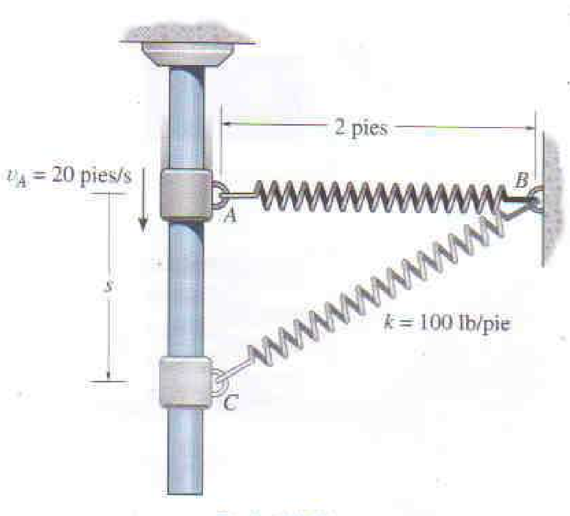

Probs. 14-76/77

**14-75.** El collar de 2 kg está unido a un resorte que tiene longitud no alargada de 3 m. Si el collar es jalado al punto $B$ y liberado del reposo, determine su rapidez cuando llega al punto $A$.

**14-78.** El bloque de 2 lb recibe una velocidad inicial de 20 pies/s cuando está en $A$. Si el resorte tiene longitud no alargada de 2 pies y rigidez $k = 100$ lb/pie, determine la velocidad del bloque cuando $s = 1$ pie.



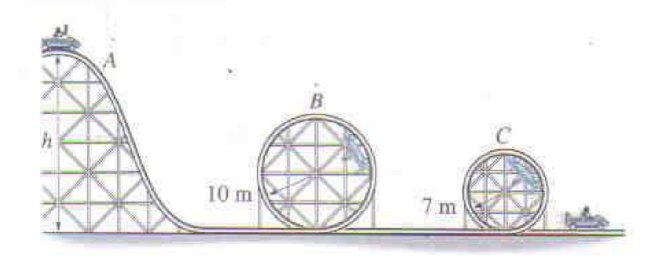

Prob. 14-75




Prob. 14-78

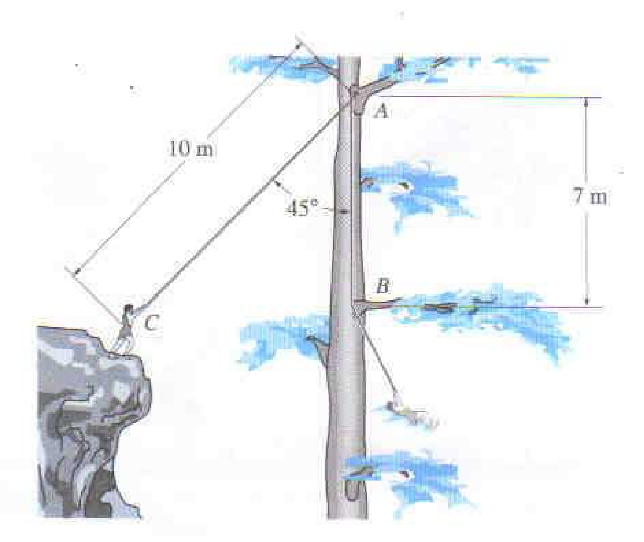
**14-79.** El carro de la montaña rusa tiene masa de 800 kg incluyendo al pasajero, y parte de la cresta $A$ con rapidez $v_A = 3$ m/s. Determine la altura mínima $h$ de la cresta necesaria para que el carro pueda recorrer los dos lazos sin separarse de la vía. Desprecie la fricción, la masa de las ruedas y el tamaño del carro. ¿Cuál es la fuerza normal sobre el carro cuando está en $B$ y en $C$?

***14-80.** El carro de la montaña rusa tiene masa de 800 kg incluyendo al pasajero. Si es liberado del reposo en la cresta $A$, determine la altura mínima $h$ de la cresta necesaria para que el carro recorra ambos lazos sin separarse de la vía. Desprecie la fricción, la masa de las ruedas y el tamaño del carro. ¿Cuál es la reacción normal sobre el carro cuando está en $B$ y en $C$?



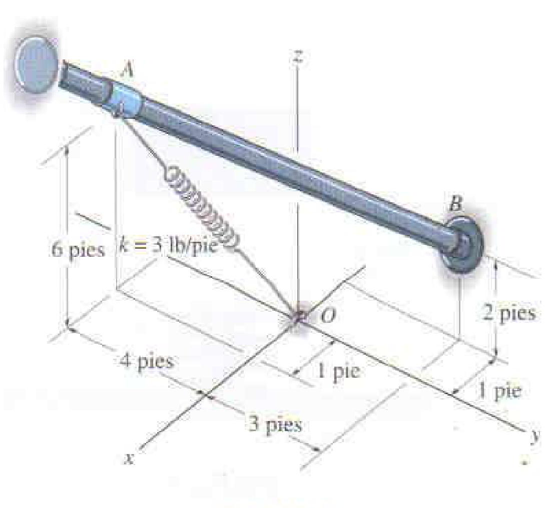

Probs. 14–79/80

**14-81.** Tarzán tiene masa de 100 kg y se balancea partiendo del reposo desde el acantilado sosteniéndose rígidamente sobre la liana que es de 10 m, medida desde la rama $A$ de soporte hasta su centro de masa. Determine su rapidez justo después que la liana toca la rama inferior localizada en el punto $B$. ¿Qué fuerza debe mantener Tarzán sobre la liana justo antes y justo después que la liana entra en contacto con la rama en $B$?



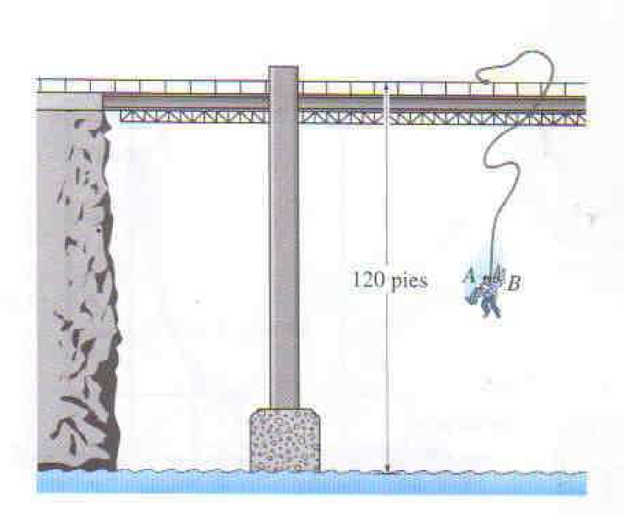

Prob. 14–81

**14-82.** El resorte tiene rigidez $k = 3$ lb/pie y longitud no alargada de 2 pies. Si está unido al collar liso de 5 lb y el collar es liberado del reposo en $A$, determine la rapidez del collar justo antes que toque el extremo de la barra situada en $B$. Desprecie el tamaño del collar.



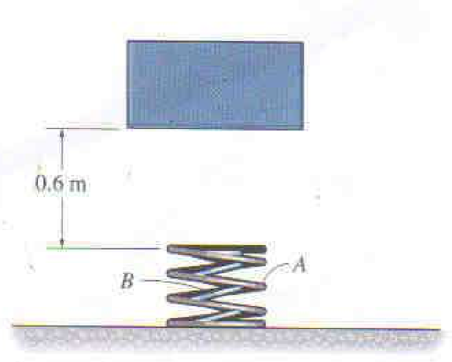

Prob. 14–82

**14-83.** Dos estudiantes $A$ y $B$, cada uno con peso de 150 lb, quieren saltar del puente partiendo del reposo y usando una cuerda elástica (cuerda *bungee*) con rigidez $k = 80$ lb/pie. Ellos desean llegar justo a la superficie del río, donde $A$, unido a la cuerda, debe soltar a $B$ en el instante en que tocan el agua. Determine la longitud apropiada sin estirar de la cuerda para lograrlo y calcule la aceleración máxima de $A$ y la altura máxima que alcanzará sobre el agua después del rebote. A partir de sus resultados, comente sobre la factibilidad de hacer esto.



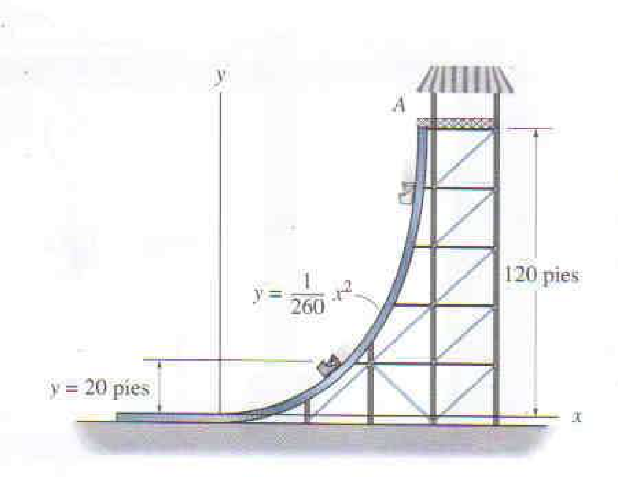

Prob. 14–83

***14-84.** Dos resortes de igual longitud con rigidez $k_A = 300$ N/m y $k_B = 200$ N/m están "anidados" uno con otro para formar un absorbedor de choques. Si un bloque de 2 kg se deja caer desde una posición en reposo 0.6 m por arriba de la parte superior de los resortes, determine su deformación cuando se detiene momentáneamente.




Prob. 14–84

**14-85.** El juego en un parque de diversiones consta de una góndola que es llevada a una altura de 120 pies en $A$. Si la góndola es soltada del reposo y cae por la vía parabólica, determine la rapidez en el instante $y = 20$ pies. Determine también la reacción normal de los rieles sobre la góndola en este instante. La góndola y el pasajero tienen un peso total de 500 lb. Desprecie los efectos de la fricción y la masa de las ruedas.



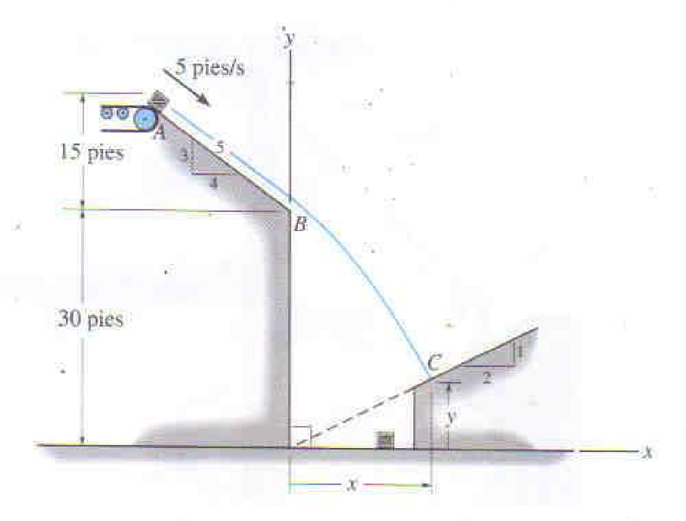

Prob. 14–85

**14-86.** Cuando la caja de 6 kg alcanza el punto $A$ tiene rapidez $v_A = 2$ m/s. Determine el ángulo $\theta$ con el que la caja deja la rampa lisa circular y la distancia $s$ a la que cae en el carro. Desprecie la fricción.

Prob. 14–86

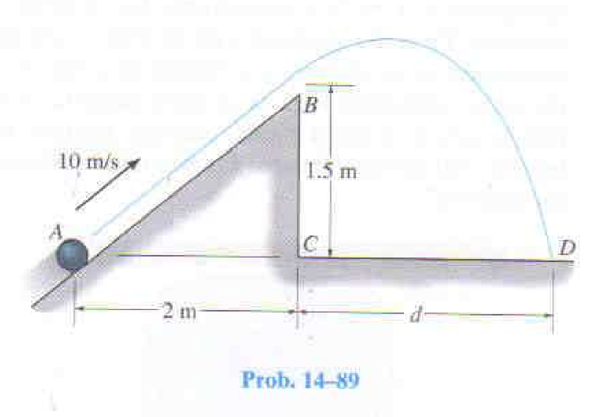
**14-87.** La caja de 2 lb tiene velocidad de 5 pies/s cuando empieza a resbalar hacia abajo por la superficie lisa inclinada localizada en $A$. Determine el punto $C$ $(x, y)$ donde la caja toca el plano inclinado inferior.

***14-88.** La caja de 2 lb tiene velocidad de 5 pies/s cuando empieza a resbalar hacia abajo por la superficie lisa inclinada localizada en $A$. Determine su rapidez justo antes de tocar la superficie en $C$ y el tiempo que le toma viajar de $A$ a $C$. Las coordenadas del punto $C$ son $x = 17.66$ pies y $y = 8.832$ pies.



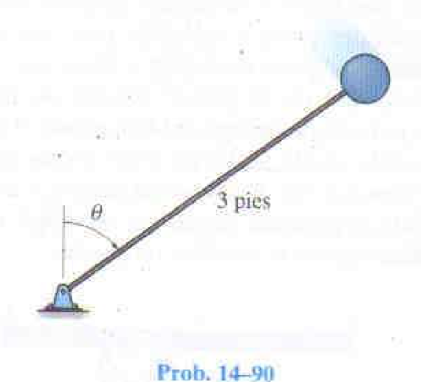

Probs. 14–87/88

**14-89.** La bola de 2 kg y tamaño insignificante es lanzada desde el punto $A$ con velocidad inicial de 10 m/s hacia arriba por el plano liso inclinado. Determine la distancia desde el punto $C$ hasta donde la bola toca la superficie horizontal en $D$. ¿Cuál es su velocidad cuando toca la superficie?




Prob. 14-89

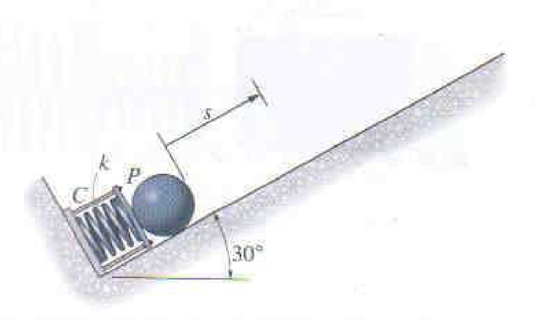
**14-90.** La bola tiene un peso de 15 lb y está fija a una barra de masa insignificante. Si es liberada del reposo cuando $\theta = 0°$, determine el ángulo $\theta$ para el cual la fuerza de compresión en la barra se vuelve cero.




Prob. 14-90

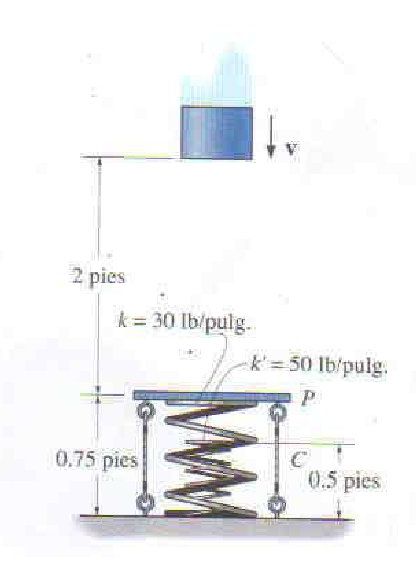
**14-91.** La bola de 0.5 lb es disparada desde el dispositivo con resorte mostrado. El resorte tiene rigidez $k$ = 10 lb/pulg., y las cuatro cuerdas $C$ y la placa $P$ mantienen al resorte comprimido en 2 pulg. cuando no hay carga sobre la placa. Ésta es empujada hacia atrás 3 pulg. desde su posición inicial. Si entonces es liberada del reposo, determine la rapidez de la bola cuando viaja 30 pulg. hacia arriba por el plano liso.

***14-92.** La bola de 0.5 lb es disparada desde el dispositivo con resorte mostrado. Determine la rigidez $k$ más pequeña requerida para disparar la bola a una distancia máxima de 30 pulg. hacia arriba por el plano inclinado después que el resorte es empujado hacia atrás 3 pulg. y la bola es liberada del reposo. Las cuatro cuerdas $C$ y la placa $P$ mantienen el resorte comprimido en 2 pulg. cuando no hay carga sobre la placa.



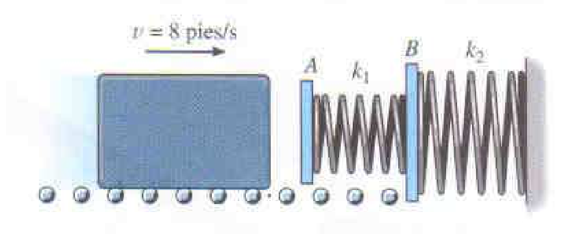

Probs. 14-91/92

**14-93.** Cuatro cables inelásticos $C$ están unidos a una placa $P$ y, cuando *no hay peso* sobre la placa, mantienen 0.25 pies en compresión al resorte de 1 pie de longitud. Se tiene también un resorte no deformado anidado dentro de este resorte comprimido. Si el bloque de 10 lb de peso se mueve hacia abajo a $v$ = 4 pies/s, cuando está a 2 pies por arriba de la placa, determine la compresión máxima en cada resorte después que el bloque golpea la placa. Desprecie la masa de la placa, del resorte, y cualquier energía perdida en la colisión.




Prob. 14-93

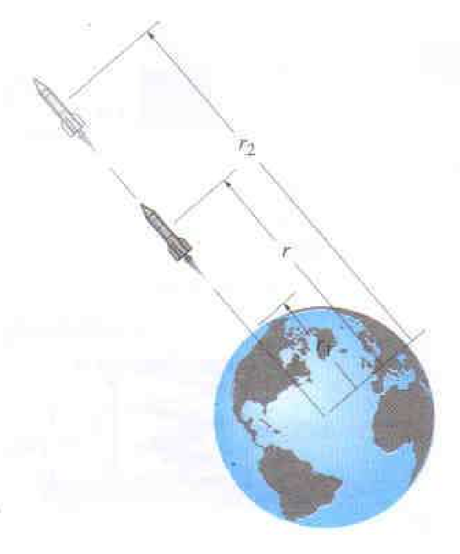
**14-94.** El amortiguador de doble resorte se usa para detener el lingote de acero de 1500 lb en la planta de laminación. Determine la deflexión máxima de la placa $A$ causada por el lingote si éste la golpea con una rapidez de 8 pies/s. Desprecie la masa de resortes, rodillos y placas $A$ y $B$. Considere $k_1 = 3000$ lb/pie, $k_2 = 4500$ lb/pie.




Prob. 14–94

**14-95.** Si la masa de la Tierra es $M_e$, demuestre que la energía potencial gravitatoria de un cuerpo de masa $m$ localizado a una distancia $r$ del centro de la Tierra es $V_g = -GM_e m/r$. Recuerde que la fuerza gravitatoria que actúa entre la Tierra y el cuerpo es $F = G(M_e m/r^2)$, ecuación 13-1. Para los cálculos, localice el datum en $r \rightarrow \infty$. Pruebe también que $F$ es una fuerza conservativa.

***14-96.** Un cohete de masa $m$ es disparado verticalmente desde la superficie de la Tierra, esto es, desde $r = r_1$. Suponiendo que no se pierde masa cuando viaja hacia arriba, determine el trabajo que debe efectuar el cohete contra la gravedad para alcanzar una distancia $r_2$. La fuerza de la gravedad es $F = GM_e m/r^2$, (Ec. 13−1), donde $M_e$ es la masa de la Tierra y $r$ la distancia entre el cohete y el centro de la Tierra.




Prob. 14–96

## PROYECTOS DE DISEÑO

### 14-1D. DISEÑO DE LA DEFENSA DE UN AUTOMÓVIL

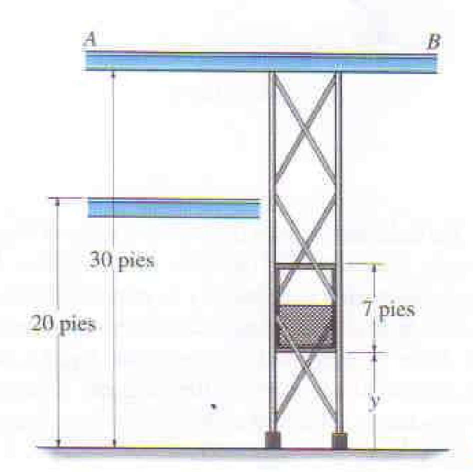
Un automóvil va a ser protegido por una defensa a base de resortes unida al marco del automóvil. Diseñe la defensa de manera que detenga un automóvil de 3500 lb viajando libremente a 5 mi/h y no deforme los resortes más de 3 pulgadas. Presente un croquis de su diseño que muestre la colocación de los resortes y su rigidez. Grafique el diagrama de carga−deflexión para la defensa durante una colisión directa con una pared rígida, también grafique la desaceleración del automóvil como función del desplazamiento de los resortes.




Prob. 14–1D

### 14-2D. DISEÑO DE UN ELEVADOR

Se requiere que un elevador y su contenido, con peso máximo de 500 lb, sean levantados a una altura $y = 20$ pies partiendo del reposo, y que luego de 6 segundos se detengan. Un motor simple con tambor enrollador de cable puede ser montado en cualquier parte y utilizado para realizar la operación. Durante cualquier elevación o descenso, la aceleración no debe exceder de 10 pies/s². Diseñe un sistema de polea y cable para el elevador; también estime el costo del material si el cable cuesta \$1.30/pie y las poleas cuestan \$3.50 cada una. Presente un dibujo de su diseño, e incluya gráficas de la salida de potencia requerida del motor y de la rapidez del elevador contra la altura $y$ recorrida.




Prob. 14–2D

## REPASO DEL CAPÍTULO

- *Trabajo de una fuerza.* Una fuerza efectúa trabajo cuando experimenta un desplazamiento a lo largo de su línea de acción. Si la fuerza varía con el desplazamiento, entonces $U = \int F\,ds$. Gráficamente, esto representa el área bajo el diagrama $F$–$s$. Si la fuerza es constante, entonces, para un desplazamiento $\Delta s$ en la dirección de la fuerza, $U = F\,\Delta s$.

  Un ejemplo típico de este caso es el trabajo del peso, $U = W\,\Delta y$.

  Aquí, $\Delta y$ es el desplazamiento vertical. Una fuerza de resorte, $F = ks$, depende del elongamiento o compresión $s$ del resorte. El trabajo es determinado por integración igual a $U = \frac{1}{2}ks^2$.

- *El principio del trabajo y la energía.* Si la ecuación de movimiento en la dirección tangencial, $\Sigma F_t = ma_t$, es combinada con la ecuación cinemática, $a_t\,ds = v\,dv$, obtenemos el principio del trabajo y la energía.

$$T_1 + \Sigma U_{1\text{-}2} = T_2$$

  Aquí, la energía cinética inicial de la partícula ($T_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$), más el trabajo realizado por todas las fuerzas que actúan sobre la partícula cuando ella se mueve desde su posición inicial hasta su posición final ($\Sigma U_{1-2}$), es igual a la energía cinética final de la partícula ($T_2 = \frac{1}{2}mv_2^2$).

  El principio del trabajo y la energía es útil para resolver problemas que implican fuerza, velocidad y desplazamiento. En aplicaciones, el diagrama de cuerpo libre de la partícula debe ser trazado para identificar las fuerzas que trabajan.

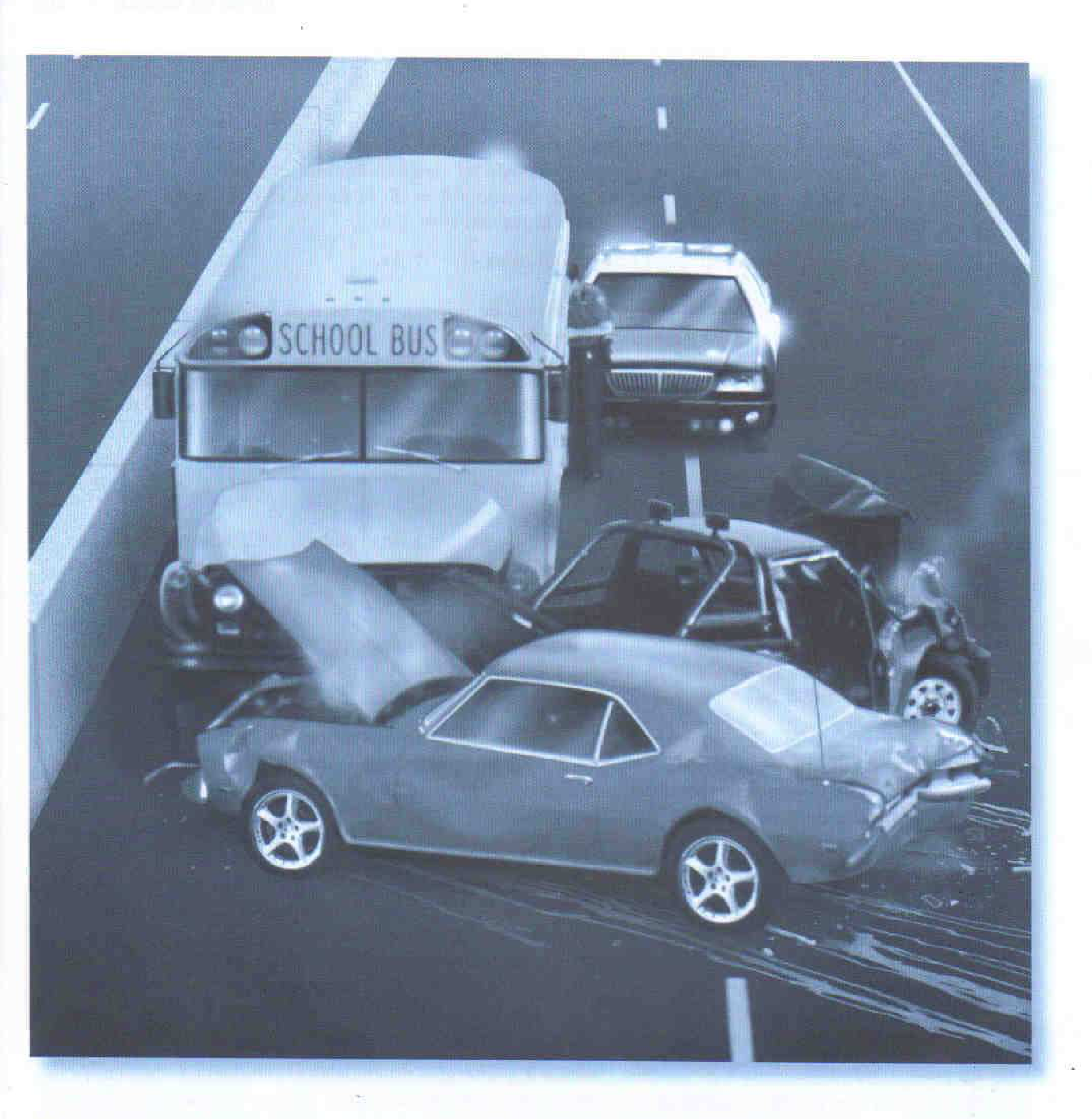
- *Potencia y eficiencia.* La potencia es la razón con respecto al tiempo de efectuar trabajo. La potencia se define mediante $P = dU/dt$, o $P = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$. Para aplicaciones, la fuerza **F** que crea la potencia y su velocidad **v** deben ser especificadas. La eficiencia representa la razón de la salida de potencia a la entrada de potencia. Debido a las pérdidas por fricción, la eficiencia es siempre menor que uno.

- *Conservación de la energía.* Una fuerza conservativa es aquella que efectúa un trabajo independiente de su trayectoria. Dos ejemplos son el peso de una partícula y la fuerza en un resorte. La fricción es una fuerza no conservativa ya que el trabajo depende de la longitud de la trayectoria. Entre más larga es la trayectoria, más trabajo es realizado. El trabajo realizado por una fuerza conservativa depende de su posición con respecto a un datum. Cuando este trabajo es referido con respecto a un datum, se le denomina energía potencial. Para un peso, la energía potencial es $V_g = Wy$, y para un resorte es $V_e = \frac{1}{2}kx^2$.

  La energía mecánica consta de energía cinética $T$ y energías potenciales gravitatoria y elástica $V$. De acuerdo con la conservación de la energía, esta suma es constante y tiene el mismo valor en dos posiciones cualesquiera sobre la trayectoria. Esto es,

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

Si el movimiento de la partícula es causado sólo por fuerzas gravitatorias y de resorte, entonces esta ecuación puede ser usada para resolver problemas que implican desplazamiento y velocidad.




Las velocidades de los vehículos implicados en este accidente pueden ser estimadas usando los principios de impulso y momentum.

CAPÍTULO 15

# Cinética de una partícula: Impulso y momentum

## OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Desarrollar el principio del impulso y momentum lineal para una partícula.
- Estudiar la conservación del momentum lineal para partículas.
- Analizar la mecánica del impacto.
- Presentar el concepto de impulso y momentum angular.
- Resolver problemas que impliquen corrientes de fluido permanentes y propulsión con masa variable.

## 15.1 Principio del impulso y momentum lineal

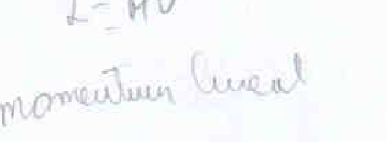
En esta sección integraremos la ecuación de movimiento con respecto al tiempo y con ello obtendremos el principio del impulso y el momentum. Se demostrará entonces que la ecuación resultante es útil para resolver problemas que implican fuerza, velocidad y tiempo.

La ecuación de movimiento para una partícula de masa $m$ puede escribirse como

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a} = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} \qquad (15\text{–}1)$$

donde $\mathbf{a}$ y $\mathbf{v}$ son medidas desde un marco de referencia inercial. Reordenando los términos e integrando entre los límites $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1$ en $t = t_1$ y $\mathbf{v} = \mathbf{v}_2$ en $t = t_2$, tenemos

$$\Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt = m\int_{\mathbf{v}_1}^{\mathbf{v}_2} d\mathbf{v}$$





La herramienta de impulso se usa para eliminar la abolladura en la defensa de un automóvil. Primero, su extremo inferior es atornillado en un agujero que se perfora en la defensa, luego el peso es agarrado y sacudido hacia arriba golpeando el anillo tope. El impulso que se desarrolla es transferido a lo largo de la barra de la herramienta que activa instantáneamente sobre la abolladura de la defensa.

o bien

$$\Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt = m\mathbf{v}_2 - m\mathbf{v}_1 \qquad (15\text{–}2)$$

A esta ecuación se le conoce como *principio del impulso y momentum lineal*. A partir de la derivación se puede ver que es simplemente una integración de la ecuación de movimiento con respecto al tiempo. Esta ecuación proporciona un *medio directo* para obtener la velocidad final $\mathbf{v}_2$ de la partícula después de un periodo de tiempo específico, cuando se conoce la velocidad inicial de la partícula y las fuerzas que actúan sobre ésta son o constantes o pueden ser expresadas como funciones del tiempo. En comparación, si $\mathbf{v}_2$ fue determinada usando la ecuación de movimiento, será necesario un proceso de dos pasos; esto es, aplicar $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ para obtener $\mathbf{a}$ y luego integrar $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$ para obtener $\mathbf{v}_2$.

**Momentum lineal.** Cada uno de los dos vectores de la forma $\mathbf{L} = m\mathbf{v}$ que aparecen en la ecuación 15-2 se denomina *momentum lineal* de la partícula. Como $m$ es un escalar positivo, el vector momentum lineal tiene la misma dirección que $\mathbf{v}$, y su magnitud $mv$ tiene unidades de masa-velocidad, esto es, kg · m/s o slug · pies/s.

**Impulso lineal.** La integral $\mathbf{I} = \int \mathbf{F}\, dt$ que aparece en la ecuación 15-2 se llama impulso lineal. Este término es una cantidad vectorial que mide el efecto de una fuerza durante el tiempo que ésta actúa. Como el tiempo es un escalar positivo, el impulso actúa en la misma dirección que la fuerza, y su magnitud tiene unidades de fuerza-tiempo, es decir, N · s o lb · s.* Si la fuerza es expresada como una función del tiempo, el impulso puede ser determinado por evaluación directa de la integral. En particular, la magnitud del impulso $\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt$ puede ser representada experimentalmente por el área sombreada bajo la curva de fuerza contra tiempo, figura 15-1. Cuando la fuerza es constante en magnitud y dirección, el impulso resultante es $\mathbf{I} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_c\, dt = \mathbf{F}_c(t_2 - t_1)$, la cual representa el área sombreada rectangular mostrada en la figura 15-2.

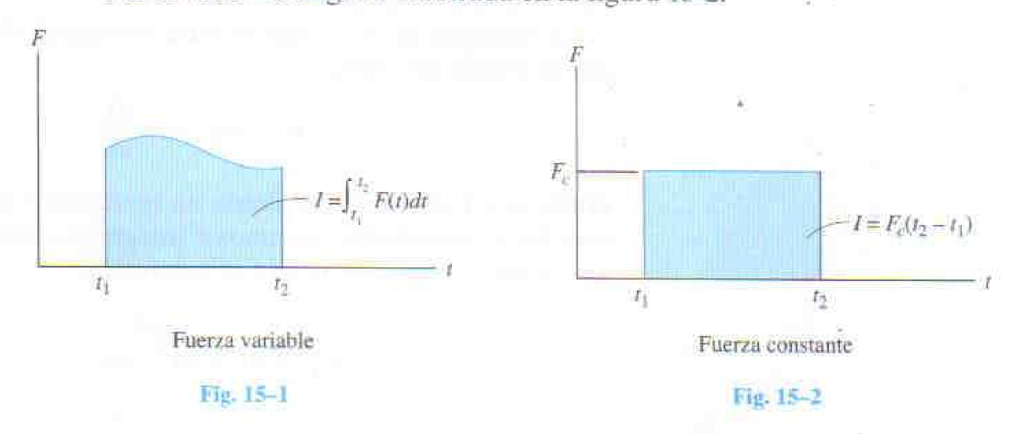



Fig. 15–1

Fig. 15–2

*Aunque las unidades para el impulso y el momentum son definidas en forma diferente, se puede mostrar que la ecuación 15-2 es dimensionalmente homogénea.

**Principio del impulso y momentum lineal.** Para la resolución de problemas, la ecuación 15-2 puede ser reescrita en la forma

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt = m\mathbf{v}_2 \qquad (15\text{–}3)$$

la cual establece que el momentum lineal de la partícula en $t_1$, más la suma de todos los impulsos aplicados a la partícula desde $t_1$ hasta $t_2$, es equivalente al momentum final de la partícula en $t_2$. Estos tres términos están ilustrados gráficamente en los *diagramas de impulso y momentum* mostrados en la figura 15-3. Los dos *diagramas de momentum* son simplemente formas delineadas de la partícula que indican la dirección y la magnitud de los momentos inicial y final de la partícula, $m\mathbf{v}_1$ y $m\mathbf{v}_2$, respectivamente, figura 15-3. Similar al diagrama de cuerpo libre, el *diagrama de impulso* es una forma delineada de la partícula que muestra todos los impulsos que actúan sobre la partícula cuando está localizada en algún punto intermedio a lo largo de su trayectoria. En general, siempre que la magnitud o la dirección de una fuerza *varían* con el tiempo, el impulso es representado en el diagrama de impulso como $\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}\,dt$. Si la fuerza es *constante*, el impulso aplicado a la partícula es $\mathbf{F}_c(t_2 - t_1)$, y actúa en la misma dirección que $\mathbf{F}_c$.

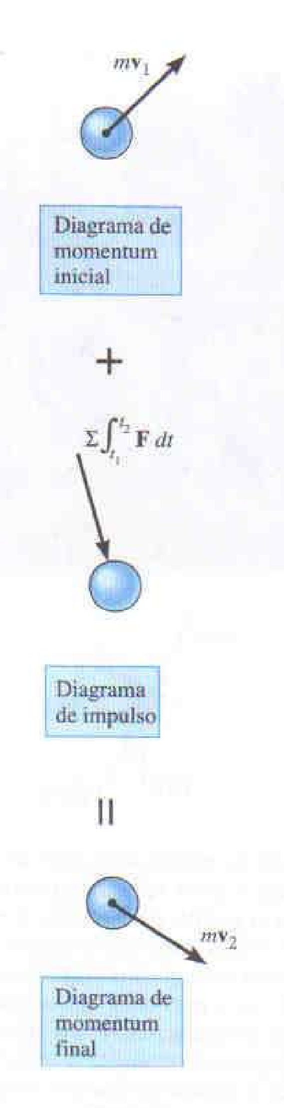


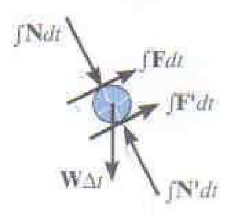

Fig. 15-3

**Ecuaciones escalares.** Si cada uno de los vectores mostrados en la ecuación 15-3 es resuelto en sus componentes $x$, $y$, $z$, podemos escribir simbólicamente las siguientes tres ecuaciones escalares:

$$\begin{aligned} m(v_x)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_x\,dt &= m(v_x)_2 \\ m(v_y)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt &= m(v_y)_2 \\ m(v_z)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_z\,dt &= m(v_z)_2 \end{aligned} \qquad (15\text{–}4)$$

Estas ecuaciones representan el principio del impulso y momentum lineal para la partícula en las direcciones $x$, $y$, $z$, respectivamente.






Cuando las ruedas de la máquina de lanzamientos giran, aplican impulsos de fricción a la pelota, dándole un momentum lineal. Estos impulsos se muestran en el diagrama de impulsos. Aquí los impulsos de fricción y normales varían con el tiempo. Por comparación, vemos que el impulso del peso es constante y muy pequeño ya que el tiempo $\Delta t$ que la pelota está en contacto con las ruedas es muy pequeño.

## PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

El principio del impulso y momentum lineal se usa para resolver problemas que implican *fuerza, tiempo* y *velocidad*, ya que estos términos están presentes en la formulación. Para las aplicaciones se sugiere usar el siguiente procedimiento.*

### *Diagrama de cuerpo libre*

- Establezca el marco de referencia inercial $x, y, z$ y dibuje el diagrama de cuerpo libre de la partícula para tomar en cuenta todas las fuerzas que producen impulsos sobre ella.
- La dirección y el sentido de las velocidades inicial y final de la partícula deben ser establecidos.
- Si un vector es desconocido, suponga que el sentido de sus componentes es en la dirección de las coordenadas inerciales positivas.
- Como procedimiento alternativo, dibuje los diagramas de impulso y momentum para la partícula como se presentó en referencia a la figura 15-3.

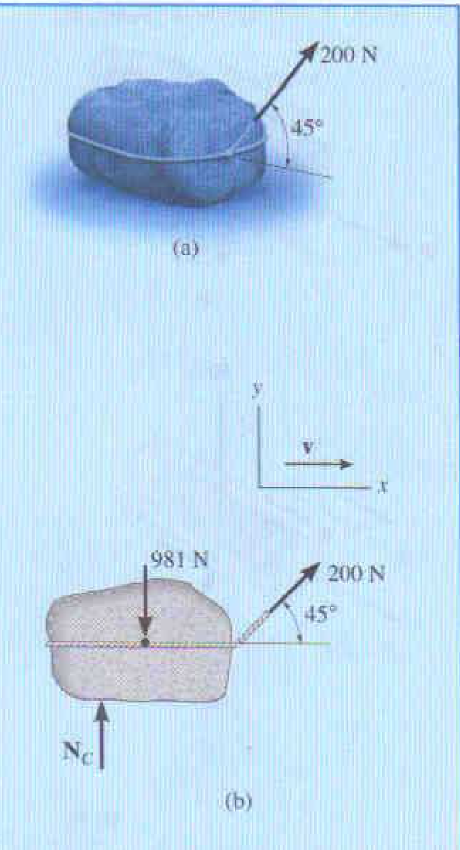
### *Principio del impulso y momentum*

- De acuerdo con el sistema coordenado establecido, aplique el principio del impulso y momentum lineal, $m\mathbf{v}_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{F}\,dt = m\mathbf{v}_2$. Si el movimiento ocurre en el plano $x-y$, las dos ecuaciones de componentes escalares pueden ser formuladas resolviendo las componentes vectoriales de $\mathbf{F}$ a partir del diagrama de cuerpo libre, o usando los datos que aparecen en los diagramas de impulso y momentum.
- Observe que cada fuerza que actúa en el diagrama de cuerpo libre de la partícula creará un impulso, aunque algunas de esas fuerzas no efectuarán trabajo.
- Las fuerzas que son funciones del tiempo deben ser integradas para obtener el impulso. Gráficamente, el impulso es igual al área bajo la curva fuerza-tiempo.
- Si el problema implica el movimiento dependiente de varias partículas, use el método establecido en la sección 12.9 para relacionar sus velocidades. Asegúrese de que las direcciones coordenadas positivas usadas para escribir esas ecuaciones cinemáticas son las *mismas* que las utilizadas para escribir las ecuaciones de impulso y momentum.

*Este procedimiento es el que se seguirá al desarrollar las pruebas y la teoría en el texto.

## EJEMPLO 15.1

La piedra de 100 kg mostrada en la figura 15-4*a* está originalmente en reposo sobre la superficie lisa horizontal. Si una fuerza de 200 N, que actúa a un ángulo de 45°, se aplica a la piedra durante 10 s, determine la velocidad final y la fuerza normal que la superficie ejerce sobre la piedra durante el intervalo de tiempo.




### Solución

Este problema puede ser resuelto usando el principio del impulso y momentum ya que implica fuerza, velocidad y tiempo.

***Diagrama de cuerpo libre.*** Vea la figura 15-4*b*. Como todas las fuerzas que actúan son *constantes*, los impulsos son simplemente el producto de la magnitud de la fuerza y 10 s $[\mathbf{I} = \mathbf{F}_c(t_2 - t_1)]$. Observe el procedimiento alternativo de dibujar los diagramas del impulso y momentum de la piedra, figura 15-4*c*.

***Principio del impulso y momentum.*** Resolviendo los vectores que aparecen en la figura 15-4*b* a lo largo de los ejes *x*, *y* y aplicando las ecuaciones 15-4 obtenemos

$(\overset{+}{\rightarrow})$
$$m(v_x)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} F_x\,dt = m(v_x)_2$$
$$0 + 200\text{ N}(10\text{ s})\cos 45° = (100\text{ kg})v_2$$
$$v_2 = 14.1\text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

$(+\uparrow)$
$$m(v_y)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt = m(v_y)_2$$
$$0 + N_C(10\text{ s}) - 981\text{ N}(10\text{ s}) + 200\text{ N}(10\text{ s})\text{ sen }45° = 0$$
$$N_C = 840\text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

Como no ocurre movimento en la dirección *y*, la aplicación directa de la ecuación de equilibrio $\Sigma F_y = 0$ da el mismo resultado para $N_C$.

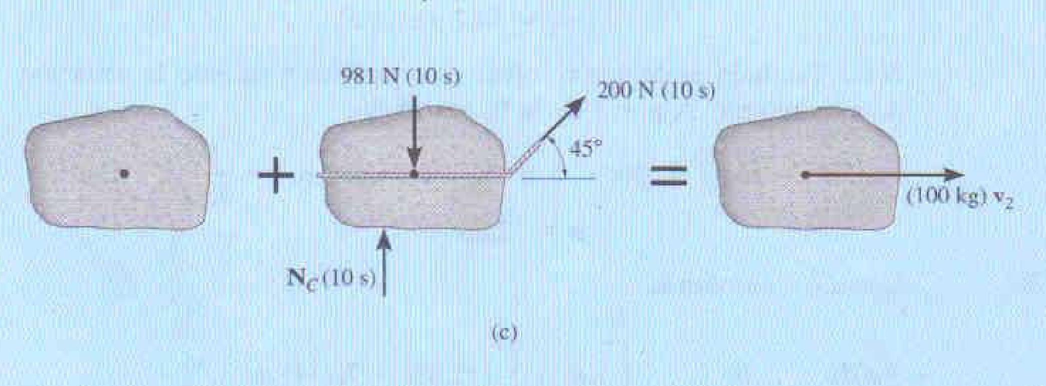
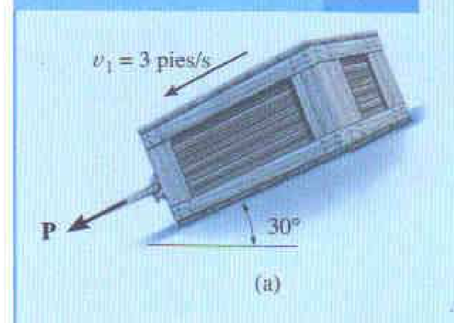
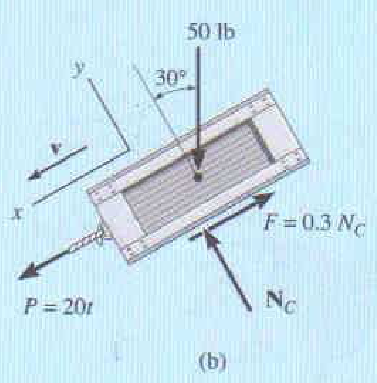



Fig. 15–4

## EJEMPLO 15.2




(a)




(b)

Fig. 15–5

Sobre la caja de 50 lb mostrada en la figura 15-5*a* actúa una fuerza de magnitud variable $P = (20t)$ lb, donde $t$ está en segundos. Determine la velocidad de la caja 2 s después que **P** ha sido aplicada. La velocidad inicial es $v_1 = 3$ pies/s hacia abajo por el plano, y el coeficiente de fricción cinética entre la caja y el plano es $\mu_k = 0.3$.

### Solución

***Diagrama de cuerpo libre.*** Vea la figura 15-5*b*. Como la magnitud de la fuerza $P = 20t$ varía con el tiempo, el impulso que genera debe ser determinado integrando sobre el intervalo de tiempo de 2 s. El peso, la fuerza normal y la fuerza de fricción (que actúa en sentido opuesto al del movimiento) son *constantes*, así que el impulso generado por cada una de esas fuerzas es simplemente la magnitud de la fuerza multiplicada por 2 s.

***Principio del impulso y momentum.*** Aplicando las ecuaciones 15-4 en la dirección $x$, tenemos

$$(+\swarrow) \qquad m(v_x)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} F_x\,dt = m(v_x)_2$$

$$\frac{50\text{ lb}}{32.2\text{ pies/s}^2}(3\text{ pies/s}) + \int_0^2 20t\,dt - 0.3N_C(2\text{ s}) + (50\text{ lb})(2\text{ s})\text{ sen }30^\circ = \frac{50\text{ lb}}{32.2\text{ pies/s}^2}v_2$$

$$4.66 + 40 - 0.6N_C + 50 = 1.55v_2$$

La ecuación de equilibrio puede ser aplicada en la dirección $y$. ¿Por qué?

$$+\nwarrow\Sigma F_y = 0; \qquad N_C - 50\cos 30^\circ\text{ lb} = 0$$

Despejando,

$$N_C = 43.3\text{ lb}$$

$$v_2 = 44.2\text{ pies/s} \swarrow \qquad \textit{Resp.}$$

*Nota:* También podemos resolver este problema usando la ecuación de movimiento. A partir de la figura 15-5*b*,

$$+\swarrow\Sigma F_x = ma_x; \qquad 20t - 0.3(43.3) + 50\text{ sen }30^\circ = \frac{50}{32.2}a$$

$$a = 12.88t + 7.734$$

Usando cinemática,

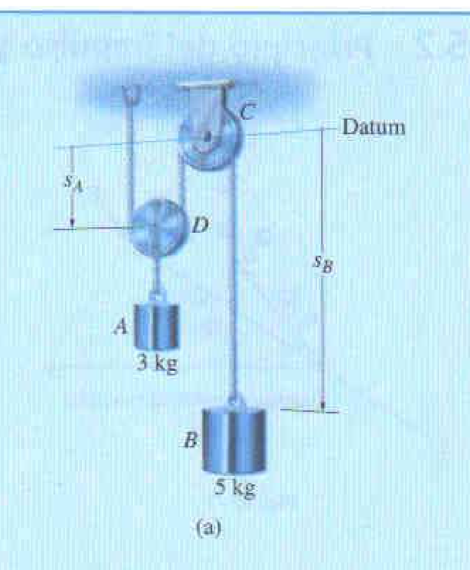
$$+\swarrow dv = a\,dt; \qquad \int_3^v dv = \int_0^2 (12.88t + 7.734)\,dt$$

$$v = 44.2\text{ pies/s} \qquad \textit{Resp.}$$

Por comparación, vemos que la aplicación del principio del impulso y momentum elimina la necesidad de usar la cinemática ($a = dv/dt$), lo que da un método más fácil de solución.

**EJEMPLO 15.3**

Los bloques $A$ y $B$ mostrados en la figura 15-6$a$ tienen masa de 3 y 5 kg, respectivamente. Si el sistema es liberado del reposo, determine la velocidad del bloque $B$ en 6 s. Desprecie la masa de las poleas y la cuerda.




### Solución

*Diagrama de cuerpo libre.* Vea la figura 15-6$b$. Como el peso de cada bloque es constante, las tensiones en la cuerda también serán constantes. Además, como la masa de la polea $D$ es insignificante, la tensión $T_A = 2T_B$. Observe que los bloques se han supuesto viajando hacia abajo en las direcciones coordenadas positivas, $s_A$ y $s_B$.

*Principio del impulso y momentum.*

*Bloque A:*

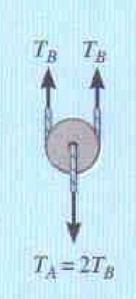
$$(+\downarrow) \qquad m(v_A)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt = m(v_A)_2$$

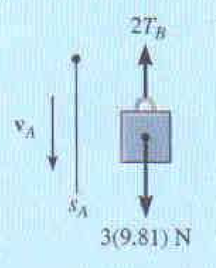
$$0 - 2T_B(6\text{ s}) + 3(9.81)\text{ N}(6\text{ s}) = (3\text{ kg})(v_A)_2 \qquad (1)$$

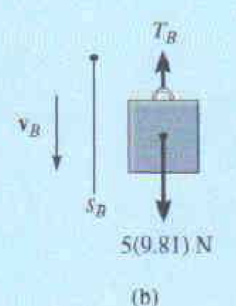
*Bloque B:*

$$(+\downarrow) \qquad m(v_B)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt = m(v_B)_2$$

$$0 + 5(9.81)\text{ N}(6\text{ s}) - T_B(6\text{ s}) = (5\text{ kg})(v_B)_2 \qquad (2)$$




(b)

**Fig. 15-6**

*Cinemática.* Como los bloques están sometidos a movimiento dependiente, la velocidad de $A$ puede ser relacionada a la de $B$ usando el análisis cinemático presentado en la sección 12.9. Un nivel de datum horizontal se establece a través del punto fijo $C$, figura 15-6$a$, y las coordenadas de posición, $s_A$ y $s_B$, son relacionadas con la longitud constante total $l$ de los segmentos verticales de la cuerda por medio de la ecuación

$$2s_A + s_B = l$$

Tomando la derivada con respecto al tiempo se obtiene

$$2v_A = -v_B \qquad (3)$$

Como lo indica el signo negativo, cuando $B$ se mueve hacia abajo $A$ se mueve hacia arriba.* Sustituyendo este resultado en la ecuación 1 y resolviendo las ecuaciones 1 y 2 obtenemos

$$(v_B)_2 = 35.8\text{ m/s}\downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

$$T_B = 19.2\text{ N}$$

*Observe que la dirección *positiva* (hacia abajo) para $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ es *consistente* en las figuras 15-6$a$ y 15-6$b$ y en las ecuaciones 1, 2 y 3. ¿Por qué es importante esto?

## 15.2 Principio del impulso y momentum lineal para un sistema de partículas

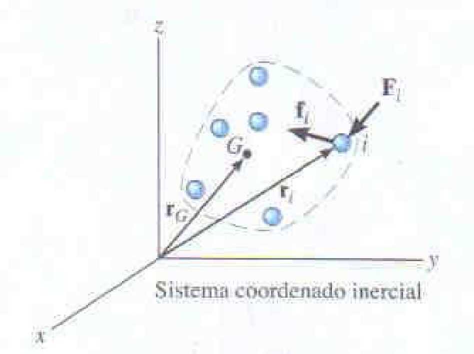



Fig. 15–7

El principio del impulso y momentum lineal para un sistema de partículas que se mueven con respecto a un marco inercial, figura 15-7, se obtiene a partir de la ecuación de movimiento aplicada a todas las partículas presentes en el sistema, es decir,

$$\Sigma \mathbf{F}_i = \Sigma m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} \tag{15–5}$$

El término en el lado izquierdo sólo representa la suma de la *fuerzas externas* que están actuando sobre el sistema de partículas. Recuerde que las fuerzas internas $\mathbf{f}_i$ que actúan entre las partículas no aparecen en esta suma, ya que de acuerdo con la tercera ley de Newton se presentan en pares colineales iguales pero opuestos, y por tanto se cancelan. Multiplicando ambos lados de la ecuación 15-5 por $dt$ e integrando entre los límites $t = t_1$, $\mathbf{v}_i = (\mathbf{v}_i)_1$ y $t = t_2$, $\mathbf{v}_i = (\mathbf{v}_i)_2$, resulta

$$\Sigma m_i(\mathbf{v}_i)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i \, dt = \Sigma m_i(\mathbf{v}_i)_2 \tag{15–6}$$

Esta ecuación establece que los momentum lineales iniciales del sistema, más los impulsos de todas las *fuerzas externas* que actúan sobre el sistema desde $t_1$ hasta $t_2$, son iguales a los momentos lineales finales del sistema.

Como la ubicación del centro de masa $G$ del sistema es determinada a partir de $m\mathbf{r}_G = \Sigma m_i \mathbf{r}_i$, donde $m = \Sigma m_i$ es la masa total de todas las partículas, figura 15-7, entonces, tomando las derivadas con respecto al tiempo, tenemos

$$m\mathbf{v}_G = \Sigma m_i \mathbf{v}_i$$

la cual establece que el momentum lineal total de un sistema de partículas es equivalente al momentum lineal de una partícula agregada "ficticia" de masa $m = \Sigma m_i$ que se mueve con la velocidad del centro de masa del sistema. Sustituyendo en la ecuación 15-6 se obtiene

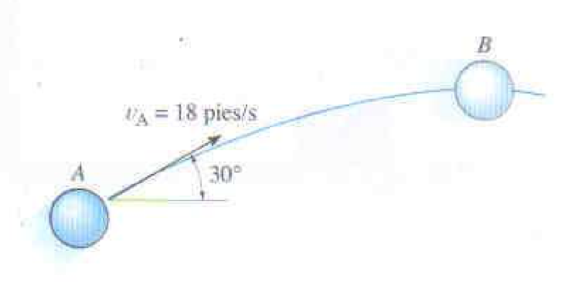
$$m(\mathbf{v}_G)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}_i \, dt = m(\mathbf{v}_G)_2 \tag{15–7}$$

Aquí el momentum lineal inicial de la partícula agregada más los impulsos externos que actúan sobre el sistema de partículas desde $t_1$ hasta $t_2$ es igual al momentum lineal final de la partícula agregada. Como en realidad todas las partículas deben tener tamaño no cero para poseer masa, la ecuación anterior justifica la aplicación del principio del impulso y momentum lineal a un cuerpo rígido representado como una sola

# PROBLEMAS

**15-1.** Un bloque de 20 lb se desliza hacia abajo por un plano inclinado a 30° con velocidad inicial de 2 pies/s. Determine la velocidad del bloque en 3 s si el coeficiente debido a la fricción cinética entre el bloque y el plano es $\mu_k = 0.25$.

**15-2.** Una pelota de 2 lb se lanza en la dirección mostrada con una rapidez inicial $v_A = 18$ pies/s. Determine el tiempo necesario para que alcance su punto más alto $B$ y la rapidez con que está viajando en $B$. Use el principio del impulso y momentum para encontrar la solución.



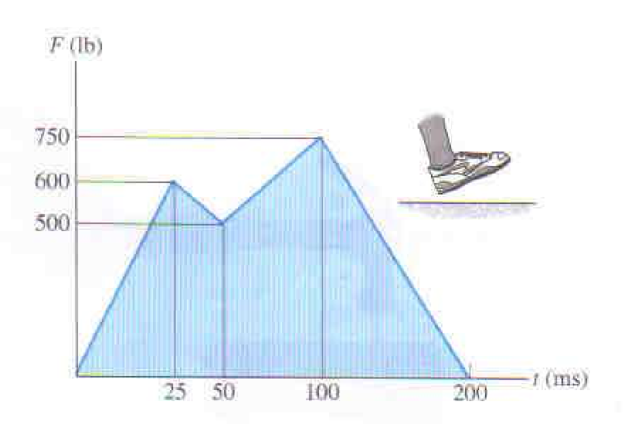

Prob. 15–2

**15-3.** A un bloque de 5 lb se le da una velocidad inicial de 10 pies/s hacia arriba por una pendiente lisa a 45°. Determine el tiempo que le tomará al bloque subir por la pendiente antes de detenerse.

***15-4.** El obrero de 180 lb está asegurado con un dispositivo que detiene su caída; el dispositivo consta de un arnés y una cuerda $AB$ que está fija a la viga. Si la cuerda tiene una holgura de 4 pies, determine la fuerza impulsiva promedio desarrollada en la cuerda si el obrero cae 4 pies. Desprecie su tamaño en los cálculos y suponga que el impulso tiene lugar en 0.6 segundos.

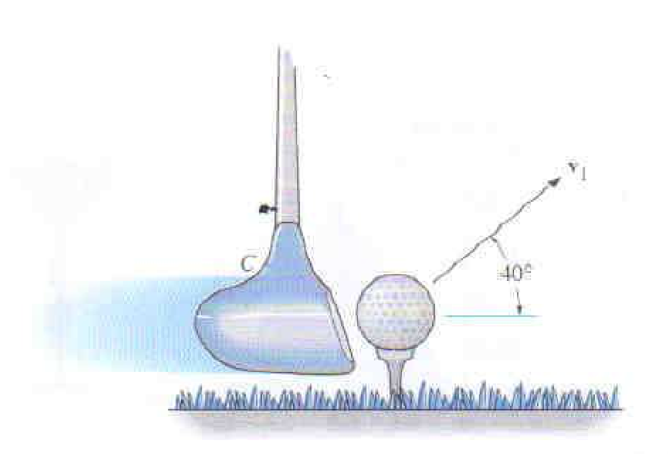



**15-5.** La gráfica muestra la fuerza de reacción vertical de la interacción zapato-suelo como función del tiempo. El primer pico actúa sobre el talón, y el segundo pico actúa sobre el frente del pie. Determine el impulso total que actúa sobre el zapato durante la interacción.

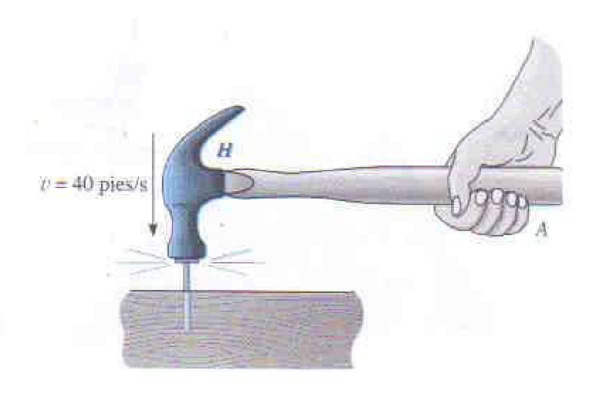



Prob. 15–5

**15-6.** Un hombre golpea la pelota de golf de 50 g de manera que la pelota deja el soporte a un ángulo de 40° con la horizontal y toca el suelo a la misma elevación a una distancia de 20 m. Determine el impulso del palo $C$ sobre la pelota. Desprecie el impulso causado por el peso de la pelota mientras el palo la golpea.

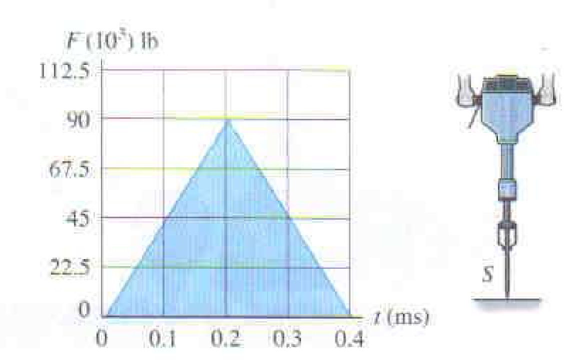


15-7. La cabeza $H$ de un martillo con peso de 0.25 lb se está moviendo verticalmente hacia abajo a 40 pies/s cuando golpea la cabeza de un clavo de masa insignificante y lo inserta en un bloque de madera. Encuentre el impulso sobre el clavo si se supone que el agarre en $A$ es suelto, el mango tiene masa insignificante, y el martillo permanece en contacto con el clavo mientras éste alcanza el reposo. Desprecie el impulso causado por el peso de la cabeza del martillo durante el contacto con el clavo.

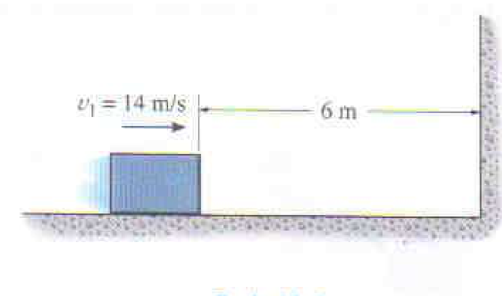



Prob. 15–7

*15-8. Durante su operación, el martillo perforador desarrolla sobre la superficie del concreto la fuerza que está indicada en la gráfica. Para lograrlo, la barreta $S$ de 2 lb es disparada desde el reposo sobre la superficie a 200 pies/s. Determine la rapidez de la barreta justo después del rebote.

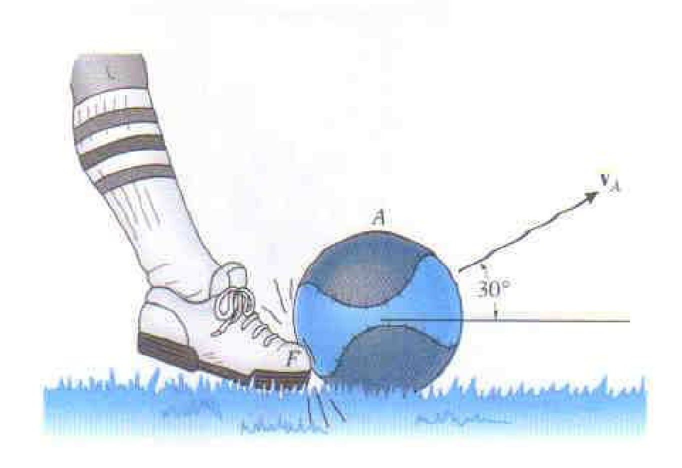



15-9. Cuando el bloque de 5 kg se encuentra a 6 m de la pared, está deslizándose a $v_1 = 14$ m/s. Si el coeficiente de fricción cinética entre el bloque y el plano horizontal es $\mu_k = 0.3$, determine el impulso necesario de la pared sobre el bloque para detener éste. Desprecie el impulso de fricción que actúa sobre el bloque durante la colisión.

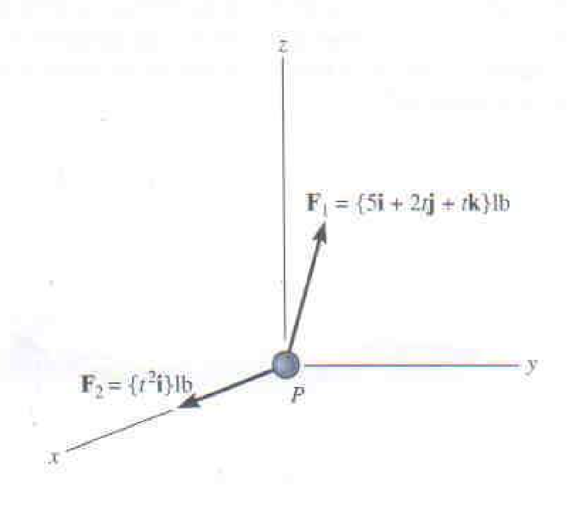



Prob. 15–9

15-10. Un hombre patea la pelota de 200 g en forma tal que ésta deja el terreno a un ángulo de 30° con respecto a la horizontal y toca el terreno a la misma elevación a una distancia de 15 m. Determine el impulso del pie $F$ sobre la pelota. Desprecie el impulso causado por su peso mientras está siendo pateada.

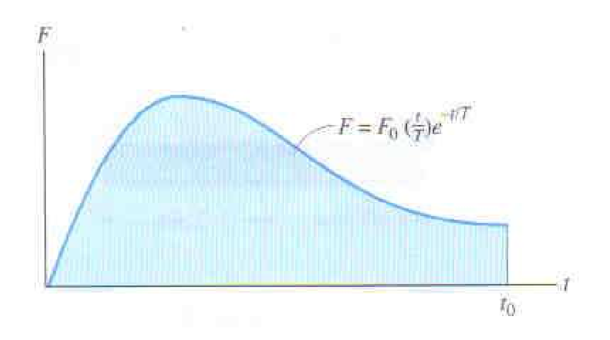


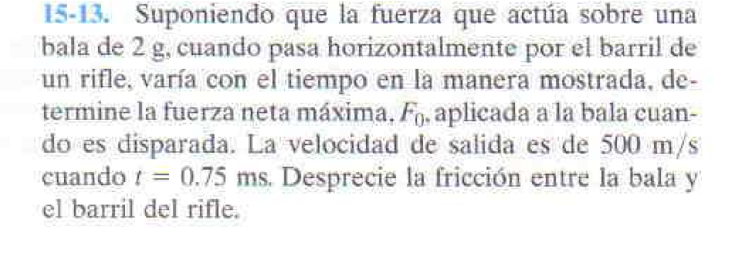
**15-11.** Sobre la partícula $P$ actúa su propio peso de 3 lb y las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$, donde $t$ está en segundos. Si originalmente la partícula tiene velocidad $\mathbf{v}_1 = \{3\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 6\mathbf{k}\}$ pies/s, determine su rapidez después de 2 segundos.



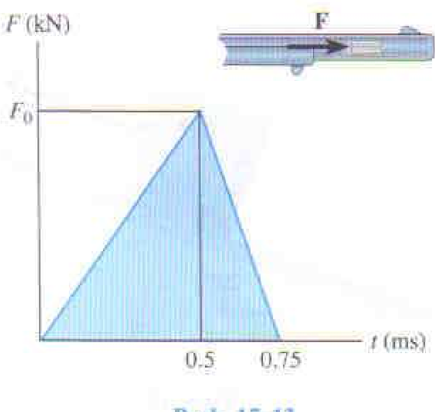

Prob. 15–11

*15-12. Un crispamiento espasmódico en un músculo del brazo desarrolla una fuerza que puede ser medida como función del tiempo como se muestra en la gráfica. Si la contracción efectiva del músculo dura un tiempo $t_0$, determine el impulso desarrollado por el músculo.



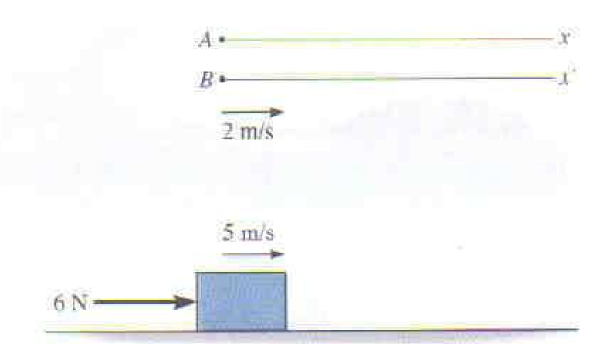



**15-13.** Suponiendo que la fuerza que actúa sobre una bala de 2 g, cuando pasa horizontalmente por el barril de un rifle, varía con el tiempo en la manera mostrada, determine la fuerza neta máxima, $F_0$, aplicada a la bala cuando es disparada. La velocidad de salida es de 500 m/s cuando $t$ = 0.75 ms. Desprecie la fricción entre la bala y el barril del rifle.

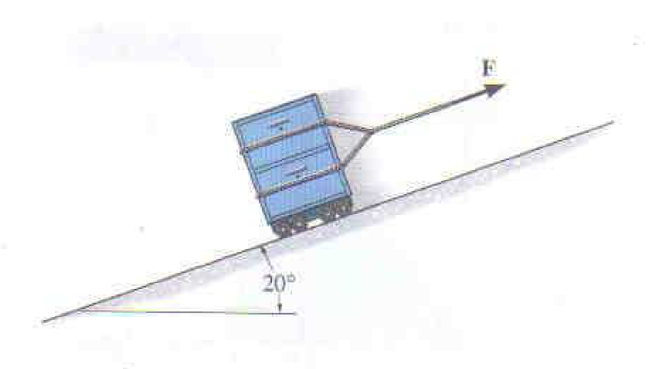



Prob. 15–13

**15-14.** Como se ve en la derivación, el principio del impulso y momentum es válido para observadores situados en *cualquier* marco de referencia inercial. Muestre que esto es así considerando el bloque de 10 kg que descansa sobre la superficie lisa y está sometido a una fuerza horizontal de 6 N. Si el observador $A$ está situado en un marco *fijo* $x$, determine la rapidez final del bloque en 4 s si tiene una rapidez inicial de 5 m/s medida desde el marco fijo. Compare el resultado con el obtenido por un observador $B$, unido al eje $x'$, que se mueve con velocidad constante de 2 m/s con respecto a $A$.

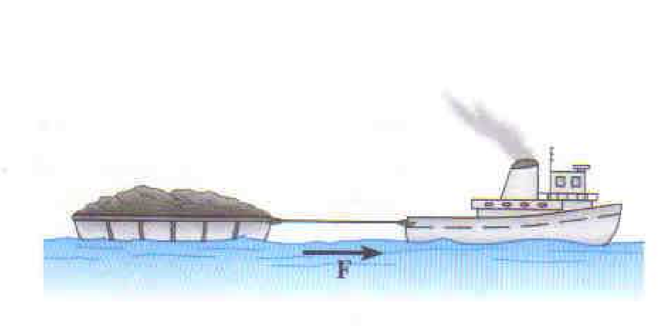


**15-15.** El archivero de 4 lb está sometido a la fuerza $F = 12/(t+1)^2$, donde $t$ está en segundos. Si el archivero se está moviendo hacia arriba por el plano con velocidad de 10 pies/s, determine cuánto tiempo tarda en detenerse. **F** actúa siempre paralelamente al plano. Desprecie el tamaño de las ruedas.




Prob. 15–15

***15-16.** Si al remolcador de 50 Mg le toma 35 s incrementar su rapidez uniformemente a 25 km/h, partiendo del reposo, determine la fuerza presente en la cuerda del remolcador. La hélice proporciona la fuerza **F** de propulsión que da al remolcador un movimiento hacia adelante, mientras que la barcaza se mueve libremente. Determine también la $F$ que actúa sobre el remolcador. La barcaza tiene masa de 75 Mg.



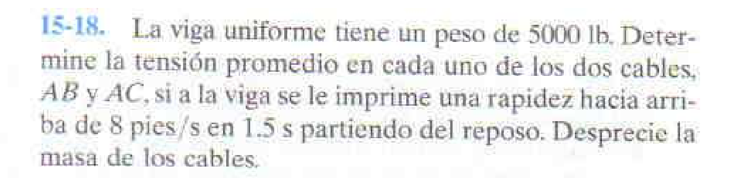

Prob. 15–16

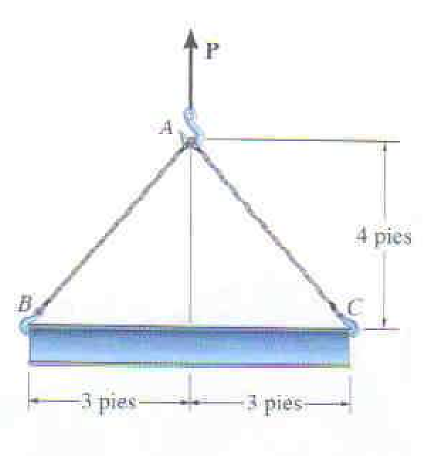
**15-17.** La ballena de 5.5 Mg está varada en la orilla debido a cambios en la marea. Para tratar de rescatarla, un bote remolcador de 12 Mg la jala con una cuerda inextensible atada a su cola. Para vencer la fuerza de fricción que la arena ejerce en la ballena, el remolcador retrocede de manera que la cuerda quede holgada y luego procede hacia delante a 3 m/s. Si el remolcador apaga entonces sus motores, determine la fuerza **F** promedio de fricción en la ballena si el deslizamiento ocurre por 1.5 s antes que el remolcador se detenga al tensarse la cuerda. También, ¿cuál es la fuerza promedio en la cuerda durante el remolque?




Prob. 15–17

**15-18.** La viga uniforme tiene un peso de 5000 lb. Determine la tensión promedio en cada uno de los dos cables, $AB$ y $AC$, si a la viga se le imprime una rapidez hacia arriba de 8 pies/s en 1.5 s partiendo del reposo. Desprecie la masa de los cables.

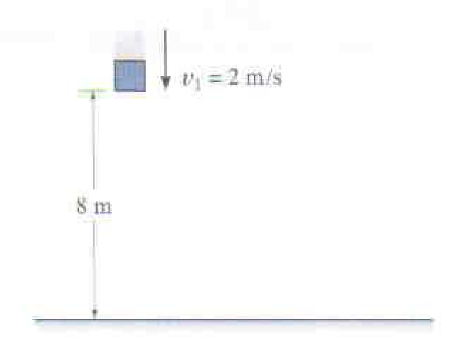





Prob. 15–18

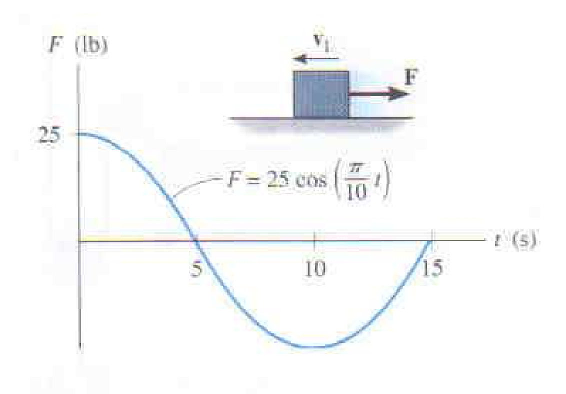
**15-19.** El bloque de 5 kg se está moviendo hacia abajo con velocidad $v_1 = 2$ m/s cuando está a 8 m de la superficie arenosa. Determine el impulso necesario de la arena sobre el bloque para detener su movimiento. Desprecie la distancia que el bloque se entierra en la arena y suponga que no rebota. También desprecie el peso del bloque durante el impacto con la arena.

***15-20.** El bloque de 5 kg está cayendo a $v_1 = 2$ m/s cuando está a 8 m de la superficie arenosa. Determine la fuerza impulsiva promedio que actúa en el bloque desde la arena si el movimiento del bloque es detenido en 0.9 s una vez que toca la arena. También desprecie la distancia que el bloque se entierra en la arena y suponga que éste no rebota. Desprecie el peso del bloque durante el impacto con la arena.



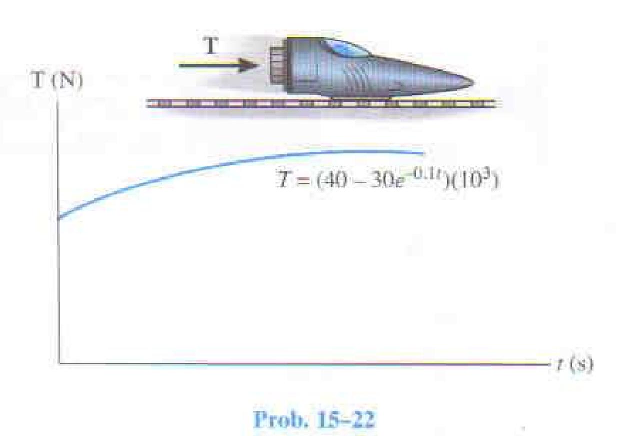

Probs. 15–19/20

**15-21.** Un bloque de 30 lb está moviéndose inicialmente a lo largo de una superficie lisa horizontal con rapidez $v_1 = 6$ pies/s hacia la izquierda. Si sobre el bloque actúa una fuerza **F**, que varía en la manera mostrada, determine la velocidad del bloque en 15 s.



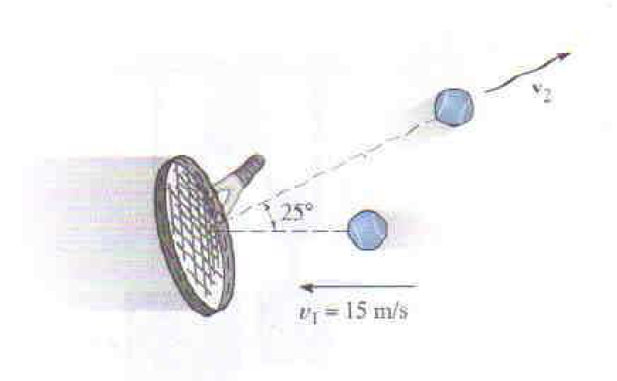

Prob. 15–21

**15-22.** El trineo cohete tiene masa de 3 Mg y parte del reposo cuando $t = 0$. Si el motor proporciona un empuje horizontal $T$ que varía como se muestra en la gráfica, determine la velocidad del trineo en $t = 4$ s. Desprecie la resistencia del aire, la fricción y la pérdida de combustible durante el movimiento.



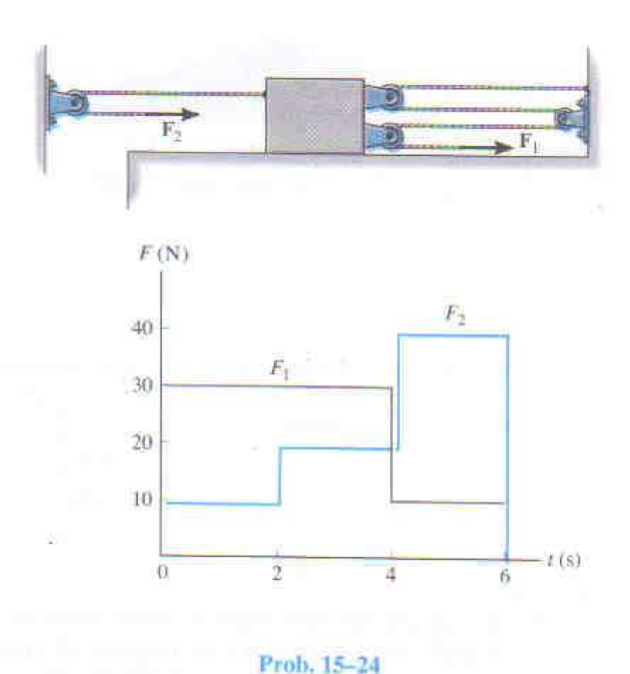

Prob. 15–22

**15-23.** La pelota de tenis tiene rapidez horizontal de 15 m/s cuando es golpeada por la raqueta. Si entonces viaja a un ángulo de 25° desde la horizontal y alcanza una altura máxima de 10 m, medida desde la altura de la raqueta, determine la magnitud del impulso neto de la raqueta sobre la pelota. Ésta tiene masa de 180 g. Desprecie su peso durante el tiempo que la raqueta la golpea.



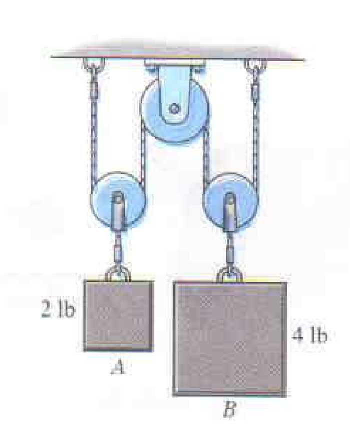

Prob. 15–23

*15-24. El bloque deslizable de 40 kg se está moviendo hacia la derecha con rapidez de 1.5 m/s cuando actúan sobre él las fuerzas $\mathbf{F}_1$ y $\mathbf{F}_2$. Si estas cargas varían de la manera mostrada en la gráfica, determine la rapidez del bloque en $t = 6$ s. Desprecie la fricción y la masa de poleas y cuerdas.

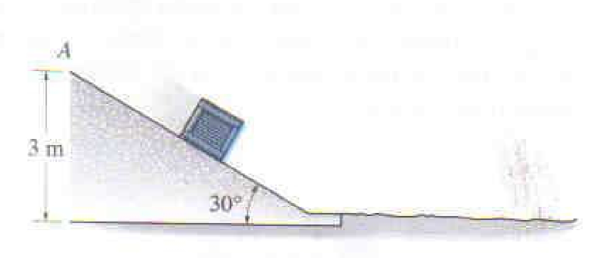



Prob. 15–24

15-25. Determine las velocidades de los bloques $A$ y $B$ 2 s después que son liberados del reposo. Desprecie la masa de poleas y cables.

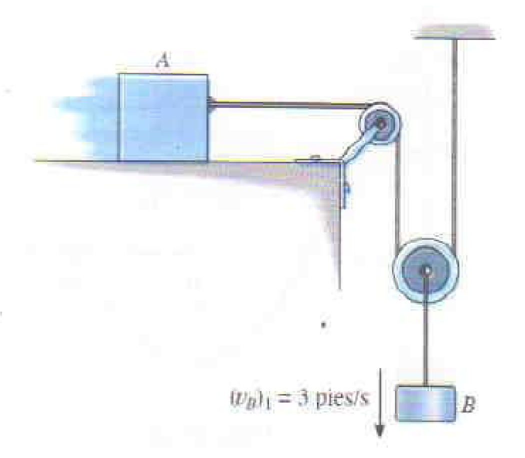



15-26. El paquete de 5 kg es liberado del reposo en el punto $A$. El paquete se desliza hacia abajo por el plano liso, que está inclinado a 30°, hacia la superficie rugosa que tiene un coeficiente de fricción cinética $\mu_k = 0.2$. Determine el tiempo total de viaje hasta que el paquete deja de deslizarse. Desprecie el tamaño del paquete.

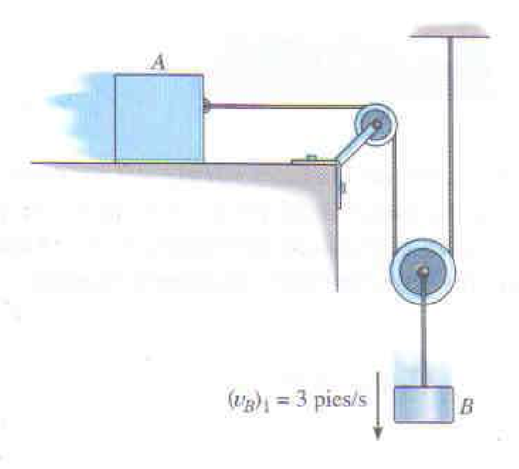



Prob. 15–26

15-27. El bloque $A$ pesa 10 lb y el bloque pesa 3 lb. Si $B$ se está moviendo hacia abajo con velocidad $(v_B)_1 = 3$ pies/s en $t = 0$, determine la velocidad de $A$ cuando $t = 1$ s. Suponga que el plano horizontal es liso. Desprecie la masa de poleas y cuerdas.



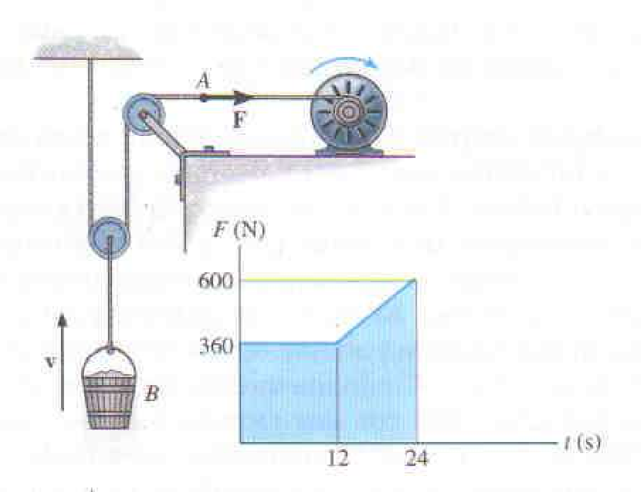
*15-28. El bloque $A$ pesa 10 lb y el bloque $B$ pesa 3 lb. Si $B$ se está moviendo hacia abajo con velocidad $(v_B)_1$ = 3 pies/s en $t = 0$, determine la velocidad de $A$ cuando $t = 1$ s. El coeficiente de fricción cinética entre el plano horizontal y el bloque $A$ es $\mu_A = 0.15$.



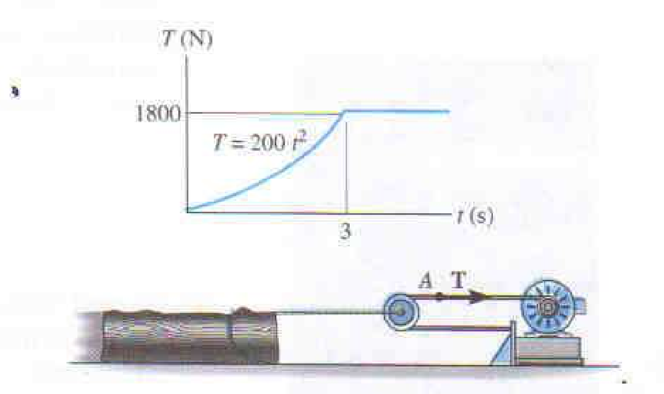

Prob. 15–28

15-29. El montacargas entrega una fuerza horizontal $F$ a su cable en $A$ que varía como se muestra en la gráfica. Determine la rapidez de la cubeta $B$ de 70 kg cuando $t = 18$ s. Originalmente la cubeta se está moviendo hacia arriba con $v_1 = 3$ m/s.

15-30. El montacargas entrega una fuerza horizontal $F$ a su cable en $A$ que varía como se muestra en la gráfica. Determine la rapidez de la cubeta $B$ de 80 kg cuando $t = 24$ s. Originalmente la cubeta se está moviendo hacia abajo a 20 m/s.




15-31. El tronco tiene masa de 500 kg y descansa sobre el suelo para el cual los coeficientes de fricción estática y cinética son $\mu_s = 0.5$ y $\mu_k = 0.4$, respectivamente. El montacargas entrega una fuerza horizontal $T$ a su cable en $A$ que varía como se muestra en la gráfica. Determine la rapidez del tronco cuando $t = 5$ s. Originalmente la tensión en el cable es cero. *Sugerencia*: Determine primero la fuerza necesaria para empezar a mover el tronco.




Prob. 15–31

## 15.3 Conservación del momentum lineal para un sistema de partículas

Cuando la suma de los *impulsos externos* que actúan sobre un sistema de partículas es cero, la ecuación 15-6 se reduce a la forma simplificada

$$\Sigma m_i(\mathbf{v}_i)_1 = \Sigma m_i(\mathbf{v}_i)_2 \qquad (15\text{–}8)$$

Esta ecuación se llama ecuación de la *conservación del momentum lineal*. Establece que el momentum lineal total para un sistema de partículas permanece constante durante el periodo de tiempo $t_1$ a $t_2$. Sustituyendo $m\mathbf{v}_G = \Sigma m_i\mathbf{v}_i$ en la ecuación 15-8, también podemos escribir

$$(\mathbf{v}_G)_1 = (\mathbf{v}_G)_2 \qquad (15\text{–}9)$$

la cual indica que la velocidad $\mathbf{v}_G$ del centro de masa para el sistema de partículas no cambia cuando ningún impulso externo es aplicado al sistema.

La conservación del momentum lineal a menudo es aplicada cuando entran en colisión o interactúan partículas. En su aplicación, debe efectuarse un cuidadoso estudio del diagrama de cuerpo libre de *todo* el sistema de partículas para identificar las fuerzas que generan impulsos externos o internos y así determinar en qué dirección (o direcciones) es conservado el momentum lineal. Como se estableció antes, los *impulsos internos* del sistema siempre se cancelan ya que ocurren en pares colineales iguales pero opuestos. Si el periodo en que se estudia el movimiento es *muy corto*, algunos de los impulsos externos pueden ser despreciados o considerados aproximadamente iguales a cero. Las fuerzas que causan estos impulsos insignificantes son llamadas *fuerzas no impulsivas*. En comparación, las fuerzas muy grandes que actúan durante un periodo de tiempo muy corto producen un cambio importante en el momentum y son llamadas *fuerzas impulsivas*. Estas fuerzas, por supuesto, no pueden ser despreciadas en el análisis de impulso-momentum.

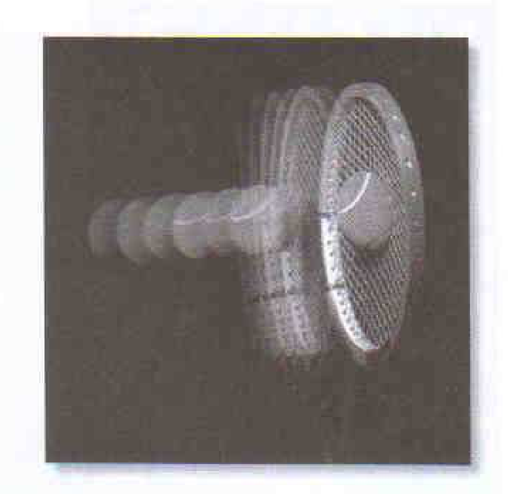
Las fuerzas impulsivas ocurren normalmente debido a una explosión o al choque de un cuerpo contra otro, mientras que las fuerzas no impulsivas pueden incluir el peso de un cuerpo, la fuerza impartida por un resorte ligeramente deformado con rigidez relativamente pequeña, o cualquier fuerza que es muy pequeña comparada con otras fuerzas más grandes (impulsivas). Al hacer esta distinción entre fuerzas impulsivas y no impulsivas, es importante observar que esto se aplica sólo durante el tiempo $t_1$ a $t_2$. Como ilustración, considere el efecto de golpear una pelota de tenis con una raqueta como se muestra en la fotografía. Durante el tiempo de interacción *demasiado corto*, la fuerza de la raqueta sobre la pelota es impulsiva ya que cambia





El martillo que aparece en la foto superior aplica una fuerza impulsiva a la barreta. Durante este tiempo de contacto extremadamente corto, el peso de la barreta puede considerarse no impulsivo, y si la barreta es introducida en suelo suave, el impulso del suelo que actúa sobre la barreta también puede ser considerado no impulsivo. En contraste, si la barreta se usa en una perforadora para romper concreto, entonces dos fuerzas impulsivas actúan sobre la barreta: una en su parte superior debida a

la pelota tendrá un efecto insignificante en el cambio de momentum, y por tanto no es una fuerza impulsiva. En consecuencia, puede ser despreciada con respecto a un análisis de impulso-momentum durante este tiempo. Si un análisis de impulso-momentum es considerado durante el tiempo mucho más largo de vuelo después de la interacción raqueta-pelota, entonces el impulso del peso de la pelota es importante ya que, junto con la resistencia del aire, causa el cambio en el momentum de la pelota.



## PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

En general, el principio del impulso y momentum lineal, o la conservación del momentum lineal, es aplicado a un *sistema de partículas* para determinar las velocidades finales de las partículas *justo después* del periodo de tiempo considerado. Aplicando estas ecuaciones a todo el sistema, los impulsos internos que actúan dentro del sistema, y que pueden ser desconocidos, son *eliminados* del análisis. Para las aplicaciones se sugiere que se use el siguiente procedimiento.

*Diagrama de cuerpo libre.*

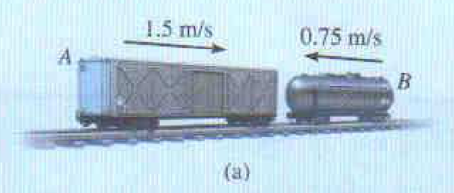
- Establezca el marco de referencia inercial $x, y, z$ y dibuje el diagrama de cuerpo libre para cada partícula del sistema con el propósito de identificar las fuerzas internas y externas.
- La conservación del momentum lineal se aplica al sistema en una dirección dada cuando ninguna fuerza externa o si fuerzas no impulsivas actúan sobre el sistema en esa dirección.
- Establezca la dirección y el sentido de las velocidades inicial y final de las partículas. Si el sentido se desconoce, suponga que es a lo largo de un eje coordenado inercial positivo.
- Como procedimiento alternativo, dibuje los diagramas de impulso y momentum para cada partícula del sistema.

*Ecuaciones de momentum.*

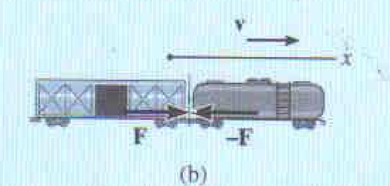
- Aplique el principio del impulso y momentum lineal o la conservación del momentum lineal en las direcciones apropiadas.
- Si es necesario determinar el *impulso interno* $\int F\,dt$ que actúa sobre una sola partícula de un sistema, entonces la partícula debe ser *aislada* (diagrama de cuerpo libre), y el principio del impulso y momentum lineal debe ser aplicado *a la partícula*.
- Después de calculado el impulso, y si se conoce el tiempo $\Delta t$ que actúa el impulso, entonces la *fuerza impulsiva promedio* $F_{prom}$ puede ser determinada a partir de $F_{prom} = \int F\,dt/\Delta t$.

## EJEMPLO 15.4

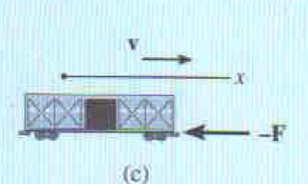
El vagón de carga $A$ de 15 Mg viaja libremente a 1.5 m/s sobre la vía horizontal cuando encuentra un carro tanque $B$ de 12 Mg que se desplaza libremente a 0.75 m/s hacia él como se muestra en la figura 15-8*a*. Si los carros se encuentran y acoplan entre sí, determine (a) la rapidez de ambos justo después del acoplamiento, y (b) la fuerza promedio entre ellos si el acoplamiento tiene lugar en 0.8 s.



(a)



(b)



(c)

Fig. 15–8

### Solución

***Parte (a) Diagrama de cuerpo libre.**** Aquí hemos considerado *ambos* carros como un solo sistema, figura 15-8*b*. Por inspección, el momentum se conserva en la dirección $x$ ya que la fuerza de acoplamiento $\mathbf{F}$ es *interna* al sistema y por tanto se cancela. Se supone que ambos carros, al estar acoplados, se mueven a $\mathbf{v}_2$ en la dirección $x$ positiva.

***Conservación del momentum lineal.***

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 = (m_A + m_B)v_2$$

$$(15\,000 \text{ kg})(1.5 \text{ m/s}) - 12\,000 \text{ kg}(0.75 \text{ m/s}) = (27\,000 \text{ kg})v_2$$

$$v_2 = 0.5 \text{ m/s} \rightarrow \qquad \textit{Resp.}$$

***Parte (b).*** La fuerza de acoplamiento promedio (impulsiva), $\mathbf{F}_{prom}$, puede ser determinada aplicando el principio del momentum lineal a *cualquiera* de los carros.

***Diagrama de cuerpo libre.*** Como se muestra en la figura 15-8*c*, aislando el vagón de carga la fuerza de acoplamiento es *externa* al carro.

***Principio del impulso y momentum.*** Como $\int F\,dt = F_{prom}\,\Delta t = F_{prom}(0.8)$, tenemos

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad m_A(v_A)_1 + \Sigma\int F\,dt = m_A v_2$$

$$(15\,000 \text{ kg})(1.5 \text{ m/s}) - F_{prom}(0.8 \text{ s}) = (15\,000 \text{ kg})(0.5 \text{ m/s})$$

$$F_{prom} = 18.8 \text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

La solución fue posible aquí puesto que la velocidad final del vagón de carga fue obtenida en la parte (a). Intente encontrar $F_{prom}$ aplicando el principio del impulso y momentum al carro tanque.

*En el diagrama de cuerpo libre se muestran sólo fuerzas horizontales.

## EJEMPLO 15.5

El cañón de 1200 lb mostrado en la figura 15-9*a* dispara un proyectil de 8 lb con velocidad de salida de 1500 pies/s con respecto al suelo. Si el disparo tiene lugar en 0.03 s, determine (a) la velocidad de retroceso del cañón justo después del disparo, y (b) la fuerza impulsiva promedio que actúa sobre el proyectil. El soporte del cañón está fijo al suelo, y su retroceso horizontal es absorbido por dos resortes.

### Solución

***Parte (a) Diagrama de cuerpo libre.**** Como se muestra en la figura 15-9*b*, hemos considerado al proyectil y al cañón como un solo sistema, ya que las fuerzas impulsivas, **F**, entre el cañón y el proyectil son *internas* y por tanto se cancelarán en el análisis. Además, durante el tiempo $\Delta t = 0.03$ s, los dos resortes de retroceso que están unidos al soporte ejercen cada uno una *fuerza no impulsiva* $\mathbf{F}_s$ sobre el cañón. Esto es porque $\Delta t$ es muy pequeño, de manera que durante este tiempo el cañón sólo se mueve entre distancias muy pequeñas.† En consecuencia, $F_s = ks \approx 0$, donde $k$ es la rigidez del resorte. Por consiguiente, se puede concluir que el momentum del sistema se conserva en la *dirección horizontal*. Aquí supondremos que el cañón se mueve hacia la izquierda, mientras que el proyectil lo hace hacia la derecha después del disparo.

***Conservación del momentum lineal.***

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad m_c(v_c)_1 + m_p(v_p)_1 = -m_c(v_c)_2 + m_p(v_p)_2$$

$$0 + 0 = -\frac{1200 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}(v_c)_2 + \frac{8 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}(1500 \text{ pies/s})$$

$$(v_c)_2 = 10 \text{ pies/s} \leftarrow \qquad \textit{Resp.}$$

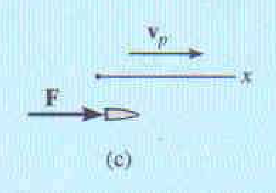
***Parte (b).*** La fuerza impulsiva promedio ejercida por el cañón sobre el proyectil puede ser determinada aplicando el principio del impulso y momentum lineal al proyectil (o al cañón). ¿Por qué?

***Principio del impulso y momentum.*** Usando los datos que aparecen en la figura 15-9*c*, y observando que $\int F\,dt = F_{\text{prom}}\,\Delta t = F_{\text{prom}}(0.03)$, tenemos

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad m(v_p)_1 + \Sigma\int F\,dt = m(v_p)_2$$

$$0 + F_{\text{prom}}(0.03 \text{ s}) = \frac{8 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}(1500 \text{ pies/s})$$

$$F_{\text{prom}} = 12.4(10^3) \text{ lb} = 12.4 \text{ kip} \qquad \textit{Resp.}$$




(c)

Fig. 15-9

*En el diagrama de cuerpo libre se muestran sólo fuerzas horizontales.

†Si el cañón está firmemente fijo a su soporte (sin resortes), la fuerza reactiva del soporte sobre el cañón debe ser considerada como un impulso externo al sistema, ya que no le permitirá movimiento al cañón. Esto, por supuesto, supone que el movi-

EJEMPLO 15.6

El remolcador $T$ de 350 Mg mostrado en la figura 15-10*a* se usa para jalar la barcaza $B$ de 50 Mg con una cuerda $R$. Si inicialmente la barcaza se encuentra en reposo y el remolcador está viajando libremente con velocidad de $(v_T)_1 = 3$ m/s mientras la cuerda tiene *holgura*, determine la velocidad del remolcador *directamente después* que la cuerda se tensa. Suponga que la cuerda no se alarga. Desprecie los efectos de fricción del agua.




**Solución**

***Diagrama de cuerpo libre.**** Como se muestra en la figura 15-10*b*, hemos considerado al sistema en su conjunto (remolcador y barcaza). Por tanto, la fuerza impulsiva creada entre el remolcador y la barcaza es *interna* al sistema, y por ello el momentum del sistema se conserva durante el instante del remolque.

El procedimiento alternativo de dibujar los diagramas del impulso y momentum del sistema se muestra en la figura 15-10*c*.

***Conservación del momentum.*** Al observar que $(v_B)_2 = (v_T)_2$, tenemos

$$(\stackrel{+}{\leftarrow}) \qquad m_T(v_T)_1 + m_B(v_B)_1 = m_T(v_T)_2 + m_B(v_B)_2$$

$$350(10^3)\text{ kg}(3\text{ m/s}) + 0 = 350(10^3)\text{ kg}(v_T)_2 + 50(10^3)\text{ kg}(v_T)_2$$

Despejando,

$$(v_T)_2 = 2.62\text{ m/s} \leftarrow \qquad \textit{Resp.}$$

Este valor representa la velocidad del remolcador *justo después* del impulso de remolque. Use este resultado y muestre que el *impulso* de remolque es de 131 kN · s.

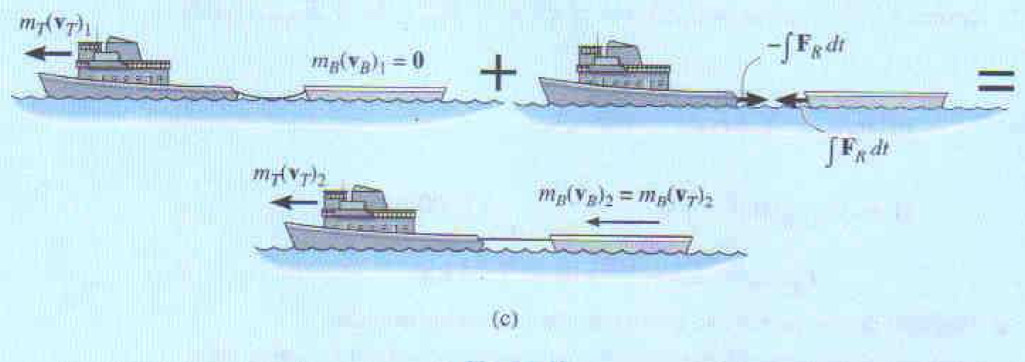
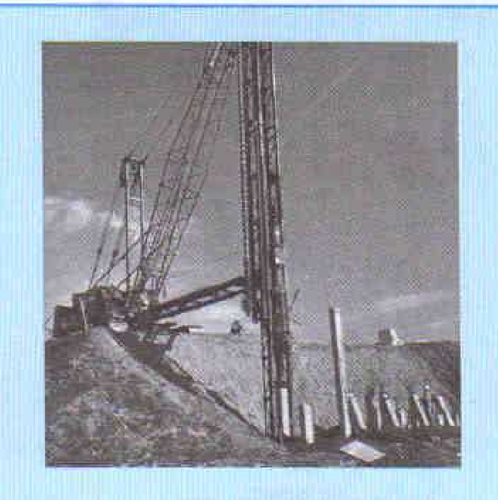



Fig. 15–10

*En el diagrama de cuerpo libre se muestran sólo fuerzas horizontales.

## EJEMPLO 15.7

El pilote rígido $P$ de 800 kg mostrado en la figura 15-11$a$ es hincado en el terreno usando un martinete $H$ de 300 kg. El martinete cae del reposo desde una altura $y_0 = 0.5$ m y golpea la parte superior del pilote. Determine el impulso que el martinete imparte al pilote si éste se encuentra completamente rodeado por arena suelta, de manera que después del golpe el martinete *no* rebota en el pilote.



### Solución

***Conservación de la energía.*** La velocidad con que el martinete golpea al pilote puede ser determinada aplicando la ecuación de la conservacion de la energía al martinete. Con el datum en la parte superior del pilote, figura 15-11$a$, tenemos

$$T_0 + V_0 = T_1 + V_1$$

$$\tfrac{1}{2}m_H(v_H)_0^2 + W_H y_0 = \tfrac{1}{2}m_H(v_H)_1^2 + W_H y_1$$

$$0 + 300(9.81)\text{ N}(0.5\text{ m}) = \frac{1}{2}(300\text{ kg})(v_H)_1^2 + 0$$

$$(v_H)_1 = 3.13\text{ m/s}$$

***Diagrama de cuerpo libre.*** A partir de los aspectos físicos del problema, el diagrama de cuerpo libre del martinete y el pilote, figura 15-11$b$, indica que durante el *corto tiempo* que transcurre *justo antes* a *justo después* de la *colisión*, los pesos del martinete y el pilote, así como la fuerza resistente $\mathbf{F}_s$ de la arena, son fuerzas *no impulsivas*. La fuerza impulsiva $\mathbf{R}$ es interna al sistema y por tanto se cancela. En consecuencia, el momentum se conserva en la dirección vertical durante este corto tiempo.

***Conservación del momentum.*** Como el martinete no rebota en el pilote justo después de la colisión, entonces $(v_H)_2 = (v_P)_2 = v_2$.

$$(+\downarrow) \qquad m_H(v_H)_1 + m_P(v_P)_1 = m_H v_2 + m_P v_2$$

$$(300\text{ kg})(3.13\text{ m/s}) + 0 = (300\text{ kg})v_2 + (800\text{ kg})v_2$$

$$v_2 = 0.854\text{ m/s}$$

***Principio del impulso y momentum.*** El impulso que el pilote imparte al martinete puede ser determinado ahora ya que $\mathbf{v}_2$ es conocida. A partir del diagrama de cuerpo libre para el martinete, figura 15-11$c$, tenemos

$$(+\downarrow) \qquad m_H(v_H)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt = m_H v_2$$

$$(300\text{ kg})(3.13\text{ m/s}) - \int R\,dt = (300\text{ kg})(0.854\text{ m/s})$$

$$\int R\,dt = 683\text{ N}\cdot\text{s} \qquad \textit{Resp.}$$

El impulso igual pero opuesto actúa sobre el pilote. Intente encontrar este impulso aplicando el principio del impulso y momentum al pilote.

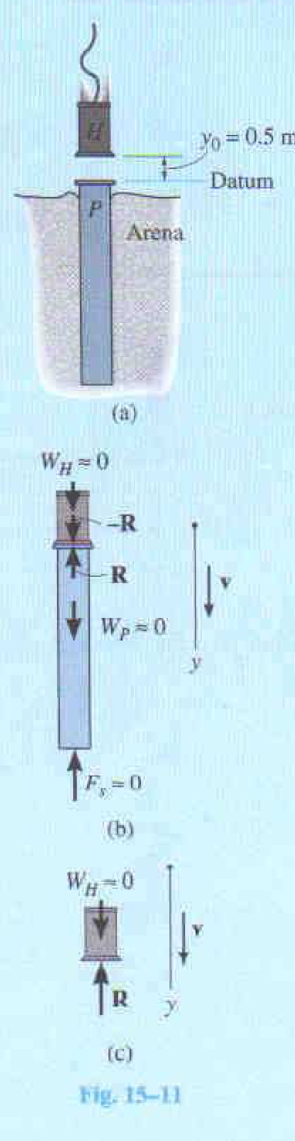



Fig. 15–11

## EJEMPLO 15.8

Un niño con masa de 40 kg está parado en la parte de atrás de un tobogán de 15 kg que originalmente se encuentra en reposo, figura 15-12*a*. Si el niño camina hacia el frente ubicado en *B* y se detiene, determine la distancia que se mueve el tobogán. Desprecie la fricción entre el fondo del tobogán y el suelo (hielo).

### Solución I

***Diagrama de cuerpo libre.*** La fuerza de fricción desconocida de los zapatos del niño sobre el fondo del tobogán puede ser *excluida* del análisis si el tobogán y el niño son considerados como un solo sistema. De esta manera la fuerza de fricción **F** resulta *interna* y es aplicable la conservación del momentum, figura 15-12*b*.

***Conservación del momentum.*** Como los momentos inicial y final del sistema son cero (porque las velocidades inicial y final son cero), el momentum del sistema también debe ser cero cuando el niño está en algún punto intermedio entra *A* y *B*. Entonces

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad -m_b v_b + m_t v_t = 0 \qquad (1)$$

Aquí las dos incógnitas $v_b$ y $v_t$ representan las velocidades del niño moviéndose hacia la izquierda y del tobogán moviéndose hacia la derecha. Ambas son medidas desde una *referencia fija inercial* ubicada sobre el suelo.

En cualquier instante, la *posición* del punto *A* sobre el tobogán y la *posición* del niño deben ser determinadas por integración. Como $v = ds/dt$, entonces $-m_b ds_b + m_t ds_t = 0$. Suponiendo que la posición inicial del punto *A* está en el origen, figura 15-12*c*, entonces tenemos, en la posición final, $-m_b s_b + m_t s_t = 0$. Como $s_b + s_t = 2$ m, o $s_b = (2 - s_t)$, entonces

$$-m_b(2 - s_t) + m_t s_t = 0 \qquad (2)$$

$$s_t = \frac{2m_b}{m_b + m_t} = \frac{2(40)}{40 + 15} = 1.45 \text{ m} \qquad \textit{Resp.}$$

### Solución II

El problema también puede ser resuelto considerando el movimiento relativo del niño con respecto al tobogán, $\mathbf{v}_{b/t}$. Esta velocidad está relacionada a las velocidades del niño y el tobogán mediante la ecuación $\mathbf{v}_b = \mathbf{v}_t + \mathbf{v}_{b/t}$, ecuación 12-34. Como se supone que el movimiento positivo es hacia la derecha en la ecuación 1, $\mathbf{v}_b$ y $\mathbf{v}_{b/t}$ son negativos porque el movimiento del niño es hacia la izquierda. Por consiguiente, en forma escalar, $-v_b = v_t - v_{b/t}$, y la ecuación 1 es entonces $m_b(v_t - v_{b/t}) + m_t v_t = 0$. La integración da

$$m_b(s_t - s_{b/t}) + m_t s_t = 0$$

Al observar que $s_{b/t} = 2$ m, obtenemos la ecuación 2.

(a)

(b)

Posición inicial

Posición final

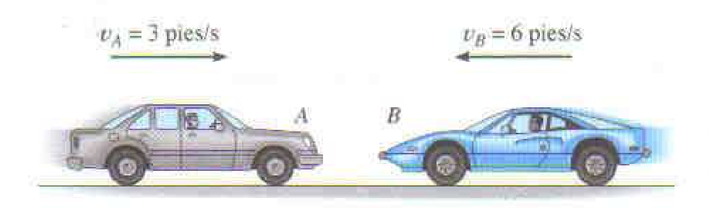
(c)

Fig. 15–12

# PROBLEMAS

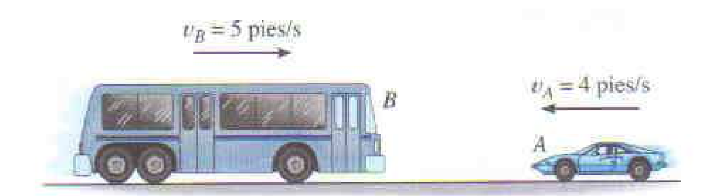
*15-32. Un carro de ferrocarril con masa de 15 Mg viaja libremente a 1.5 m/s sobre una vía horizontal. Al mismo tiempo, otro carro con masa de 12 Mg viaja libremente a 0.75 m/s en la dirección opuesta. Si los carros se encuentran y quedan acoplados, determine la rapidez de ambos justo después del acoplamiento. Encuentre la diferencia entre la energía cinética total antes y después del acoplamiento, y explique cualitativamente lo que sucede a esta energía.

15-33. El auto $A$ tiene un peso de 4500 lb y está viajando hacia la derecha a 3 pies/s. Mientras tanto, un auto $B$ de 3000 lb está viajando a 6 pies/s hacia la izquierda. Si estos autos chocan frontalmente y quedan unidos, determine su velocidad común justo después de la colisión. Suponga que los frenos no se aplican durante la colisión.



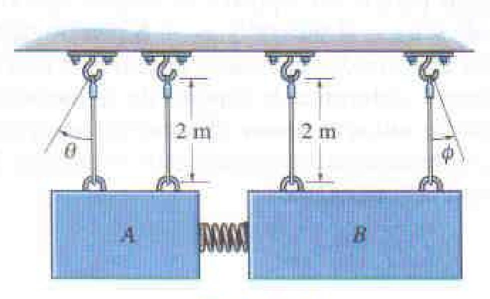

Prob. 15–33

15-34. El autobús $B$ tiene un peso de 15 000 lb y está viajando hacia la derecha a 5 pies/s. Mientras tanto, un auto $A$ de 3000 lb está viajando a 4 pies/s hacia la izquierda. Si estos vehículos chocan de frente y quedan unidos, determine su velocidad común justo después de la colisión. Suponga que los vehículos pueden rodar libremente durante la colisión.



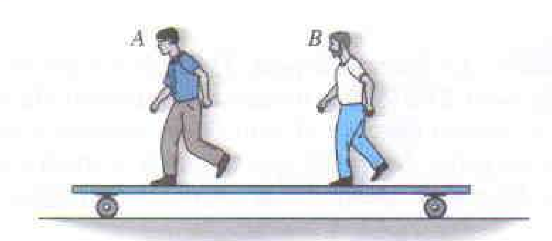

Prob. 15–34

15-35. Los dos bloques $A$ y $B$ tienen cada uno masa de 5 kg y están suspendidos de cuerdas paralelas. Un resorte con rigidez $k$ = 60 N/m se encuentra unido a $B$ y está comprimido 0.3 m contra $A$ y $B$ como se muestra. Determine los ángulos máximos $\theta$ y $\phi$ de las cuerdas cuando los bloques son liberados del reposo y el resorte queda



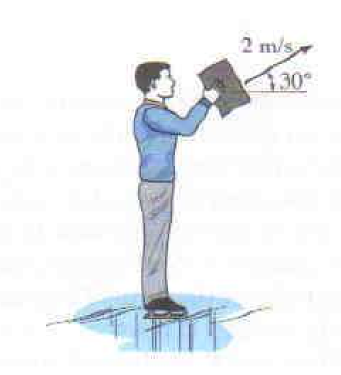

Prob. 15–35

*15-36. Dos hombres, $A$ y $B$, cada uno con peso de 160 lb, están de pie sobre el carro de 200 lb. Cada individuo corre con rapidez de 3 pies/s medida con respecto al carro. Determine la rapidez final del carro si (a) A corre y salta del carro y luego B corre y salta por el mismo extremo, y (b) ambos corren y saltan al mismo tiempo fuera del carro. Desprecie la masa de las ruedas y suponga que los saltos son hechos horizontalmente.

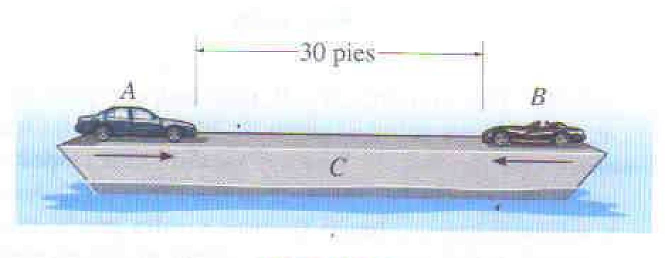



Prob. 15–36

15-37. Un hombre con patines para hielo lanza un bloque de 8 kg con velocidad inicial de 2 m/s, medida con respecto a sí mismo, en la dirección mostrada. Si él está originalmente en reposo y completa el lanzamiento en 1.5 s mientras mantiene sus piernas rígidas, determine la velocidad horizontal del hombre justo después de soltar el bloque. ¿Cuál es la reacción vertical de sus patines sobre el hielo durante el lanzamiento? El hombre tiene masa de 70 kg. Desprecie la fricción y el movimiento de sus brazos.

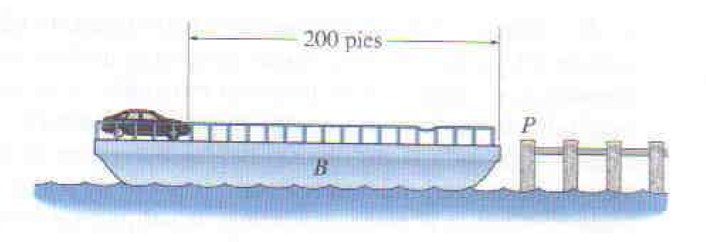


**15-38.** La barcaza pesa 45 000 lb y soporta dos autos $A$ y $B$, los cuales pesan 4000 y 3000 lb, respectivamente. Si los autos parten del reposo y se dirigen uno al otro, acelerando a $a_A = 4$ pies/s$^2$ y $a_B = 8$ pies/s$^2$ hasta que alcanzan una rapidez constante de 6 pies/s con relación a la barcaza, determine la rapidez de la barcaza justo antes que los autos choquen. ¿En cuánto tiempo ocurre esto? Originalmente la barcaza está en reposo. Desprecie la resistencia del agua.




**Prob. 15–38**

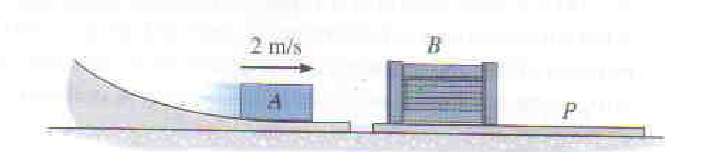
**15-39.** La barcaza $B$ pesa 30 000 lb y soporta un auto que pesa 3000 lb. Si la barcaza no está amarrada al muelle $P$ y alguien conduce el auto de un extremo a otro para descargarlo, determine qué tan lejos se mueve la barcaza del muelle. Desprecie la resistencia del agua.




**Prob. 15–39**

***15-40.** El bloque $A$ tiene masa de 2 kg y se desliza suavemente en un extremo abierto de la caja $B$ a velocidad de 2 m/s. Si la caja tiene masa de 3 kg y descansa sobre una placa $P$ con masa de 3 kg, determine la distancia que la placa se mueve después que deja de deslizarse en el piso. También, ¿cuál es la distancia después del impacto antes que cese todo movimiento? El coeficiente de fricción cinética entre la caja y la placa es $\mu_k = 0.2$, y entre la placa y el suelo $\mu'_k = 0.4$. También, el coeficiente de fricción

**15-41.** El bloque $A$ tiene masa de 2 kg y se desliza suavemente en un extremo abierto de la caja $B$ avelocidad de 2 m/s. Si la caja tiene masa de 3 kg y descansa sobre una placa $P$ con masa de 3 kg, determine la distancia que la placa se mueve después que deja de deslizarse en el piso. ¿Cuánto tiempo pasa después del impacto antes que cese todo movimiento? El coeficiente de fricción cinética entre la caja y la placa es $\mu_k = 0.2$, y entre la placa y el suelo $\mu'_k = 0.1$. El coeficiente de fricción estática entre la placa y el suelo es $\mu'_s = 0.12$. Desprecie la fricción dentro de la caja.



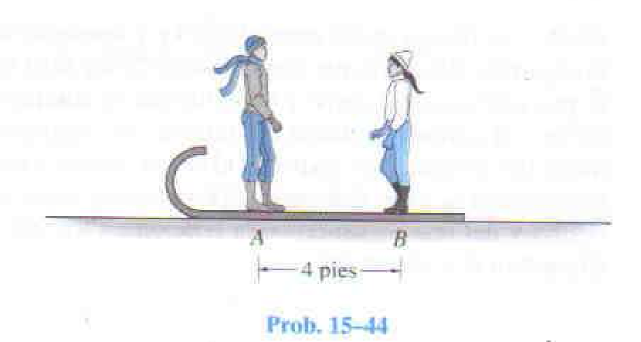

**Probs. 15–40/41**

**15-42.** El hombre $M$ pesa 150 lb y salta sobre el bote $B$ que pesa 200 lb. Si el hombre tiene una componente horizontal de velocidad *relativa al bote* de 3 pies/s, justo antes de llegar al bote, y el bote está viajando a $v_B = 2$ pies/s alejándose del muelle cuando él salta, determine la velocidad resultante del hombre y el bote.

**15-43.** El hombre $M$ pesa 150 lb y salta sobre el bote $B$ que está originalmente en reposo. Si este individuo tiene una componente horizontal de velocidad de 3 pies/s justo antes de entrar al bote, determine el peso del bote si éste tiene velocidad de 2 pies/s una vez que el hombre entra a él.

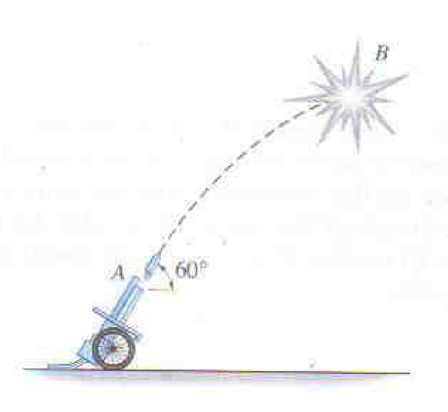


*15-44. Un niño $A$ con peso de 80 lb y una niña $B$ con peso de 65 lb están de pie en reposo en los extremos del tobogán que tiene un peso de 20 lb. Si $A$ camina hacia $B$ y se detiene, y ambos caminan juntos de regreso a la posición original de $A$, determine la posición final del tobogán justo después que el movimiento cesa. Desprecie la fricción.



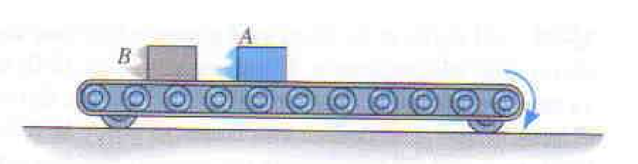

Prob. 15–44

15-45. El proyectil de 10 lb es disparado desde el nivel del terreno con velocidad inicial $v_A$ = 80 pies/s en la dirección mostrada. Cuando el proyectil alcanza su punto más alto, $B$, explota en dos fragmentos de 5 lb. Si un fragmento viaja verticalmente hacia arriba a 12 pies/s, determine la distancia entre los fragmentos después que tocan el suelo. Desprecie el tamaño del cañón.



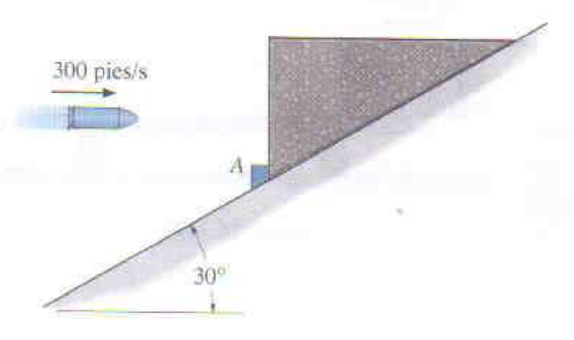

Prob. 15–45

15-46. Dos cajas $A$ y $B$, cada una con peso de 160 lb, están situadas sobre la banda transportadora de 500 lb que puede rodar libremente sobre el suelo. Si la banda parte del reposo y comienza a moverse con rapidez de 3 pies/s, determine su rapidez final cuando (a) las cajas no están encimadas y $A$ sale fuera de la banda y luego $B$ también sale, y (b) $A$ está encima de $B$ y ambas salen juntas de la banda.



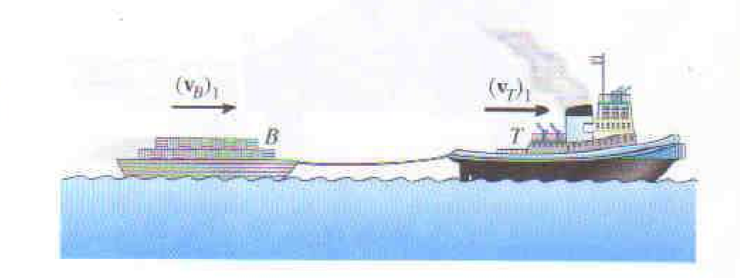

Prob. 15–46

15-47. El bloque de 10 kg es mantenido en reposo sobre el plano inclinado liso por medio del tope colocado en $A$. Si la bala de 10 g está viajando a 300 m/s cuando se incrusta en el bloque de 10 kg, determine la distancia que el bloque se deslizará hacia arriba del plano antes de detenerse momentáneamente.



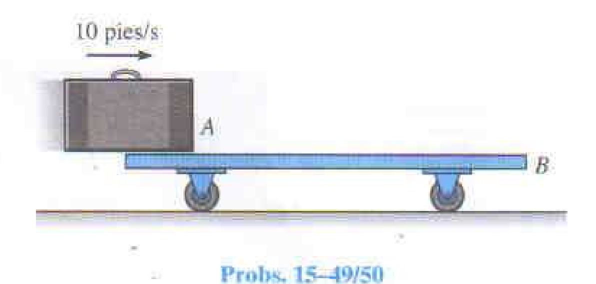

Prob. 15–47

*15-48. Un bote remolcador $T$ con masa de 19 Mg está unido a una barcaza $B$ con masa de 75 Mg. Si la cuerda es "elástica" de tal manera que tiene rigidez $k$ = 600 kN/m, determine el alargamiento máximo en la cuerda durante el remolque inicial. Originalmente, tanto el remolcador como la barcaza se están moviendo en la misma dirección con rapidez $(v_T)_1$ = 15 km/h y $(v_B)_1$ = 10 km/h, respectivamente. Desprecie la resistencia del agua.



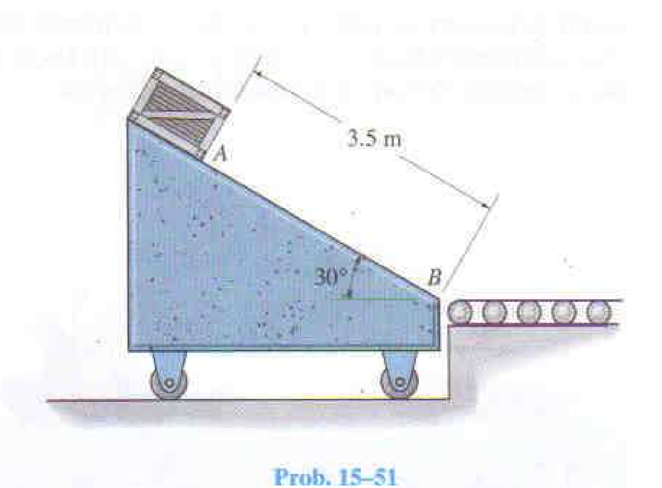
**15-49.** El carro $B$ de 20 lb está soportado sobre rodillos de tamaño insignificante. Si una maleta $A$ de 10 lb se lanza horizontalmente sobre el carro a 10 pies/s, determine el tiempo que $A$ se desliza con respecto a $B$, y la velocidad final de $A$ y $B$. El coeficiente de fricción cinética entre $A$ y $B$ es $\mu_k = 0.4$.

**15-50.** El carro $B$ de 20 lb está soportado sobre rodillos de tamaño insignificante. Si una maleta $A$ de 10 lb es lanzada horizontalmente sobre el carro a 10 pies/s, determine el tiempo $t$ y la distancia que $B$ se mueve antes que $A$ se detenga con respecto a $B$. El coeficiente de fricción cinética entre $A$ y $B$ es $\mu_k = 0.4$.




**Probs. 15–49/50**

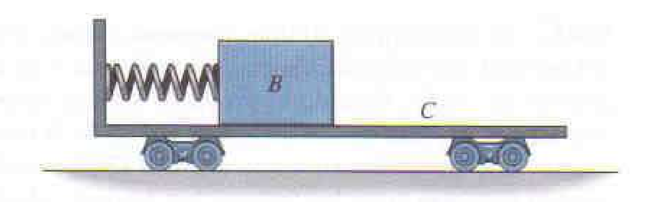
**15-51.** Una rampa de rodamiento libre tiene masa de 40 kg. Una caja de 10 kg es liberada del reposo en el punto $A$ y se desliza hacia abajo 3.5 m hasta el punto $B$. Si la superficie de la rampa es lisa, determine su rapidez cuando la caja llega a $B$. También, ¿cuál es la velocidad de la caja?




**Prob. 15–51**

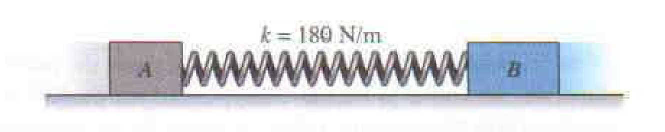
***15-52.** El bloque tiene masa de 50 kg y descansa sobre la superficie del carro que tiene masa de 75 kg. Si el resorte que está unido al carro y no al bloque es comprimido 0.2 m y el sistema es liberado del reposo, determine la rapidez del bloque después que el resorte pierde su deformación. Desprecie la masa de las ruedas del carro y del resorte, así como la fricción en los cálculos. Considere $k = 300$ N/m.

**15-53.** El bloque tiene masa de 50 kg y descansa sobre la superficie del carro que tiene masa de 75 kg. Si el resorte que está unido al carro y no al bloque es comprimido 0.2 m y el sistema se libera del reposo, determine la rapidez del bloque con respecto al carro después que el resorte deja de estar deformado. Desprecie la masa de las ruedas y del resorte así como la fricción en los cálculos. Considere $k = 300$ N/m.




**Probs. 15–52/53**

**15-54.** Los bloques $A$ y $B$ tienen masa de 40 y 60 kg, respectivamente. Se encuentran colocados sobre una superficie lisa y el resorte que los conecta está estirado 2 m. Si ambos bloques son liberados del reposo, determine su rapidez en el instante en que el resorte no está alargado

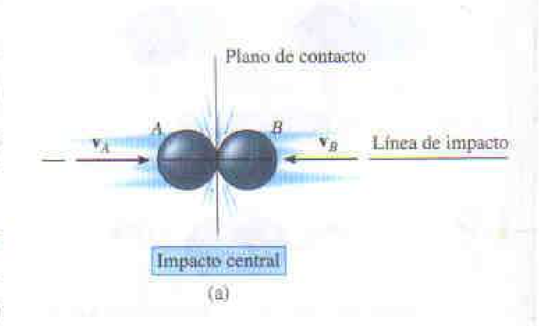



**Prob. 15–54**

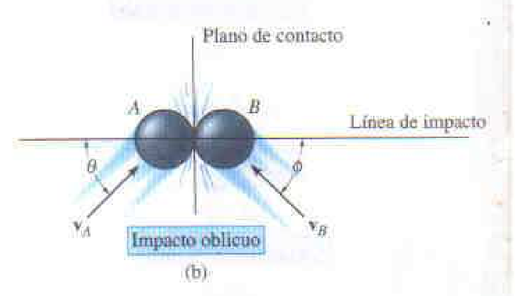
## 15.4 Impacto

El *impacto* ocurre cuando dos cuerpos entran en colisión entre sí durante un periodo muy *corto*, ocasionando que grandes fuerzas (impulsivas) sean ejercidas entre los cuerpos. El golpe de un martillo sobre un clavo, o el de un palo de golf sobre una pelota, son ejemplos comunes de cargas de impacto.

En general, hay dos tipos de impacto. El *impacto central* ocurre cuando la dirección del movimiento de los centros de masa de las dos partículas en colisión es a lo largo de una línea que pasa por los centros de masa de las partículas. Esta línea se llama *línea de impacto*, figura 15-13*a*. Cuando el movimiento de una o de ambas partículas forma ángulo con la línea de impacto, figura 15-13*b*, el impacto se denomina *impacto oblicuo*.



(a)

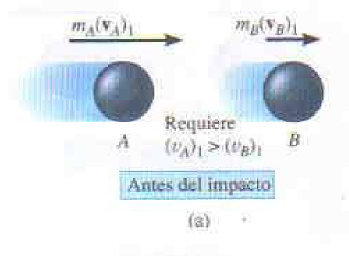


(b)

Fig. 15–13

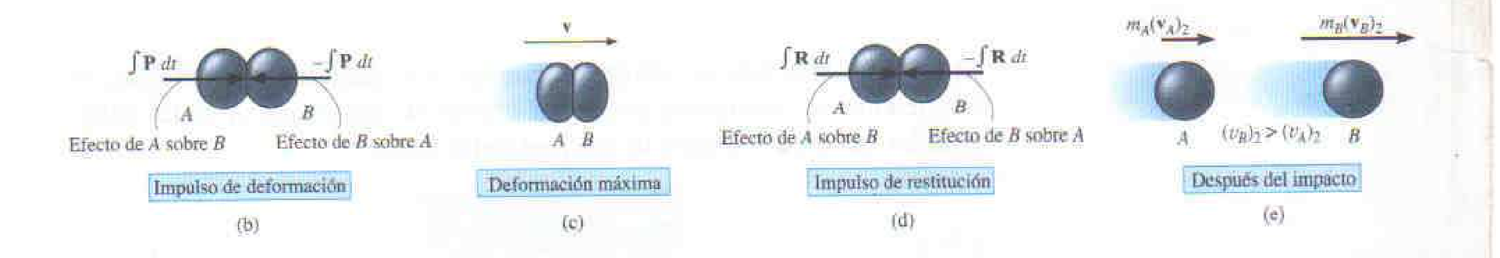
**Impacto central.** Para ilustrar el método de análisis de la mecánica del impacto, considere el caso que implica el impacto central de dos partículas *lisas* $A$ y $B$ mostradas en la figura 15-14.

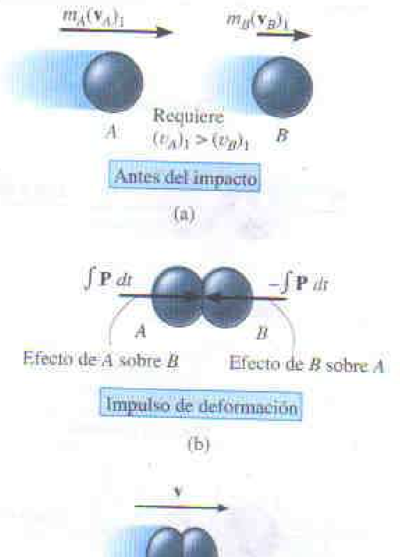
- Las partículas tienen el mismo momentum lineal inicial mostrado en la figura 15-14*a*. Si $(v_A)_1 > (v_B)_1$, eventualmente ocurrirá la colisión.
- Durante la colisión las partículas deben considerarse como *deformables* o no rígidas. Las partículas sufrirán un *periodo de deformación* en el que ejercen un impulso de deformación igual pero opuesto, $\int \mathbf{P}\, dt$, entre sí, figura 15-14*b*.
- Sólo en el instante de *deformación máxima* se moverán ambas partículas con una velocidad común $\mathbf{v}$, ya que su movimiento relativo es cero, figura 15-14*c*.
- Después ocurre un *periodo de restitución* en el que las partículas retornan a su forma original o quedan permanentemente deformadas. El igual pero opuesto *impulso de restitución* $\int \mathbf{R}\, dt$ separa a las partículas una de otra, figura 15-14*d*. En realidad, las propiedades físicas de dos cuerpos cualesquiera son tales que el impulso de deformación es *siempre mayor* que el de restitución, esto es, $\int P\, dt > \int R\, dt$.
- Justo después de la separación, las partículas tendrán los momentum finales mostrados en la figura 15-14*e*, donde $(v_B)_2 > (v_A)_2$.

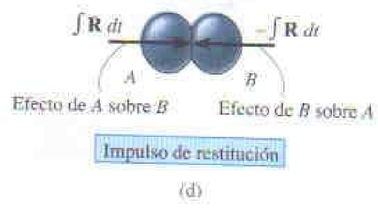


(a)

Fig. 15–14





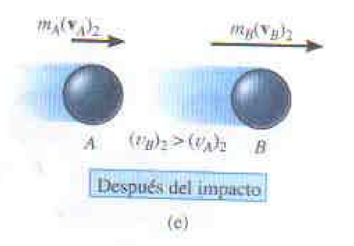




**Fig. 15–14**

En la mayoría de los problemas las velocidades iniciales de las partículas serán *conocidas*, y será necesario determinar sus velocidades finales $(v_A)_2$ y $(v_B)_2$. El *momentum* del *sistema de partículas* se *conserva* ya que durante la colisión los impulsos internos de deformación y restitución se *cancelan*. Por tanto, con referencia a las figuras 15-14*a* y 15-14*e* requerimos que

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad m_A(v_A)_1 + m_B(v_B)_1 = m_A(v_A)_2 + m_B(v_B)_2 \qquad (15\text{–}10)$$

Para obtener una segunda ecuación necesaria y encontrar $(v_A)_2$ y $(v_B)_2$, debemos aplicar el principio del impulso y momentum a *cada partícula*. Por ejemplo, durante la fase de deformación para la partícula $A$, figuras 15-14*a*, 15-14*b* y 15-14*c*, tenemos

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad m_A(v_A)_1 - \int P\,dt = m_A v$$

Para la fase de restitución, figuras 15-14*c*, 15-14*d* y 15-14*e*,

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad m_A v - \int R\,dt = m_A(v_A)_2$$

La razón del impulso de restitución al impulso de deformación se llama *coeficiente de restitución*, *e*. De las ecuaciones anteriores, este valor es, para la partícula $A$,

$$e = \frac{\int R\,dt}{\int P\,dt} = \frac{v - (v_A)_2}{(v_A)_1 - v}$$

De manera similar, podemos establecer $e$ considerando la partícula $B$, figura 15-14. Esto da

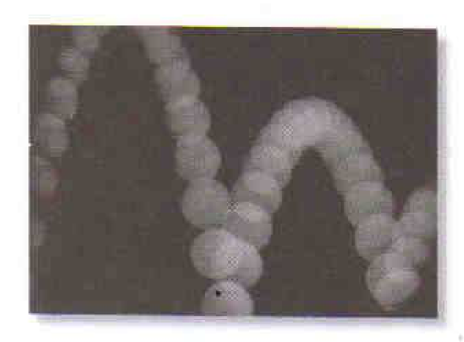
$$e = \frac{\int R\,dt}{\int P\,dt} = \frac{(v_B)_2 - v}{v - (v_B)_1}$$

Si la $v$ desconocida es eliminada con las dos ecuaciones anteriores, el coeficiente de restitución puede ser expresado en términos de las velocidades iniciales y finales de las partículas como

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1} \qquad (15\text{–}11)$$

Si se especifica un valor para $e$, las ecuaciones 15-10 y 15-11 pueden ser resueltas simultáneamente para obtener $(v_A)_2$ y $(v_B)_2$. Sin embargo, al hacerlo así, es importante establecer cuidadosamente una convención de signos para definir la dirección positiva de $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$, y luego usarla *consistentemente* al escribir *ambas* ecuaciones. Como se observa en la aplicación mostrada e indicada simbólicamente por la flecha entre paréntesis, hemos definido la dirección positiva hacia la derecha al referirnos a los movimientos de $A$ y $B$. En consecuencia, si resulta un valor negativo para la solución de $(v_A)_2$ o de $(v_B)_2$, ello indica que el movimiento es hacia la izquierda.

**Coeficiente de restitución.** Con referencia a las figuras 15-14$a$ y 15-14$e$, vemos que la ecuación 15-11 establece que $e$ es igual a la razón de la velocidad relativa de la separación de las partículas *justo después del impacto*, $(v_B)_2 - (v_A)_2$, a la velocidad relativa del acercamiento de las partículas *justo antes del impacto* $(v_A)_1 - (v_B)_1$. Midiendo experimentalmente esas velocidades relativas, se ha encontrado que $e$ varía de modo apreciable con la velocidad del impacto así como con el tamaño y la forma de los cuerpos en colisión. Por estas razones, el coeficiente de restitución es confiable sólo cuando se usa con datos que se aproximan bastante a las condiciones existentes cuando se efectuaron sus mediciones. En general, $e$ tiene un valor de entre cero y uno, y se debe ser consciente del significado físico de esos dos límites.



La calidad de una pelota de tenis es medida por la altura de su rebote, la cual puede ser relacionada con su coeficiente de restitución. Usando la mecánica del impacto oblicuo, los ingenieros pueden diseñar un dispositivo de separación para mantener el control de calidad de las pelotas de tenis después de la producción.

**Impacto elástico ($e = 1$):** Si la colisión entre las dos partículas es *perfectamente elástica*, el impulso de deformación ($\int \mathbf{P}\,dt$) es igual y opuesto al impulso de restitución ($\int \mathbf{R}\,dt$). $e = 1$ para una colisión elástica, aunque en realidad esto nunca puede alcanzarse.

**Impacto plástico ($e = 0$):** Se dice que el impacto es *inelástico o plástico* cuando $e = 0$. En este caso no hay impulso de restitución dado a las partículas ($\int \mathbf{R}\,dt = \mathbf{0}$), por lo que después de la colisión ambas partículas permanecen unidas *entre sí* con una velocidad común.

A partir de la derivación anterior debería ser claro que el principio del trabajo y la energía no puede ser usado para el análisis de problemas de impacto, ya que no es posible saber cómo varían o se desplazan las *fuerzas internas* de deformación y restitución durante la colisión. Sin embargo, conociendo las velocidades de las partículas antes y después de la colisión, la pérdida de energía durante la colisión puede ser calculada con base en la diferencia de la energía cinética de las partículas. Esta pérdida de energía, $\Sigma U_{1-2} = \Sigma T_2 - \Sigma T_1$, ocurre porque parte de la energía cinética inicial de la partícula es transformada en energía térmica así como en la generación de sonido y deformación localizada del material cuando sucede la colisión. En particular, si el impacto es *perfectamente elástico*, ninguna energía se pierde en la colisión; mientras que si la colisión es *plástica*, la energía perdida durante la colisión es un máximo.

## PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS (IMPACTO CENTRAL)

En la mayoría de los casos, las *velocidades finales* de dos partículas lisas deben ser determinadas *justo después* que sean sometidas a un impacto central directo. Si son conocidos el coeficiente de restitución, la masa de cada partícula, y la velocidad inicial de cada partícula *justo antes* del impacto, la solución del problema se puede obtener usando las dos ecuaciones siguientes:

- La conservación del momentum es aplicable al sistema de partículas, $\Sigma mv_1 = \Sigma mv_2$.
- El coeficiente de restitución, $e = [(vB)_2 - (v_A)_2]/[(v_A)_1 - (vB)_1]$, relaciona las velocidades relativas de las partículas a lo largo de la línea de impacto, justo antes y justo después de la colisión.

Al aplicar estas dos ecuaciones, el sentido de una velocidad desconocida puede ser supuesto. Si la solución da una magnitud negativa, la velocidad actúa en el sentido contrario.

**Impacto oblicuo.** Cuando entre dos partículas lisas ocurre impacto oblicuo, las partículas se alejan una de otra con velocidades cuyas direcciones y magnitudes son desconocidas. Si se conocen las velocidades iniciales, en el problema estarán presentes cuatro incógnitas. Como se muestra en la figura 15-15*a*, estas incógnitas pueden ser representadas como $(v_A)_2$, $(v_B)_2$, $\theta_2$ y $\phi_2$, o como las componentes $x$ y $y$ de las velocidades finales.

## PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS (IMPACTO OBLICUO)

Si el eje $y$ es establecido dentro del plano de contacto y el eje $x$ a lo largo de la línea de impacto, las fuerzas impulsivas de deformación y restitución actúan *sólo en la dirección x*, figura 15-15*b*. Resolviendo los vectores de velocidad o momentum en componentes a lo largo de los ejes $x$ y $y$, figura 15-15*b*, es posible escribir cuatro ecuaciones escalares independientes para determinar $(v_{Ax})_2$, $(v_{Ay})_2$, $(v_{Bx})_2$ y $(v_{By})_2$.

- El momentum del sistema se conserva *a lo largo de la línea de impacto*, eje $x$, de manera que $\Sigma m(v_x)_1 = \Sigma m(v_x)_2$.
- El coeficiente de restitución, $e = [(v_{Bx})_2 - (v_{Ax})_2]/[(v_{Ax})_1 - (v_{Bx})_1]$, relaciona las *componentes* de velocidad relativa de las partículas *a lo largo de la línea de impacto* (eje $x$).
- El momentum de la partícula $A$ se conserva a lo largo del eje $y$, perpendicular a la línea de impacto, ya que ningún impulso actúa sobre la partícula $A$ en esta dirección.
- El momentum de la partícula $B$ se conserva a lo largo del eje $y$, perpendicular a la línea de impacto, ya que ningún impulso actúa sobre la partícula $B$ en esta dirección.

La aplicación de estas cuatro ecuaciones es ilustrada numéricamente en el ejemplo 15.11.

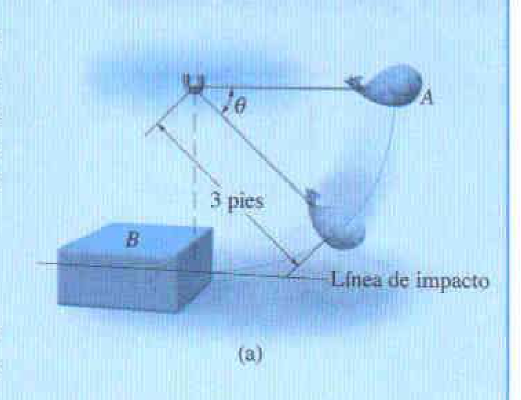
(a)

(b)

Fig. 15-15

## EJEMPLO 15.9

La bolsa $A$, con peso de 6 lb, es liberada del reposo en la posición $\theta = 0°$, como se muestra en la figura 15-16$a$. Después de caer a $\theta = 90°$, la bolsa golpea una caja $B$ de 18 lb. Si el coeficiente de restitución entre la bolsa y la caja es $e = 0.5$, determine las velocidades de la bolsa y de la caja justo después del impacto y la pérdida de energía durante la colisión.




(a)

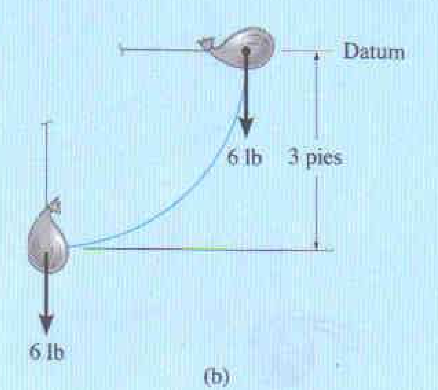
### Solución

Este problema implica impacto central. ¿Por qué? Sin embargo, antes de analizar la mecánica del impacto, primero es necesario obtener la velocidad de la bolsa *justo antes* de que toque la caja.

*Conservación de la energía.* Con el datum en $\theta = 0°$, figura 15-16$b$, tenemos

$$T_0 + V_0 = T_1 + V_1$$

$$0 + 0 = \frac{1}{2}\left(\frac{6 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}\right)(v_A)_1^2 - 6 \text{ lb}(3 \text{ pies}); \quad (v_A)_1 = 13.9 \text{ pies/s}$$




(b)

*Conservación del momentum.* Supondremos que después del impacto $A$ y $B$ viajan hacia la izquierda. Aplicando la conservación del momentum al sistema, tenemos

$$(\overset{+}{\leftarrow}) \qquad m_B(v_B)_1 + m_A(v_A)_1 = m_B(v_B)_2 + m_A(v_A)_2$$

$$0 + \frac{6 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}(13.9 \text{ pies/s}) = \frac{18 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}(v_B)_2 + \frac{6 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}(v_A)_2$$

$$(v_A)_2 = 13.9 - 3(v_B)_2 \qquad (1)$$

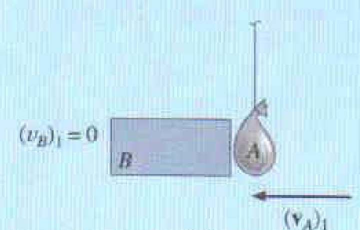
*Coeficiente de restitución.* Observando que para que la separación ocurra después de la colisión $(v_B)_2 > (v_A)_2$, figura 15-16c, tenemos

$$(\overset{+}{\leftarrow}) \qquad e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}; \qquad 0.5 = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{13.9 \text{ pies/s} - 0}$$

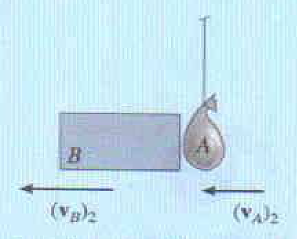
$$(v_A)_2 = (v_B)_2 - 6.95 \qquad (2)$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones 1 y 2 obtenemos

$$(v_A)_2 = -1.74 \text{ pies/s} = 1.74 \text{ pies/s} \rightarrow \text{ y } (v_B)_2 = 5.21 \text{ pies/s} \leftarrow \quad \textit{Resp.}$$




Justo antes del impacto




Justo después del impacto

(c)

Fig. 15-16

*Pérdida de energía.* Aplicando el principio del trabajo y la energía a la bolsa y la caja justo antes y justo después de la colisión, tenemos

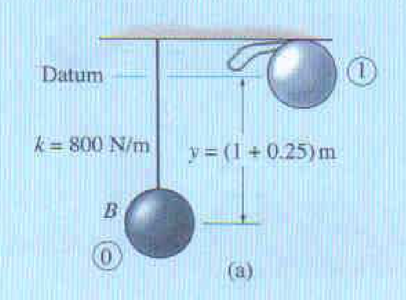
$$\Sigma U_{1-2} = T_2 - T_1;$$

$$\Sigma U_{1-2} = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{18 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}\right)(5.21 \text{ pies/s})^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{6 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}\right)(1.74 \text{ pies/s})^2\right] - \left[\frac{1}{2}\left(\frac{6 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}\right)(13.9 \text{ pies/s})^2\right]$$

$$\Sigma U_{1-2} = -10.1 \text{ pies} \cdot \text{lb} \qquad \textit{Resp.}$$

¿Por qué hay una pérdida de energía?

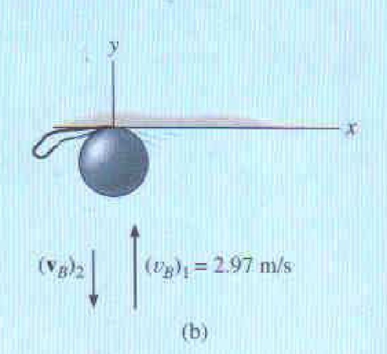
**EJEMPLO 15.10**




La bola $B$ mostrada en la figura 15-17$a$ tiene masa de 1.5 kg y está suspendida del techo por medio de una cuerda elástica de 1 m de longitud. Si la cuerda es *estirada* hacia abajo 0.25 m y la bola es liberada del reposo, determine qué tanto se estira la cuerda después que la bola rebota en el techo. La rigidez de la cuerda es $k = 800$ N/m, y el coeficiente de restitución entre la bola y el techo es $e = 0.8$. La bola efectúa un impacto central con el techo.

### Solución

Primero debemos obtener la velocidad de la bola *justo antes* de golpear el techo usando métodos de energía, luego consideraremos el impulso y el momentum entre la bola y el techo, y finalmente aplicaremos de nuevo métodos de energía para determinar el alargamiento de la cuerda.




*Conservación de la energía.* Con el datum localizado como se muestra en la figura 15-17$a$, y observando que inicialmente $y = y_0 = (1 + 0.25)$ m $= 1.25$ m, tenemos

$$T_0 + V_0 = T_1 + V_1$$
$$\tfrac{1}{2}m(v_B)_0^2 - W_B y_0 + \tfrac{1}{2}ks^2 = \tfrac{1}{2}m(v_B)_1^2 + 0$$
$$0 - 1.5(9.81)\text{ N}(1.25\text{ m}) + \tfrac{1}{2}(800\text{ N/m})(0.25\text{ m})^2 = \tfrac{1}{2}(1.5\text{ kg})(v_B)_1^2$$
$$(v_B)_1 = 2.97\text{ m/s}\uparrow$$

La interacción de la bola con el techo será considerada ahora usando los principios del impacto.* Como una porción desconocida de la masa del techo está implicada en el impacto, la conservación del momentum para el sistema bola-techo no será escrita. La "velocidad" de esta porción del techo es cero ya que se supone que éste (o la Tierra) permanece en reposo *tanto* antes *como* después del impacto.

*Coeficiente de restitución.* Figura 15-17$b$.

$$(+\uparrow)\quad e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1};\qquad 0.8 = \frac{(v_B)_2 - 0}{0 - 2.97\text{ m/s}}$$
$$(v_B)_2 = -2.37\text{ m/s} = 2.37\text{ m/s}\downarrow$$

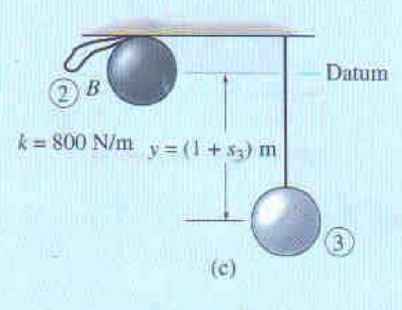



Fig. 15-17

*Conservación de la energía.* El alargamiento máximo $s_3$ en la cuerda puede ser determinado aplicando de nuevo la ecuación de la conservación de la energía a la bola justo después de la colisión. Suponiendo que $y = y_3 = (1 + s_3)$ m, figura 15-17$c$, entonces

$$T_2 + V_2 = T_3 + V_3$$
$$\tfrac{1}{2}m(v_B)_2^2 + 0 = \tfrac{1}{2}m(v_B)_3^2 - W_B y_3 + \tfrac{1}{2}ks_3^2$$
$$\tfrac{1}{2}(1.5\text{ kg})(2.37\text{ m/s})^2 = 0 - 9.81(1.5)\text{ N}(1\text{ m} + s_3) + \tfrac{1}{2}(800\text{ N/m})s_3^2$$
$$400s_3^2 - 14.72s_3 - 18.94 = 0$$

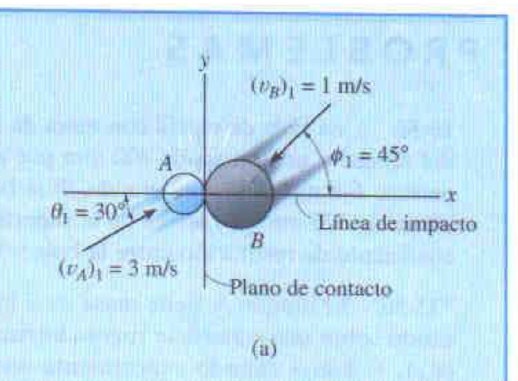
Resolviendo la raíz positiva en esta ecuación cuadrática obtenemos

$$s_3 = 0.237\text{ m} = 237\text{ mm}$$ *Resp.*

*El peso de la bola se considera como una fuerza no impulsiva.

## EJEMPLO 15.11

Dos discos lisos $A$ y $B$ con masa de 1 y 2 kg, respectivamente, entran en colisión con las velocidades mostradas en la figura 15-18*a*. Si el coeficiente de restitución para los discos es $e = 0.75$, determine las componentes $x$ y $y$ de la velocidad final de cada disco justo después de la colisión.

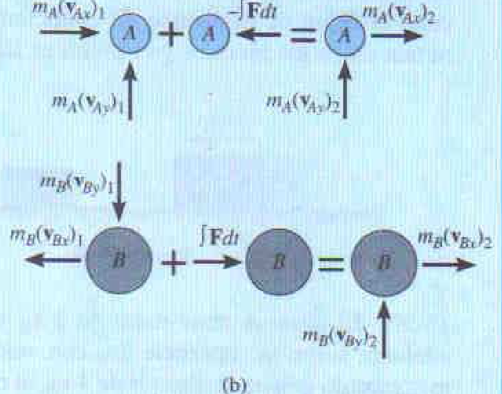



### Solución

El problema implica *impacto oblicuo*. ¿Por qué? Para buscar una solución, hemos establecido los ejes $x$ y $y$ a lo largo de la línea de impacto y el plano de contacto, respectivamente, figura 15-18*a*.

Resolviendo cada una de las velocidades iniciales en componentes $x$ y $y$, tenemos

$$(v_{Ax})_1 = 3\cos 30° = 2.60 \text{ m/s} \qquad (v_{Ay})_1 = 3\,\text{sen}\,30° = 1.50 \text{ m/s}$$
$$(v_{Bx})_1 = -1\cos 45° = -0.707 \text{ m/s} \quad (v_{By})_1 = -1\,\text{sen}\,45° = -0.707 \text{ m/s}$$




Las cuatro componentes de velocidad desconocidas después de la colisión son supuestas actuando en dirección positiva, figura 15-18*b*. Como el impacto ocurre sólo en la dirección $x$ (línea de impacto), la conservación del momentum para *ambos* discos puede ser aplicada en esta dirección. ¿Por qué?

***Conservación del momentum "x".*** Con referencia a los diagramas de momentum, tenemos

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad m_A(v_{Ax})_1 + m_B(v_{Bx})_1 = m_A(v_{Ax})_2 + m_B(v_{Bx})_2$$
$$1\text{ kg}(2.60 \text{ m/s}) + 2\text{ kg}(-0.707 \text{ m/s}) = 1\text{ kg}(v_{Ax})_2 + 2\text{ kg}(v_{Bx})_2$$
$$(v_{Ax})_2 + 2(v_{Bx})_2 = 1.18 \qquad (1)$$

***Coeficiente de restitución (x).*** Se *supone* que ambos discos tienen componentes de velocidad en la dirección $+x$ después de la colisión, figura 15-18*b*.

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad e = \frac{(v_{Bx})_2 - (v_{Ax})_2}{(v_{Ax})_1 - (v_{Bx})_1}; \qquad 0.75 = \frac{(v_{Bx})_2 - (v_{Ax})_2}{2.60 \text{ m/s} - (-0.707 \text{ m/s})}$$
$$(v_{Bx})_2 - (v_{Ax})_2 = 2.48 \qquad (2)$$

Resolviendo las ecuaciones 1 y 2 para $(v_{Ax})_2$ y $(v_{Bx})_2$ resulta

$$(v_{Ax})_2 = -1.26 \text{ m/s} = 1.26 \text{ m/s} \leftarrow \qquad (v_{Bx})_2 = 1.22 \text{ m/s} \rightarrow \quad \textit{Resp.}$$

***Conservación del momentum "y".*** El momentum de *cada disco* se *conserva* en la dirección $y$ (plano de contacto), ya que los discos son lisos y por tanto *ningún* impulso externo actúa en esta dirección. A partir de la figura 15-18*b*,

$$(+\uparrow)\ m_A(v_{Ay})_1 = m_A(v_{Ay})_2; \qquad (v_{Ay})_2 = 1.50 \text{ m/s}\uparrow \qquad \textit{Resp.}$$
$$(+\uparrow)\ m_B(v_{By})_1 = m_B(v_{By})_2; \ (v_{By})_2 = -0.707 \text{ m/s} = 0.707 \text{ m/s}\downarrow \quad \textit{Resp.}$$

Demuestre que al sumar las componentes de velocidad se obtienen los resultados mostrados en la figura 15-18*c*.

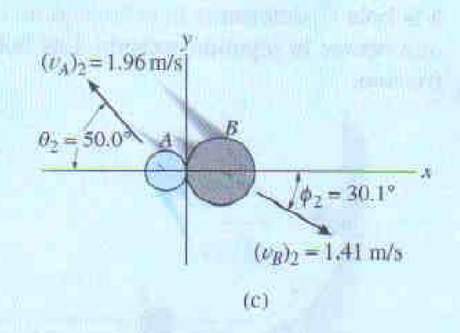
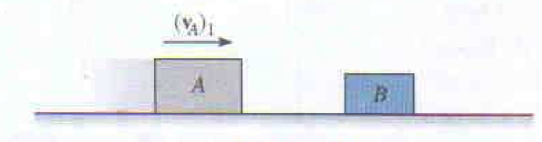



Fig. 15-18

# PROBLEMAS

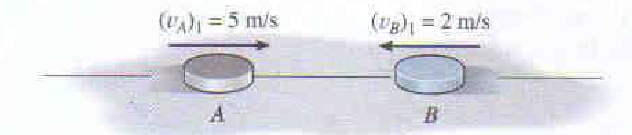
**15-55.** Una bola de marfil con masa de 200 g es liberada del reposo a una altura de 400 mm por arriba de una superficie fija metálica muy grande. Si la bola rebota a una altura de 325 mm por arriba de la superficie, determine el coeficiente de restitución entre la bola y la superficie.

***15-56.** El bloque $A$ tiene masa de 3 kg y se está deslizando sobre una superficie rugosa horizontal a velocidad $(v_A)_1 = 2$ m/s cuando experimenta una colisión directa con el bloque $B$, que tiene masa de 2 kg y originalmete está en reposo. Si la colisión es perfectamente elástica ($e = 1$), determine la velocidad de cada bloque justo después de la colisión y la distancia entre los bloques cuando dejan de deslizarse. El coeficiente de fricción cinética entre los bloques y el plano es $\mu_k = 0.3$.



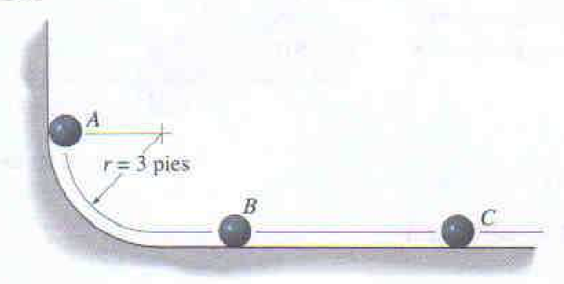

Prob. 15–56

**15-57.** El disco $A$ tiene masa de 2 kg y se desliza hacia adelante sobre la superficie *lisa* con velocidad $(v_A)_1 = 5$ m/s cuando golpea al disco $B$ de 4 kg, el cual se desliza hacia $A$ a $(v_B)_1 = 2$ m/s, con un impacto central directo. Si el coeficiente de restitución entre los discos es $e = 0.4$, calcule las velocidades de $A$ y $B$ justo después de la colisión.




Prob. 15–57

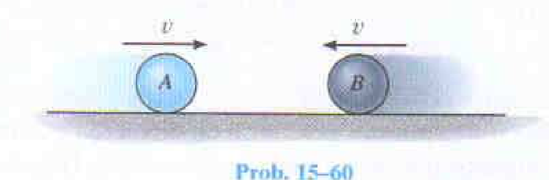
**15-58.** Las tres bolas pesan cada una 0.5 lb y tienen coeficiente de restitución $e = 0.85$. Si la bola $A$ es liberada del reposo y golpea a la bola $B$ y luego la bola $B$ golpea a la bola $C$, determine la velocidad de cada bola después que ocurre la segunda colisión. Las bolas se deslizan sin fricción.




Prob. 15–58

**15-59.** Si dos discos $A$ y $B$ tienen la misma masa y están sometidos a un impacto central directo de manera tal que la colisión es perfectamente elástica ($e = 1$), pruebe que la energía cinética antes de la colisión es igual a la energía cinética después de la colisión. La superficie sobre la cual se deslizan los discos es lisa.

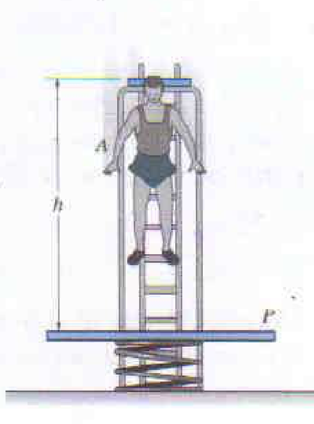
***15-60.** Cada bola tiene masa $m$ y el coeficiente de restitución entre ellas es $e$. Si se acercan entre sí a velocidad $v$, determine su rapidez después de la colisión. También determine su velocidad común cuando alcanzan el estado de deformación máxima. Desprecie el tamaño de cada bola.




Prob. 15–60

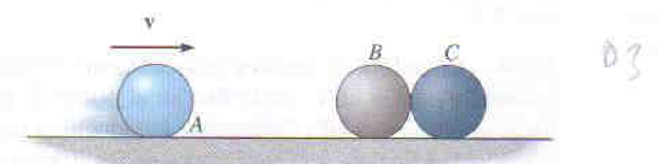
**15-61.** El hombre $A$ tiene un peso de 175 lb y salta del reposo hasta una altura $h = 8$ pies sobre una plataforma $P$ con peso de 60 lb. La plataforma está montada en un resorte que tiene rigidez $k = 200$ lb/pie. Determine (a) las velocidades de $A$ y $P$ justo después del impacto, y (b) la compresión máxima impartida al resorte por el impacto. Suponga que el coeficiente de restitución entre el hombre y la plataforma es $e = 0.6$, y que el hombre se mantiene rígido durante el movimiento.

**15-62.** El hombre $A$ tiene un peso de 100 lb y salta del reposo sobre una plataforma $P$ cuyo peso es de 60 lb. La plataforma está montada en un resorte que tiene rigidez $k = 200$ lb/pie. Si el coeficiente de restitución entre el hombre y la plataforma es $e = 0.6$, y el hombre se mantiene rígido durante el movimiento, determine la altura $h$ requerida del salto si la compresión máxima del resorte debe ser de 2 pies.



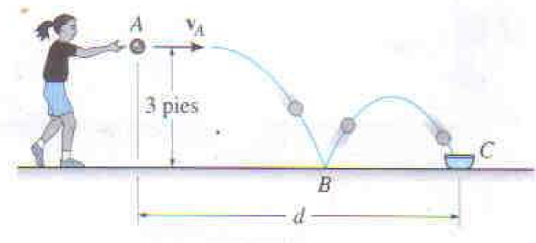

Probs. 15–61/62

**15-63.** Las tres bolas tienen la misma masa $m$. Si $A$ tiene rapidez $v$ justo antes de una colisión directa con $B$, determine la rapidez de $C$ después de la colisión. El coeficiente de restitución entre cada bola es $e$. Desprecie el tamaño de cada bola.




Prob. 15–63

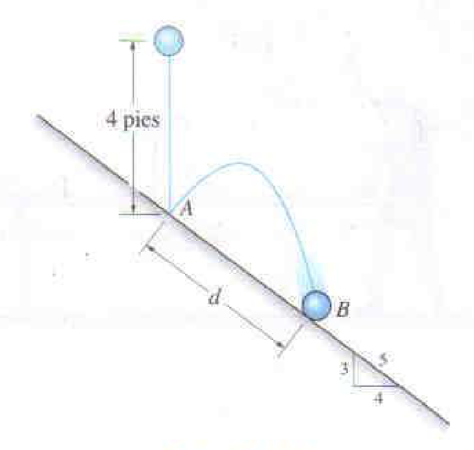
*15-64. Si la niña lanza la pelota con velocidad horizontal de 8 pies/s, determine la distancia $d$ tal que la pelota rebote una vez sobre la superficie lisa y luego entre al tazón ubicado en $C$. Considere $e = 0.8$.




Prob. 15–64

**15-65.** La bola de 1 lb se libera del reposo y cae una distancia de 4 pies antes de golpear el plano liso en el punto $A$. Si $e = 0.8$, determine la distancia $d$ a donde la bola volverá a golpear el plano en el punto $B$.

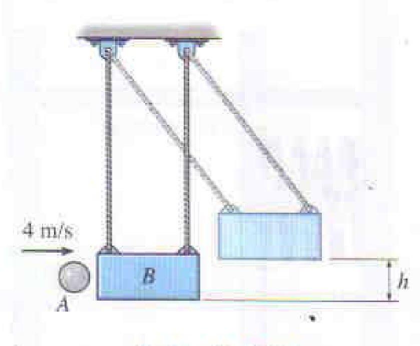
**15-66.** La bola de 1 lb se libera del reposo y cae una distancia de 4 pies antes de golpear el plano liso en el punto $A$. Si la bola rebota y en $t = 0.5$ s de nuevo golpea el plano en el punto $B$, determine el coeficiente de restitución $e$ entre la bola y el plano. ¿Cuál es la distancia $d$?




Probs. 15–65/66

**15-67.** La bola de 2 kg es lanzada al bloque suspendido de 20 kg con velocidad de 4 m/s. Si el coeficiente de restitución entre la bola y el bloque es $e = 0.8$, determine la altura máxima $h$ a la que el bloque oscilará antes de detenerse momentáneamente.

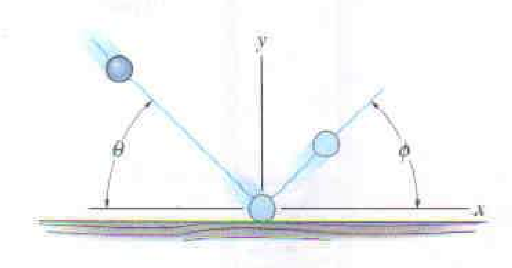
*15-68. La bola de 2 kg es lanzada al bloque suspendido de 20 kg con velocidad de 4 m/s. Si el tiempo de impacto entre la bola y el bloque es de 0.005 s, determine la fuerza normal promedio ejercida sobre el bloque durante este tiempo. Considere $e = 0.8$.




Probs. 15–67/68

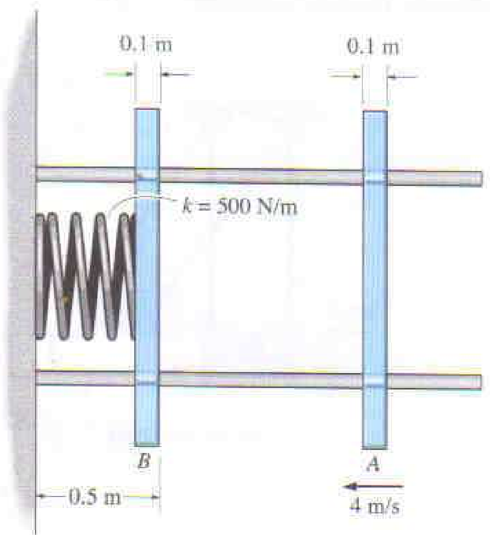
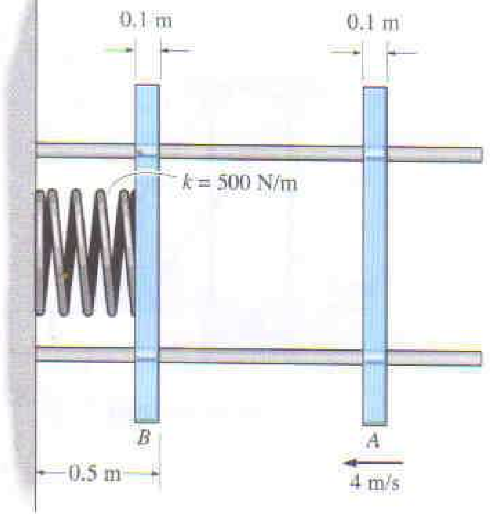
**15-69.** Una bola es lanzada sobre un piso rugoso a un ángulo $\theta$. Si rebota a un ángulo $\phi$ y el coeficiente de fricción cinética es $\mu$, determine el coeficiente de restitución $e$. Desprecie el tamaño de la bola. *Sugerencia*: Muestre que durante el impacto los impulsos promedio en las direcciones $x$ y $y$ están relacionados por $I_x = \mu I_y$. Como el tiempo de impacto es el mismo, $F_x\Delta t = \mu F_y\Delta t$ o $F_x = \mu F_y$.

**15-70.** Una bola es lanzada sobre un piso rugoso a un ángulo $\theta = 45°$. Si rebota con el mismo ángulo $\phi = 45°$, determine el coeficiente de fricción cinética entre el piso y la bola. El coeficiente de restitución es $e = 0.6$. *Sugerencia*: Muestre que durante el impacto los impulsos promedio en las direcciones $x$ y $y$ están relacionados por $I_x = \mu I_y$. Como el tiempo de impacto es el mismo, $F_x\Delta t = \mu F_y\,\Delta t$ o $F_x = \mu F_y$.



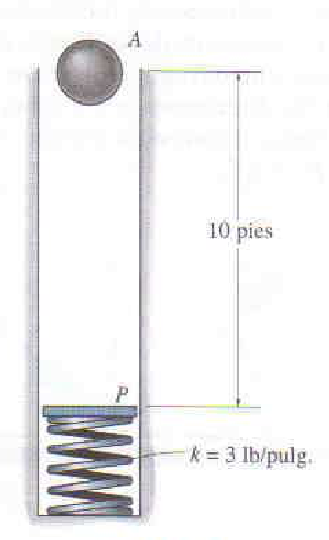

Probs. 15–69/70

**15-71.** Las placas $A$ y $B$ tienen cada una masa de 4 kg y están restringidas a moverse a lo largo de las guías lisas. Si el coeficiente de restitución entre las placas es $e = 0.7$, determine (a) la rapidez de ambas placas justo después de la colisión, y (b) la compresión máxima del resorte. La placa $A$ tiene velocidad de 4 m/s justo antes de golpear a $B$. La placa $B$ se encuentra originalmente en reposo y el resorte no está estirado.


Prob. 15-71

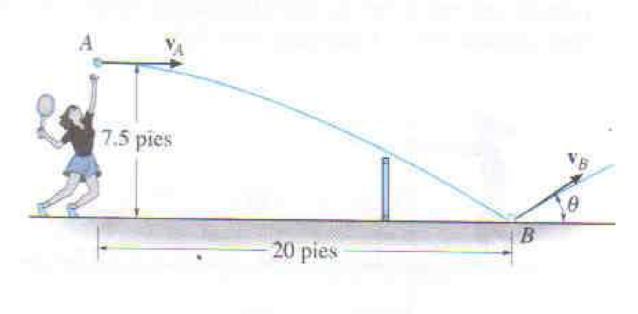
***15-72.** La bola de 8 lb es liberada del reposo a 10 pies de la superficie de una placa plana $P$ que pesa 6 lb. Determine la compresión máxima en el resorte si el impacto es perfectamente elástico.




Prob. 15-72

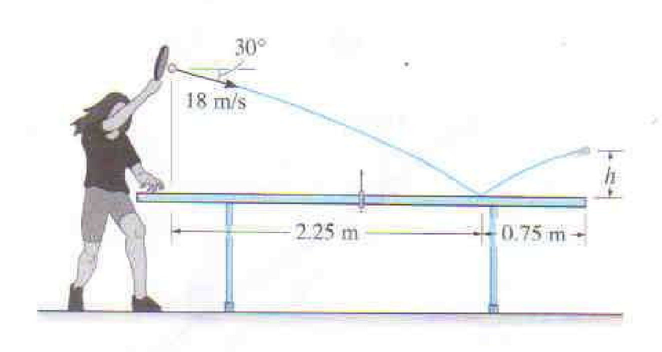
**15-73.** Se observa que una pelota de tenis, al ser servida horizontalmente 7.5 pies por arriba del campo, golpea el suelo liso en el punto $B$ a 20 pies de distancia. Determine la velocidad inicial $\mathbf{v}_A$ de la pelota y su velocidad $\mathbf{v}_B$ (y $\theta$) justo después que toca el campo en $B$. Considere $e = 0.7$.

**15-74.** La pelota de tenis es golpeada con velocidad horizontal $\mathbf{v}_A$, pega en el suelo liso en el punto $B$, y rebota hacia arriba a $\theta = 30°$. Determine la velocidad inicial $\mathbf{v}_A$, la velocidad final $\mathbf{v}_B$, y el coeficiente de restitución entre la pelota y el suelo.



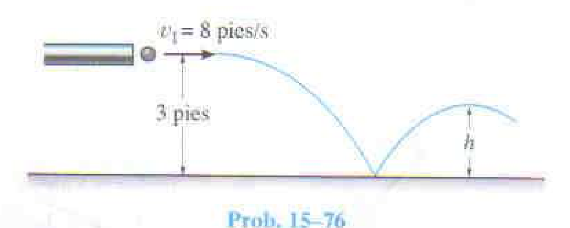

Probs. 15-73/74

**15-75.** La pelota de ping-pong tiene masa de 2 g. Si es golpeada con la velocidad que se muestra, determine a qué altura $h$ se eleva por arriba del extremo de la mesa lisa después del rebote. Considere $e = 0.8$.



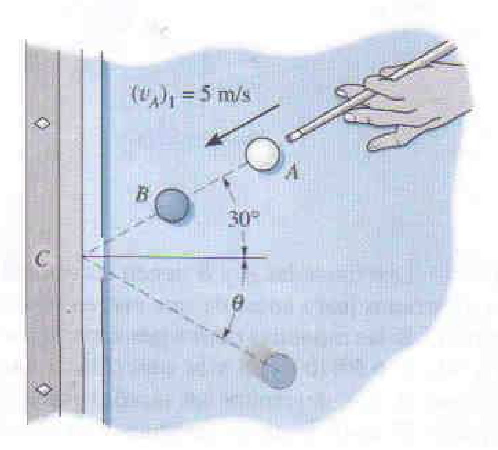

Prob. 15-75

*15-76. La bola es eyectada del tubo con velocidad horizontal $v_1 = 8$ pies/s como se muestra. Si el coeficiente de restitución entre la bola y el suelo es $e = 0.8$, determine (a) la velocidad de la bola justo después que rebota en el suelo, y (b) la altura máxima a la que la bola se eleva después del primer rebote.



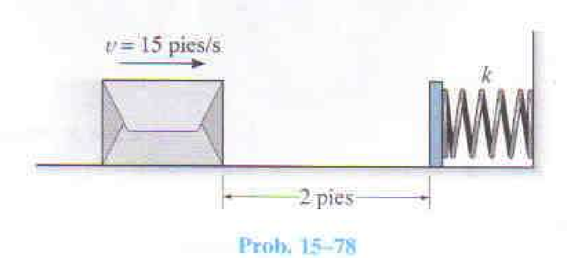

Prob. 15–76

15-77. A la bola $A$ se le da una velocidad inicial $(v_A)_1 = 5$ m/s. Si sufre una colisión directa con la bola $B (e = 0.8)$, determine la velocidad de $B$ y el ángulo $\theta$ justo después de rebotar en la baranda ubicada en $C (e' = 0.6)$. Cada bola tiene masa de 0.4 kg. Suponga que las bolas se deslizan sin rodar.



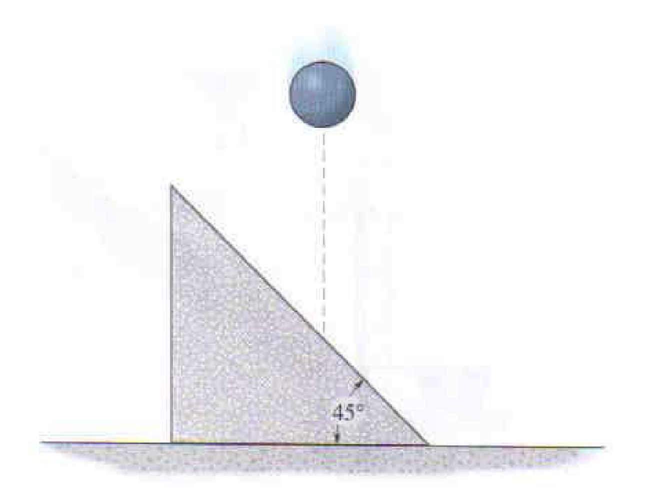

Prob. 15–77

15-78. La caja de 20 lb se desliza sobre la superficie para la cual $\mu_k = 0.3$. La caja tiene velocidad $v = 15$ pies/s cuando está a 2 pies de la placa. Si golpea la placa lisa, que tiene un peso de 10 lb y es mantenida en posición por un resorte no estirado con $k = 400$ lb/pie, determine la compresión máxima impartida al resorte. Considere $e = 0.8$ entre la caja y la placa. Suponga que la placa se desliza suavemente.



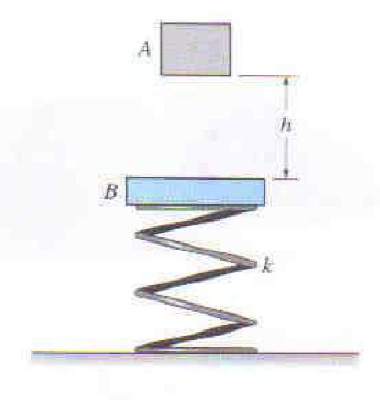

Prob. 15–78

15-79. La esfera de masa $m$ cae y golpea el bloque triangular con velocidad vertical $v$. Si el bloque descansa sobre una superficie lisa y tiene masa de $3m$, determine su velocidad justo después de la colisión. El coeficiente de restitución es $e$.



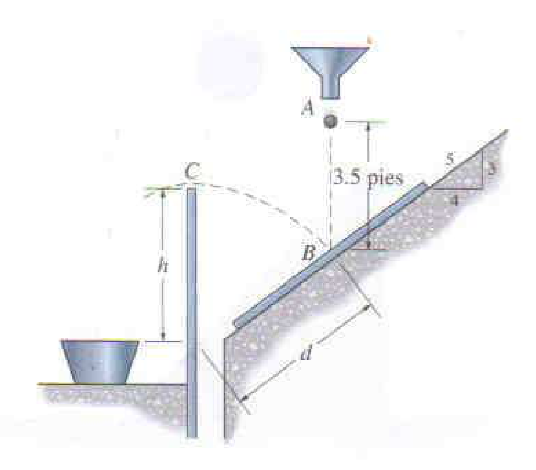

Prob. 15–79

*15-80. El bloque $A$, con masa $m$, es liberado del reposo, cae una distancia $h$ y golpea la placa $B$ que tiene masa de $2\,m$. Si el coeficiente de restitución entre $A$ y $B$ es $e$, determine la velocidad de la placa justo después de la colisión. El resorte tiene rigidez $k$.



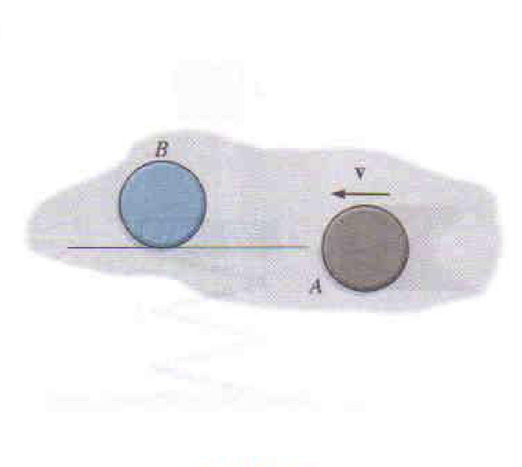

Prob. 15–80

**15-81.** Antes que un arándano pueda llegar al plato del lector, debe pasar una prueba de rebote que clasifica su calidad. Si los arándanos con $e \geq 0.8$ van a ser aceptados, determine las dimensiones $d$ y $h$ necesarias para la barrera de modo que cuando un arándano caiga del reposo en $A$, pegue contra la placa en $B$ y rebote sobre la barrera en $C$.



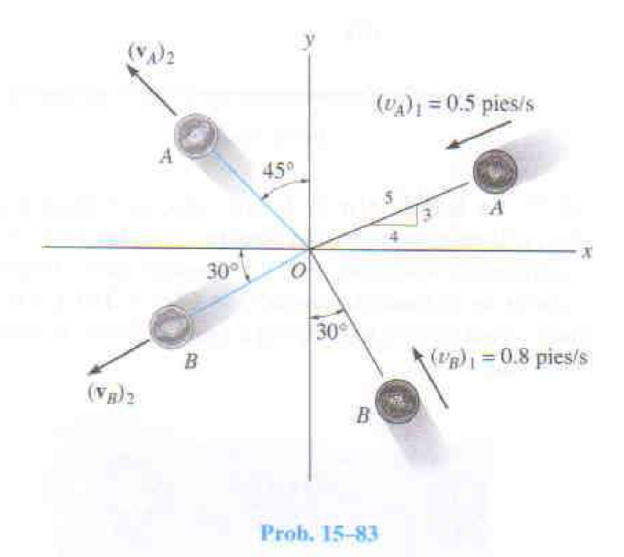

Prob. 15-81

**15-82.** Si el disco $A$ se está deslizando a lo largo de la tangente al disco $B$ y golpea a $B$ con velocidad $\mathbf{v}$, determine la velocidad de $B$ después de la colisión y calcule la pérdida de energía cinética durante la colisión. Desprecie la fricción. El disco $B$ está originalmente en reposo. El coeficiente de restitución es $e$ y cada disco tiene el mismo tamaño y masa $m$.



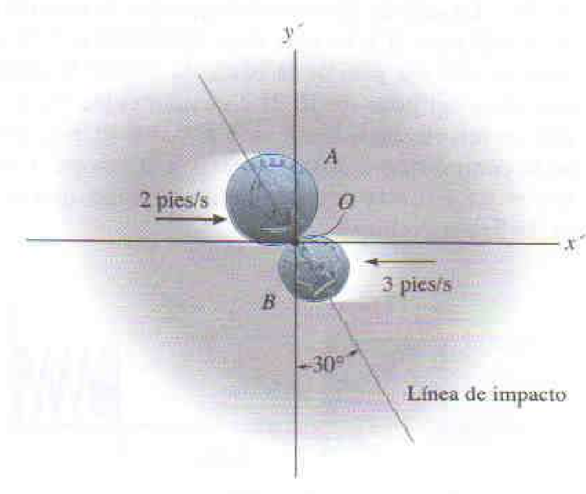

Prob. 15-82

**15-83.** Dos monedas lisas $A$ y $B$, cada una con igual masa, se deslizan sobre una superficie lisa con el movimiento mostrado. Determine la rapidez de cada moneda después de la colisión si se mueven a lo largo de las trayectorias de choque. *Sugerencia*: Como la línea de impacto no ha sido definida, aplique la conservación del momentum a lo largo de los ejes $x$ y $y$, respectivamente.




Prob. 15-83

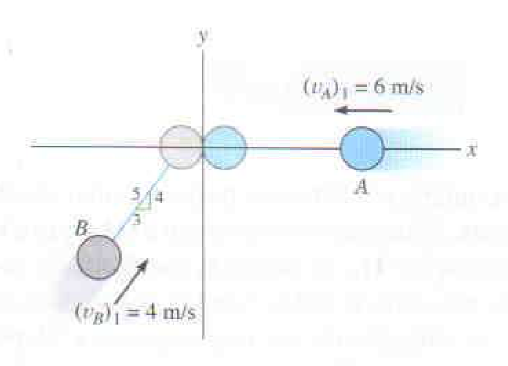
***15-84.** Dos monedas $A$ y $B$ tienen las velocidades iniciales mostradas justo antes de que entren en colisión en el punto $O$. Si las monedas tienen pesos de $W_A = 13.2(10^{-3})$ lb y $W_B = 6.60(10^{-3})$ lb y la superficie sobre la que se deslizan es lisa, determine su rapidez justo después del impacto. El coeficiente de restitución es $e = 0.65$.




Prob. 15-84

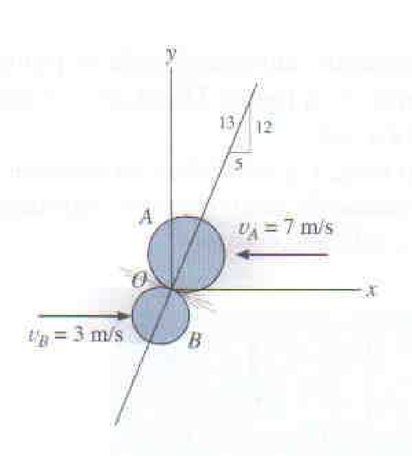
**15-85.** Dos discos lisos $A$ y $B$ tienen cada uno masa de 0.5 kg. Si ambos discos se están moviendo con las velocidades mostradas cuando entran en colisión, determine sus velocidades finales justo después de la colisión. El coeficiente de restitución es $e = 0.75$.

**15-86.** Dos discos lisos $A$ y $B$ tienen cada uno masa de 0.5 kg. Si ambos se están moviendo con las velocidades mostradas cuando entran en colisión, determine el coeficiente de restitución entre ellos si después de la colisión $B$ viaja a lo largo de una línea a 30° en sentido contrario al de las manecillas del reloj desde el eje $y$.

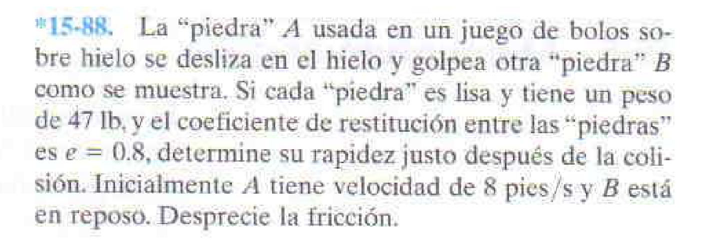



Probs. 15–85/86

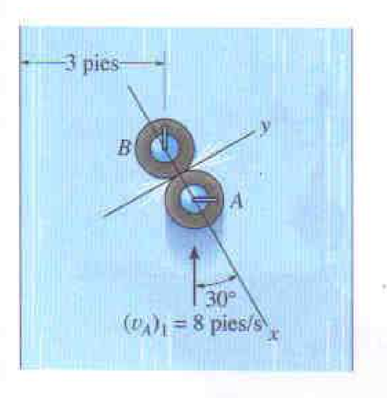
**15-87.** Dos discos lisos $A$ y $B$ tienen las velocidades iniciales mostradas antes de entrar en colisión en $O$. Si sus masas son $m_A = 8$ kg y $m_B = 6$ kg, respectivamente, determine su rapidez justo después del impacto. El coeficiente de restitución es $e = 0.5$.




Prob. 15–87

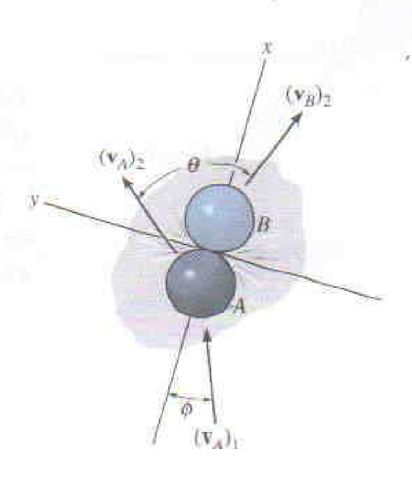


***15-88.** La "piedra" $A$ usada en un juego de bolos sobre hielo se desliza en el hielo y golpea otra "piedra" $B$ como se muestra. Si cada "piedra" es lisa y tiene un peso de 47 lb, y el coeficiente de restitución entre las "piedras" es $e = 0.8$, determine su rapidez justo después de la colisión. Inicialmente $A$ tiene velocidad de 8 pies/s y $B$ está en reposo. Desprecie la fricción.




Prob. 15–88

**15-89.** La bola $A$ golpea a la bola $B$ con velocidad inicial de $(\mathbf{v}_A)_1$ como se muestra. Si ambas bolas tienen igual masa y la colisión es perfectamente elástica, determine el ángulo $\theta$ después de la colisión. La bola $B$ está originalmente en reposo. Desprecie el tamaño de cada bola.




Prob. 15–89

## 15.5 Momentum angular

El *momentum angular* de una partícula con respecto al punto $O$ se define como el "momento" del momentum lineal con respecto al punto $O$ de la partícula. Como este concepto es análogo a encontrar el momento de una fuerza con respecto a un punto, el momento angular, $\mathbf{H}_O$, es llamado a veces *momento de un momentum*.

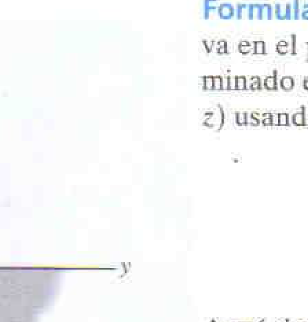
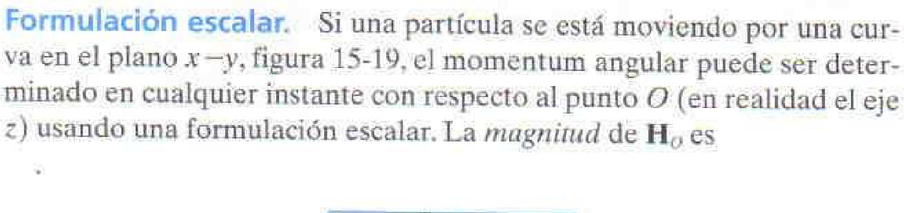



Fig. 15–19

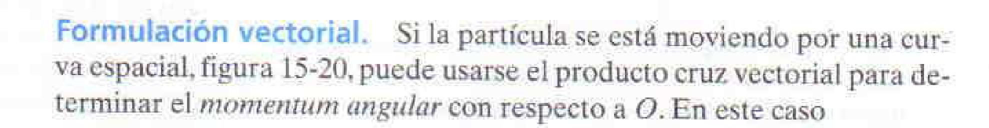
**Formulación escalar.** Si una partícula se está moviendo por una curva en el plano $x-y$, figura 15-19, el momentum angular puede ser determinado en cualquier instante con respecto al punto $O$ (en realidad el eje $z$) usando una formulación escalar. La *magnitud* de $\mathbf{H}_O$ es



$$(H_O)_z = (d)(mv) \qquad (15\text{–}12)$$

Aquí $d$ es el brazo de momento o distancia perpendicular desde $O$ hasta la línea de acción de $m\mathbf{v}$. Unidades comunes para $(H_O)_z$ son $\text{kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}$ o $\text{slug} \cdot \text{pie}^2/\text{s}$. La *dirección* de $\mathbf{H}_O$ es definida mediante la regla de la mano derecha. Como se muestra, el doblez de los dedos de la mano derecha indica el sentido de rotación de $m\mathbf{v}$ con respecto a $O$, por lo que en este caso el pulgar (o $\mathbf{H}_O$) está dirigido perpendicularmente al plano $x-y$ a lo largo del eje $z$ positivo.

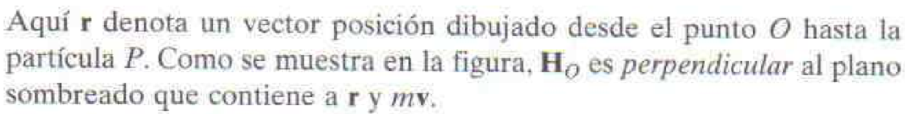
**Formulación vectorial.** Si la partícula se está moviendo por una curva espacial, figura 15-20, puede usarse el producto cruz vectorial para determinar el *momentum angular* con respecto a $O$. En este caso



$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v} \qquad (15\text{–}13)$$

Fig. 15–20

Aquí $\mathbf{r}$ denota un vector posición dibujado desde el punto $O$ hasta la partícula $P$. Como se muestra en la figura, $\mathbf{H}_O$ es *perpendicular* al plano sombreado que contiene a $\mathbf{r}$ y $m\mathbf{v}$.



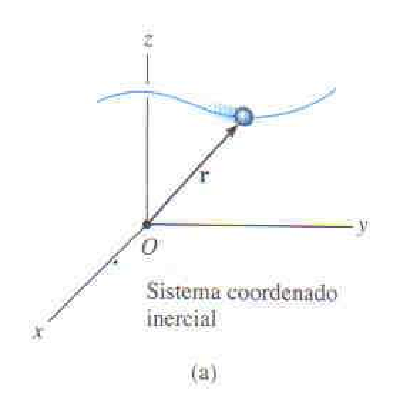
Para evaluar el producto cruz, $\mathbf{r}$ y $m\mathbf{v}$ deben expresarse en términos de sus componentes cartesianas, de manera que el momentum angular es determinado evaluando el determinante:

$$\mathbf{H}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ r_x & r_y & r_z \\ mv_x & mv_y & mv_z \end{vmatrix} \qquad (15\text{–}14)$$

## 15.6 Relación entre el momento de una fuerza y el momentum angular

Los momentos con respecto al punto $O$ de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula en la figura 15-21$a$ pueden ser relacionados al momentum angular de la partícula usando la ecuación de movimiento. Si la masa de la partícula es constante, podemos escribir

$$\Sigma \mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}}$$




(a)

**Fig. 15–21**

Los momentos de las fuerzas con respecto al punto $O$ se pueden obtener efectuando una multiplicación de producto cruz a cada lado de esta ecuación mediante el vector posición $\mathbf{r}$, el cual se mide en el marco de referencia inercial $x, y, z$. Tenemos

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \Sigma \mathbf{F} = \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}}$$

Del apéndice C, la derivada de $\mathbf{r} \times m\mathbf{v}$ puede escribirse como

$$\dot{\mathbf{H}}_O = \frac{d}{dt}(\mathbf{r} \times m\mathbf{v}) = \dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} + \mathbf{r} \times m\dot{\mathbf{v}}$$

El primer término en el lado derecho, $\dot{\mathbf{r}} \times m\mathbf{v} = m(\dot{\mathbf{r}} \times \dot{\mathbf{r}}) = \mathbf{0}$, ya que el producto cruz de un vector consigo mismo es cero. Por consiguiente, la ecuación anterior toma la forma

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \qquad (15\text{–}15)$$

Esta ecuación establece que *el momento resultante con respecto al punto O de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula es igual a la razón de cambio con respecto al tiempo del momentum angular de la partícula con respecto al punto O*. Este resultado es similar a la ecuación 15-1, esto es,

$$\Sigma \mathbf{F} = \dot{\mathbf{L}} \qquad (15\text{–}16)$$

Aquí $\mathbf{L} = m\mathbf{v}$, por lo que *la fuerza resultante que actúa sobre la partícula es igual a la razón de cambio con respecto al tiempo del momentum lineal de la partícula.*

A partir de las derivaciones, se observa que las ecuaciones 15-15 y 15-16 son otra manera de establecer la segunda ley del movimiento de Newton. En otras secciones de este libro se mostrará que esas ecuaciones tienen muchas aplicaciones prácticas cuando se amplían y se usan en la solución de problemas que implican un sistema de partículas o un cuerpo rígido.

**Sistema de partículas.** Una ecuación con la misma forma que la ecuación 15-15 puede ser derivada para el sistema de partículas mostrado en la figura 15-21*b*. Las fuerzas que actúan sobre la partícula *i*-ésima arbitraria del sistema consisten en una *fuerza externa* resultante $\mathbf{F}_i$ y en una *fuerza interna* resultante $\mathbf{f}_i$. Al expresar los momentos de estas fuerzas con respecto al punto $O$, usando la forma de la ecuación 15-15, tenemos

$$(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) + (\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i) = (\dot{\mathbf{H}}_i)_O$$

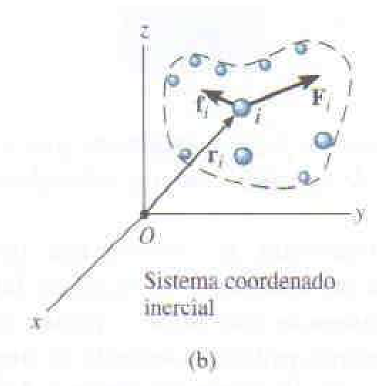
Aquí $\mathbf{r}_i$ es el vector posición trazado desde el origen $O$ de un marco de referencia inercial hasta la *i*-ésima partícula, y $(\dot{\mathbf{H}}_i)_O$ es la razón de cambio con respecto al tiempo del momento angular de la partícula *i*-ésima con respecto a $O$. Ecuaciones similares pueden ser escritas para cada una de las otras partículas del sistema. Cuando los resultados son sumados vectorialmente, el resultado es

$$\Sigma(\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i) + \Sigma(\mathbf{r}_i \times \mathbf{f}_i) = \Sigma(\dot{\mathbf{H}}_i)_O$$

El segundo término es cero ya que las fuerzas internas ocurren en pares iguales colineales pero opuestos, y por consiguiente el momento de cada par con respecto al punto $O$ es cero. Cancelando la notación con subíndices, la ecuación anterior puede ser escrita en forma simplificada como

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \qquad (15\text{–}17)$$

la cual establece que *la suma de los momentos con respecto al punto O de todas las fuerzas externas actuando sobre un sistema de partículas es igual a la razón de cambio con respecto al tiempo del momentum angular total del sistema con respecto al punto O*. Aunque $O$ ha sido elegido aquí como el origen de coordenadas, en realidad puede representar cualquier *punto fijo* del marco inercial de referencia.




(b)

Fig. 15–21

**EJEMPLO 15.12**

La caja mostrada en la figura 15-22*a* tiene masa $m$ y está viajando hacia abajo por la rampa lisa circular de tal forma que cuando está en el ángulo $\theta$ tiene rapidez $v$. Determine su momentum angular con respecto al punto $O$ en este instante y la razón del incremento de su rapidez, es decir, $a_t$.

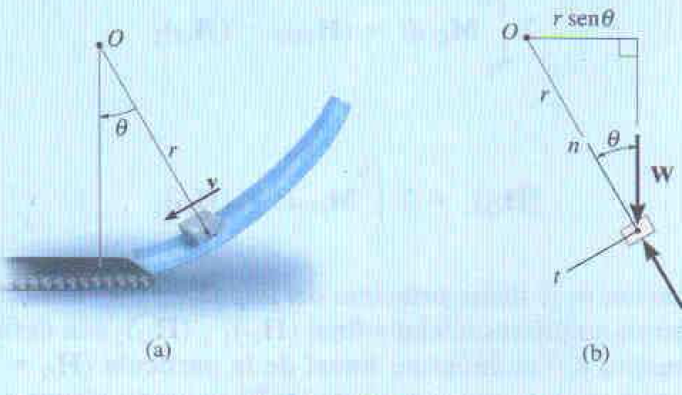



Fig. 15-22

**Solución**

Como **v** es tangente a la trayectoria, aplicando la ecuación 15-12, el momentum angular es

$$H_O = rmv \downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

La razón del incremento en su rapidez ($dv/dt$) se puede encontrar aplicando la ecuación 15-15. A partir del diagrama de cuerpo libre del bloque, figura 15-22*b*, se observa que sólo el peso $W = mg$ contribuye un momento con respecto al punto $O$. Tenemos

$$\circlearrowright + \Sigma M_O = \dot{H}_O; \qquad mg(r \operatorname{sen} \theta) = \frac{d}{dt}(rmv)$$

Como $r$ y $m$ son constantes,

$$mgr \operatorname{sen} \theta = rm\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{dt} = g \operatorname{sen} \theta \qquad \textit{Resp.}$$

Este mismo resultado puede, por supuesto, ser obtenido a partir de la ecuación de movimiento aplicada en la dirección tangencial, figura 15-22*b*, es decir,

$$+\swarrow \Sigma F_t = ma_t; \qquad mg \operatorname{sen} \theta = m\left(\frac{dv}{dt}\right)$$

$$\frac{dv}{dt} = g \operatorname{sen} \theta \qquad \textit{Resp.}$$

## 15.7 Principios del impulso angular y del momentum angular

Solo hasta aquí

**Principio del impulso y momentum angular.** Si la ecuación 15-15 es reescrita en la forma $\Sigma \mathbf{M}_O\, dt = d\mathbf{H}_O$ e integrada, tenemos, suponiendo que en el tiempo $t = t_1, \mathbf{H}_O = (\mathbf{H}_O)_1$ y en el tiempo $t = t_2, \mathbf{H}_O = (\mathbf{H}_O)_2$,

$$\Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\, dt = (\mathbf{H}_O)_2 - (\mathbf{H}_O)_1$$

o bien

$$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\, dt = (\mathbf{H}_O)_2 \tag{15–18}$$

A esta ecuación se le llama *principio del impulso y momentum angular*. Los momentos angulares inicial y final $(\mathbf{H}_O)_1$ y $(\mathbf{H}_O)_2$ son definidos como el momento del momentum lineal de la partícula ($\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$) en los instantes $t_1$ y $t_2$, respectivamente. El segundo término del lado izquierdo, $\Sigma \int \mathbf{M}_O\, dt$, se denomina *impulso angular*. Este término es determinado integrando, con respecto al tiempo, los momentos de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula en el periodo $t_1$ a $t_2$. Como el momento de una fuerza con respecto al punto $O$ es $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, el impulso angular puede ser expresado en forma vectorial como

$$\text{impulso angular} = \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\, dt = \int_{t_1}^{t_2} (\mathbf{r} \times \mathbf{F})\, dt \tag{15–19}$$

Aquí $\mathbf{r}$ es un vector posición que se extiende desde el punto $O$ hasta cualquier punto sobre la línea de acción de $\mathbf{F}$.

De manera similar, usando la ecuación 15-18, el principio del impulso y momentum angular para un sistema de partículas puede ser escrito como

$$\Sigma(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\, dt = \Sigma(\mathbf{H}_O)_2 \tag{15–20}$$

Aquí los términos primero y tercero representan los momentos angulares del sistema de partículas $[\Sigma \mathbf{H}_O = \Sigma(\mathbf{r}_i \times m\mathbf{v}_i)]$ en los instantes $t_1$ y $t_2$. El segundo término es la suma de los impulsos angulares dados a todas las partículas desde $t_1$ hasta $t_2$. Recuerde que esos impulsos son creados sólo por los momentos de las fuerzas externas actuando sobre el sistema donde, para la partícula $i$-ésima, $\mathbf{M}_O = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i$.

**Formulación vectorial.** Usando los principios del impulso y momentum angular, es posible escribir dos ecuaciones que definan el movimiento de la partícula, es decir, las ecuaciones 15-3 y 15-18, reescritas como

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt = m\mathbf{v}_2$$
$$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\,dt = (\mathbf{H}_O)_2 \qquad (15\text{–}21)$$

**Formulación escalar.** En general, las ecuaciones anteriores pueden ser expresadas en forma de componentes $x, y, z$, dando un total de seis ecuaciones escalares independientes. Si la partícula está confinada a moverse en el plano $x-y$, entonces pueden ser escritas tres ecuaciones escalares independientes para expresar el movimiento; éstas son

$$m(v_x)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} F_x\,dt = m(v_x)_2$$
$$m(v_y)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt = m(v_y)_2 \qquad (15\text{–}22)$$
$$(H_O)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} M_O\,dt = (H_O)_2$$

Las primeras dos de estas ecuaciones representan el principio del impulso y momentum lineal en las direcciones $x$ y $y$, lo cual ha sido analizado en la sección 15.1, y la tercera ecuación representa el principio del impulso y momentum angular con respecto al eje $z$.

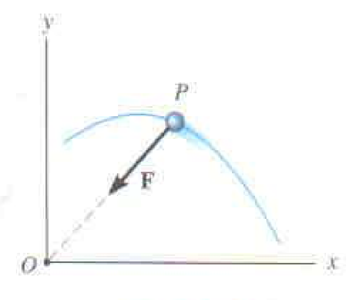



Fig. 15–23

**Conservación del momentum angular.** Cuando los impulsos angulares que actúan sobre una partícula son todos cero durante el tiempo $t_1$ a $t_2$, la ecuación 15-18 se reduce a la siguiente forma simplificada:

$$(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2 \qquad (15\text{–}23)$$

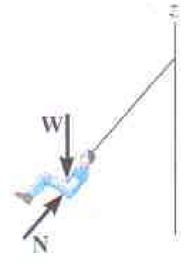
Esta ecuación se conoce como la *conservación del momentum angular*. Establece que de $t_1$ a $t_2$ el momentum angular de la partícula permanece constante. Es claro que si ningún impulso externo se aplica a la partícula, el momentum lineal y el momentum angular se conservarán. Sin embargo, en algunos casos, el momentum angular de la partícula se conservará y el momentum lineal no. Un ejemplo de esto ocurre cuando la partícula está sometida *sólo* a una *fuerza central* (vea la Sec. 13.7). Como se muestra en la figura 15-23, la fuerza impulsiva central **F** siempre está dirigida hacia el punto $O$ al moverse la partícula a lo largo de la trayectoria. Por consiguiente, el impulso angular (momento) creado por **F** con respecto al eje $z$ que pasa por el punto $O$ es siempre cero, y por tanto el momentum angular de la partícula se conserva con respecto a este eje.

A partir de la ecuación 15-20, también podemos escribir la conservación del momentum angular para un sistema de partículas, esto es,

$$\Sigma(\mathbf{H}_O)_1 = \Sigma(\mathbf{H}_O)_2 \qquad (15\text{–}24)$$

En este caso la suma debe incluir los momentos angulares de todas las partículas presentes en el sistema.






Si se desprecia la resistencia del aire, los pasajeros sentados en estas sillas voladoras están sometidos a la conservación del momentum angular con respecto al eje de rotación. Como se observa en el diagrama de cuerpo libre, la línea de acción de la fuerza normal **N** del asiento sobre el pasajero pasa por el eje, y el peso **W** del pasajero es paralelo a él. Ningún impulso angular actúa alrededor del eje $z$.

## PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

Al aplicar los principios del impulso y momentum angular, o la conservación del momentum angular, se sugiere usar el siguiente procedimiento.

### *Diagrama de cuerpo libre.*

- Dibuje el diagrama de cuerpo libre de la partícula para determinar cualquier eje con respecto al cual el momentum angular se conserve. Para que esto ocurra, los momentos de las fuerzas (o impulsos) deben ser paralelos o pasar por el eje para generar un momento cero en el periodo $t_1$ a $t_2$.
- La dirección y el sentido de las velocidades inicial y final de la partícula también deben ser establecidos.
- Un procedimiento alternativo será dibujar los diagramas de impulso y momentum angular para la partícula.

### *Ecuaciones de momentum angular.*

- Aplique el principio del impulso y momentum angular, $(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O \, dt = (\mathbf{H}_O)_2$, o si es apropiado, la conservación del momentum angular, $(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2$.

## EJEMPLO 15.13

El bloque de 5 kg de tamaño insignificante descansa sobre el plano liso horizontal, figura 15-24*a*, y está unido en $A$ a una barra esbelta de masa también insignificante. La barra está unida a una junta esférica en el punto $B$. Si un momento $M = (3t)$ N · m, donde $t$ está en segundos, se aplica a la barra y una fuerza horizontal $P = 10$ N se aplica al bloque, determine la rapidez del bloque en 4 s partiendo del reposo.

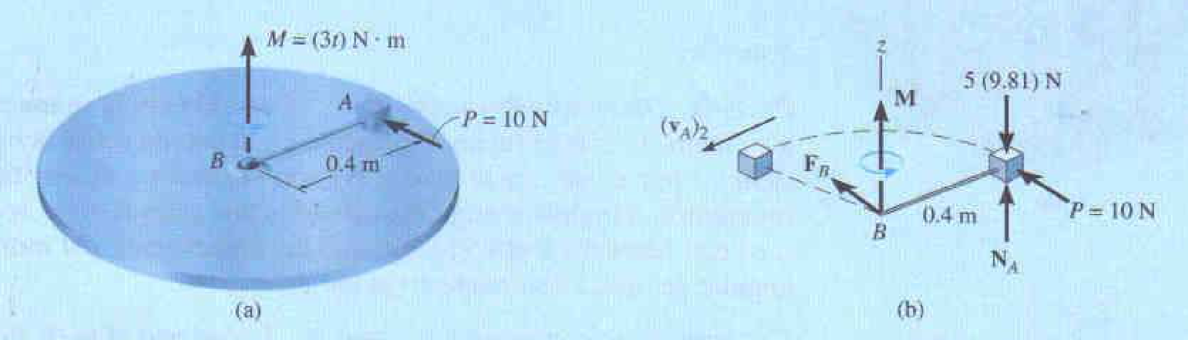



Fig. 15-24

### Solución

***Diagrama de cuerpo libre.*** Si consideramos el sistema de barra y bloque, figura 15-24*b*, entonces la reacción de fuerza resultante $\mathbf{F}_B$ en la junta esférica puede ser eliminada del análisis aplicando el principio del impulso y momentum angular con respecto al eje $z$. Si se hace esto, los impulsos angulares creados por el peso y la reacción normal $\mathbf{N}_A$ también son eliminados, ya que actúan paralelamente al eje $z$ y por tanto crean momento cero con respecto a este eje.

***Principio del impulso y momentum angular.***

$$(H_z)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} M_z\, dt = (H_z)_2$$

$$(H_z)_1 + \int_{t_1}^{t_2} M\, dt + r_{BA}P(\Delta t) = (H_z)_2$$

$$0 + \int_0^4 3t\, dt + (0.4\text{ m})(10\text{ N})(4\text{ s}) = 5\text{ kg}(v_A)_2\,(0.4\text{ m})$$

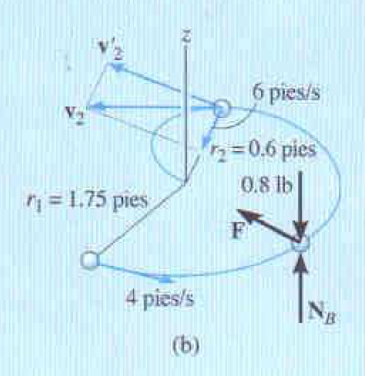
$$24 + 16 = 2(v_A)_2$$

$$(v_A)_2 = 20\text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

## EJEMPLO 15.14




(a)




(b)

**Fig. 15–25**

La bola $B$ de 0.8 lb mostrada en la figura 15-25$a$ está unida a una cuerda que pasa por un agujero situado en el punto $A$ de una mesa lisa. Cuando la bola se encuentra a $r_1 = 1.75$ pies del agujero, está girando alrededor de un círculo con rapidez $v_1 = 4$ pies/s. Al aplicar una fuerza $\mathbf{F}$, la cuerda es jalada hacia abajo por el agujero con rapidez constante $v_c = 6$ pies/s. Determine (a) la rapidez de la bola en el instante en que está a $r_2 = 0.6$ pies del agujero, y (b) el trabajo realizado por $\mathbf{F}$ al acortarse la distancia radial de $r_1$ a $r_2$. Desprecie el tamaño de la bola.

### Solución

***Parte (a) Diagrama de cuerpo libre.*** Cuando la bola se mueve de $r_1$ a $r_2$, figura 15-25$b$, la fuerza $\mathbf{F}$ presente en la cuerda sobre la bola pasa siempre por el eje $z$, y el peso y $\mathbf{N}_B$ son paralelos a él. Por tanto, los momentos, o impulsos angulares creados por estas fuerzas, son todos *cero* con respecto a este eje. Así que la conservación del momentum angular se aplica con respecto al eje $z$.

***Conservación del momentum angular.*** La velocidad $\mathbf{v}_2$ de la bola se resuelve en dos componentes. La componente radial, 6 pies/s, es conocida; sin embargo, produce un momentum angular cero con respecto al eje $z$. Así,

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_2$$

$$r_1 m_B v_1 = r_2 m_B v'_2$$

$$1.75 \text{ pies}\left(\frac{0.8 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}\right)4 = 0.6 \text{ pies}\left(\frac{0.8 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}\right)v'_2$$

$$v'_2 = 11.67 \text{ pies/s}$$

La rapidez de la bola es entonces

$$v_2 = \sqrt{(11.67)^2 + (6)^2}$$
$$= 13.1 \text{ pies/s}$$

***Parte (b).*** La única fuerza que efectúa trabajo sobre la bola es $\mathbf{F}$ (la fuerza normal y el peso no se mueven verticalmente). Las energías cinéticas inicial y final de la bola pueden ser determinadas de modo que a partir del principio del trabajo y la energía tenemos

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{0.8 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}\right)(4 \text{ pies/s})^2 + U_F = \frac{1}{2}\left(\frac{0.8 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}\right)(13.1 \text{ pies/s})^2$$

$$U_F = 1.94 \text{ pies}\cdot\text{lb}$$ *Resp.*

## EJEMPLO 15.15

El disco de 2 kg mostrado en la figura 15-26*a* descansa sobre una superficie lisa horizontal y está unido a una cuerda elástica que tiene rigidez $k_c = 20$ N/m y no está alargada inicialmente. Si al disco se le da una velocidad $(v_D)_1 = 1.5$ m/s, perpendicular a la cuerda, determine la razón con que la cuerda se está alargando y la rapidez del disco en el instante en que la cuerda está estirada 0.2 m.

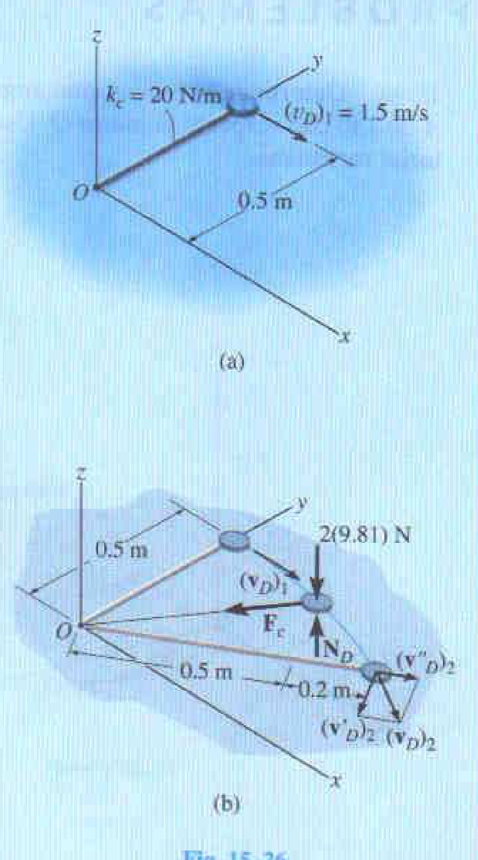



Fig. 15-26

### Solución

***Diagrama de cuerpo libre.*** Después que el disco ha sido lanzado, se desliza a lo largo de la trayectoria mostrada en la figura 15-26*b*. Por inspección, el momentum angular con respecto al punto *O* (o el eje *z*) se *conserva*, ya que ninguna de las fuerzas produce un impulso angular con respecto a este eje. Además, cuando la distancia es de 0.7 m, sólo la componente $(\mathbf{v}'_D)_2$ produce un momentum angular del disco con respecto a *O*.

***Conservación del momentum angular.*** La componente $(\mathbf{v}'_D)_2$ se puede obtener aplicando la conservación del momentum angular con respecto a *O* (el eje *z*), es decir,

$$(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2$$

$$r_1 m_D (v_D)_1 = r_2 m_D (v'_D)_2$$

$$(\circlearrowleft +) \qquad 0.5 \text{ m}(2 \text{ kg})(1.5 \text{ m/s}) = 0.7 \text{ m}(2 \text{ kg})(v'_D)_2$$

$$(v'_D)_2 = 1.07 \text{ m/s}$$

***Conservación de la energía.*** La rapidez del disco se puede obtener aplicando la ecuación de la conservación de la energía en el punto donde el disco fue lanzado y en el punto donde la cuerda está estirada 0.2 m.

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

$$\tfrac{1}{2}(2 \text{ kg})(1.5 \text{ m/s})^2 + 0 = \tfrac{1}{2}(2 \text{ kg})(v_D)_2^2 + \tfrac{1}{2}(20 \text{ N/m})(0.2 \text{ m})^2$$

Entonces,

$$(v_D)_2 = 1.36 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

Una vez determinada $(v_D)_2$ y su componente $(v'_D)_2$, la razón de alargamiento de la cuerda $(v''_D)_2$ se calcula con el teorema de Pitágoras,

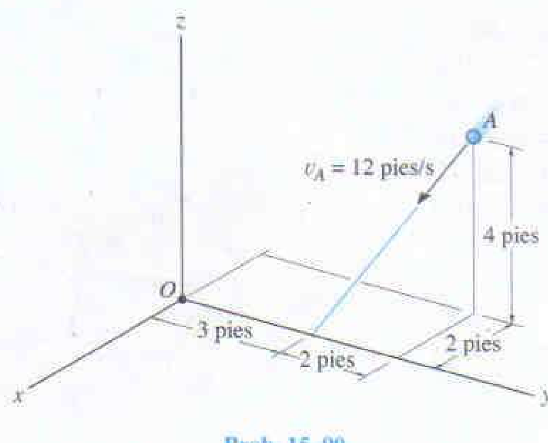
$$(v''_D)_2 = \sqrt{(v_D)_2^2 - (v'_D)_2^2}$$

$$= \sqrt{(1.36)^2 - (1.07)^2}$$

$$= 0.838 \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

# PROBLEMAS

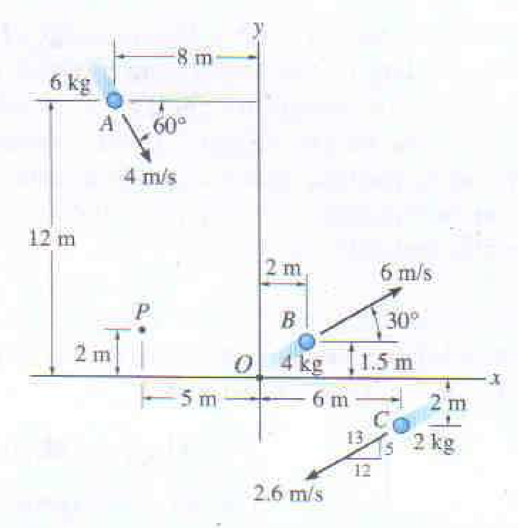
**15-90.** Determine el momentum angular de la partícula $A$ de 2 lb con respecto al punto $O$. Use una solución vectorial cartesiana.




Prob. 15–90

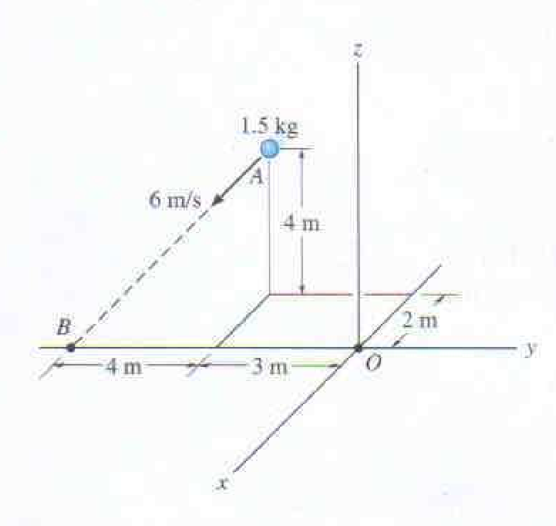
***15-92.** Determine el momentum angular $\mathbf{H}_O$ de cada una de las partículas con respecto al punto $O$.

**15-93.** Determine el momentum angular $\mathbf{H}_P$ de cada una de las partículas con respecto al punto $P$.




Probs. 15–92/93

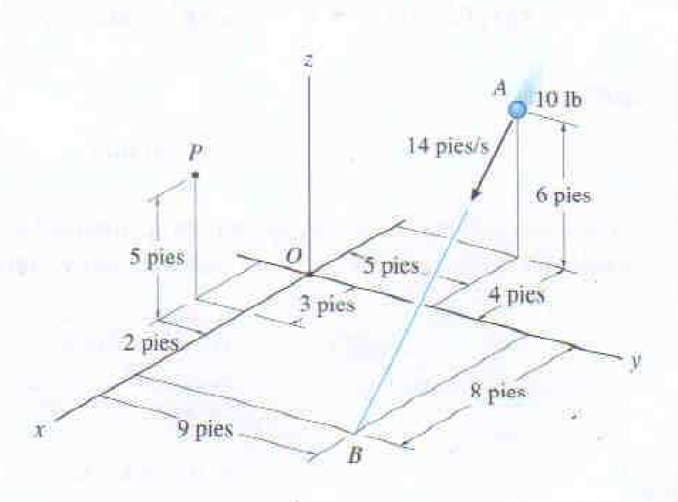
**15-91.** Determine el momentum angular $\mathbf{H}_O$ de la partícula con respecto al punto $O$.




Prob. 15–91

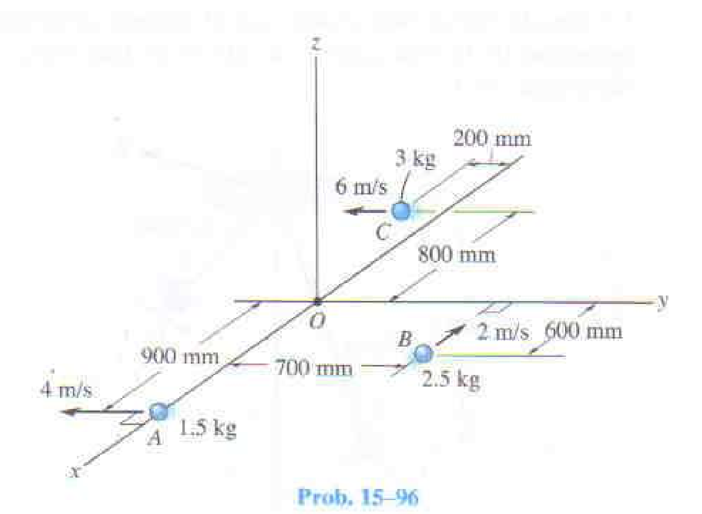
**15-94.** Determine el momentum angular $\mathbf{H}_O$ de la partícula con respecto al punto $O$.

**15-95.** Determine el momentum angular $\mathbf{H}_P$ de la partícula con respecto al punto $P$.




Probs. 15–94/95

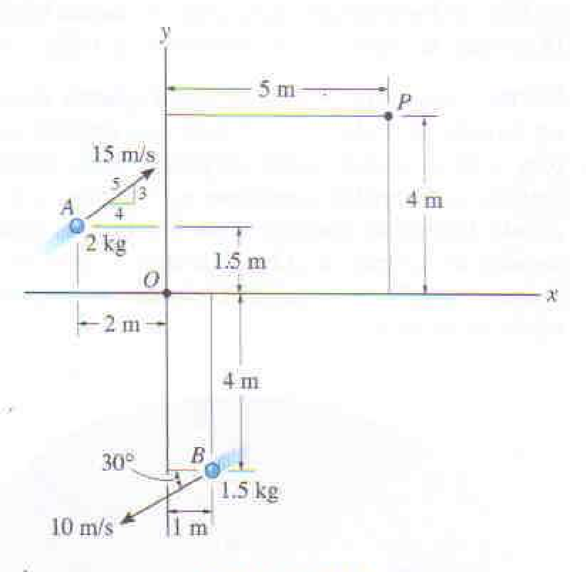
*15-96. Determine el momentum angular total $\mathbf{H}_O$ para el sistema de tres partículas con respecto al punto $O$. Todas las partículas se mueven en el plano $x-y$.




Prob. 15–96

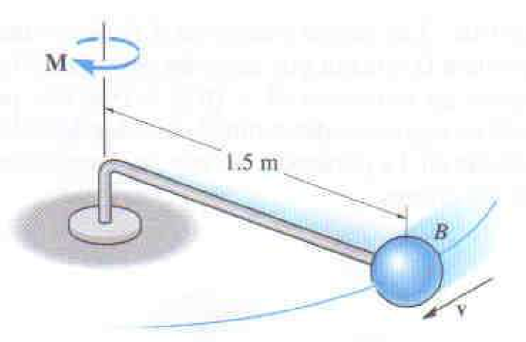
15-97. Determine el momentum angular $\mathbf{H}_O$ de cada una de las dos partículas con respecto al punto $O$. Use una solución escalar.

15-98. Determine el momentum angular $\mathbf{H}_P$ de cada una de las dos partículas con respecto al punto $P$. Use una solución escalar.



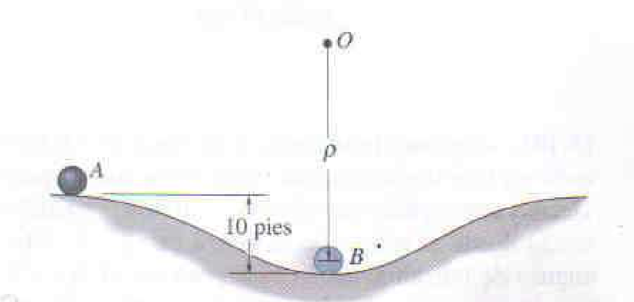

Probs. 15–97/98

15-99. La bola $B$ tiene masa de 10 kg y está unida al extremo de una barra cuya masa puede ser despreciada. Si la barra está sometida a un torsor $M = (3t^2 + 5t + 2)$ N · m, donde $t$ está en segundos, determine la rapidez de la bola cuando $t = 2$ s. La bola tiene rapidez $v = 2$ m/s cuando $t = 0$.



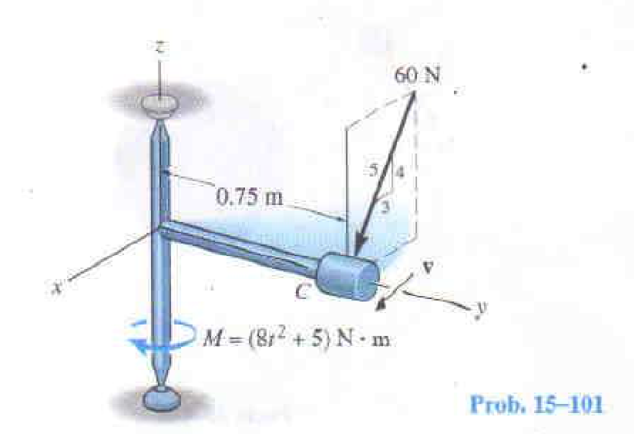

Prob. 15–99

*15-100. La bola de 3 lb localizada en $A$ es liberada del reposo y se desliza suavemente hacia abajo por la trayectoria curva. Si la bola ejerce una fuerza normal de 5 lb sobre la trayectoria cuando llega al punto $B$, determine el momentum angular de la bola con respecto al centro de curvatura, o punto $O$. *Sugerencia*: El radio de curvatura en el punto $B$ debe ser determinado.



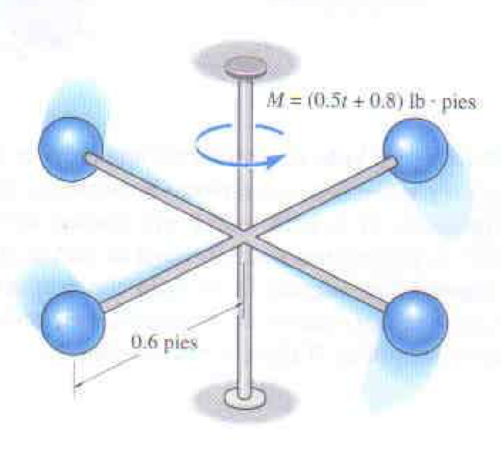

Prob. 15–100

15-101. El pequeño cilindro $C$ tiene masa de 10 kg y está unido al extremo de una barra cuya masa puede ser despreciada. Si el marco está sometido a un par $M = (8t^2 + 5)$ N · m, donde $t$ está en segundos, y el cilindro está sometido a una fuerza de 60 N que siempre está dirigida como se muestra, determine la rapidez del cilindro cuando $t = 2$ s. El cilindro tiene rapidez $v_0 = 2$ m/s cuando $t = 0$.



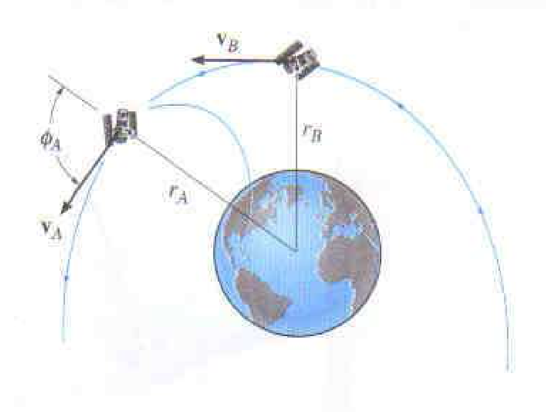

Prob. 15–101

**15-102.** Las cuatro esferas de 5 lb están unidas rígidamente a la cruceta que tiene un peso insignificante. Si se aplica un momento $M = (0.5t + 0.8)$ lb · pie, donde $t$ está en segundos, determine la rapidez de cada una de las esferas en 4 s partiendo del reposo. Desprecie el tamaño de las esferas.



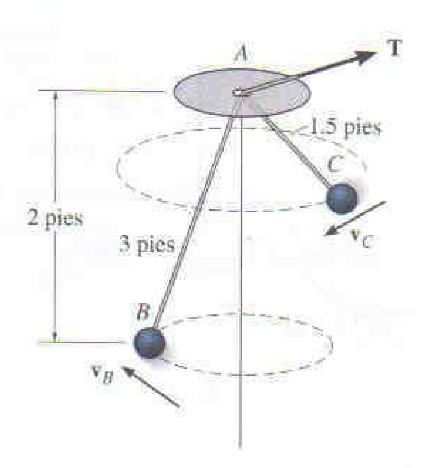

Prob. 15–102

**15-103.** Un satélite terrestre con masa de 700 kg es lanzado en una trayectoria de vuelo libre con respecto a la Tierra y con rapidez inicial de $v_A = 10$ km/s cuando la distancia desde el centro de la Tierra es $r_A = 15$ Mm. Si el ángulo de lanzamiento en esta posición es $\phi_A = 70°$, determine la rapidez $v_B$ del satélite y su distancia más corta $r_B$ desde el centro de la Tierra. La Tierra tiene masa $M_e = 5.976(10^{24})$ kg. *Sugerencia*: Bajo estas condiciones, el satélite está sometido sólo a la fuerza gravitatoria de la Tierra, $F = GM_e m_s/r^2$, ecuación 13-1. Para parte de la solución, use la conservación de la energía (vea el Prob. 14-97).




Prob. 15–103

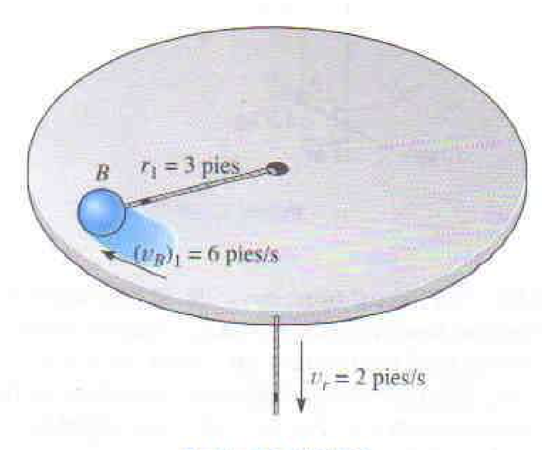
***15-104.** La bola $B$ tiene un peso de 5 lb y originalmente está girando en un círculo. Como se muestra, la cuerda $AB$ tiene longitud de 3 pies y pasa por el agujero $A$, que está 2 pies por arriba del plano de movimiento. Si 1.5 pies de cuerda son jalados por el agujero, determine la rapidez de la bola cuando se mueve en una trayectoria circular en $C$.




Prob. 15–104

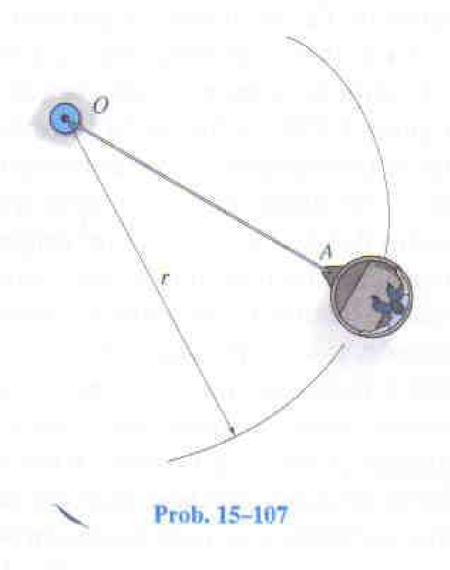
**15-105.** Una bola $B$ de 4 lb está viajando alrededor de un círculo de radio $r_1 = 3$ pies con rapidez $(v_B)_1 = 6$ pies/s. Si la cuerda unida es jalada hacia abajo por el agujero con rapidez constante $v_r = 2$ pies/s, determine la rapidez de la bola en el instante $r_2 = 2$ pies. ¿Cuánto trabajo se ha realizado para jalar la cuerda hacia abajo? Desprecie la fricción y el tamaño de la bola.

**15-106.** Una bola $B$ de 4 lb está viajando alrededor de un círculo de radio $r_1 = 3$ pies con rapidez $(v_B)_1 = 6$ pies/s. Si la cuerda unida es jalada hacia abajo por el agujero con rapidez constante $v_r = 2$ pies/s, determine cuánto tiempo se requiere para que la bola alcance una rapidez de 12 pies/s. ¿Qué tan lejos $r_2$ está la bola del agujero cuando esto ocurre? Desprecie la fricción y el tamaño de la bola.



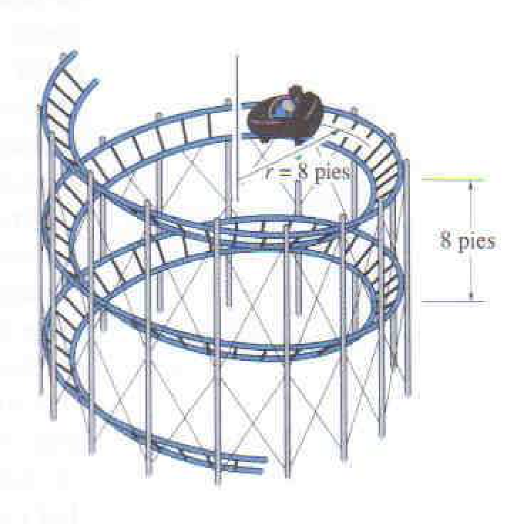

Probs. 15–105/106

**15-107.** Un juego de un parque de diversiones consta de un carro que está unido al cable $OA$. El carro gira en una trayectoria horizontal circular y alcanza una rapidez $v_1 = 4$ pies/s cuando $r = 12$ pies. El cable es entonces recogido a razón constante de 0.5 pies/s. Determine la rapidez del carro en 3 s.



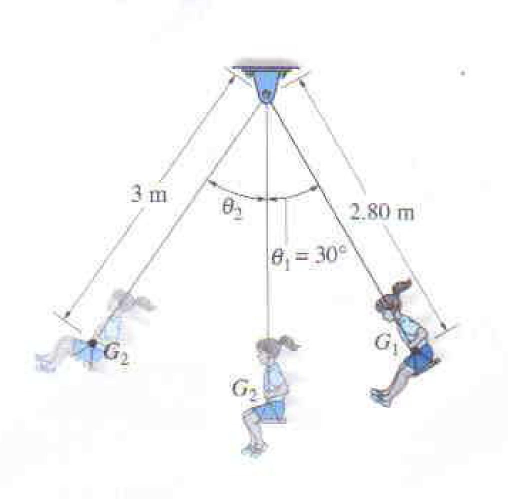

Prob. 15–107

**15-109.** El carro de 800 lb de la montaña rusa parte del reposo sobre la vía que tiene forma de hélice cilíndrica. Si la hélice desciende 8 pies en cada revolución, determine la rapidez del carro en $t = 4$ s. ¿Cuánto ha descendido el carro en este tiempo? Desprecie la fricción y el tamaño del carro.



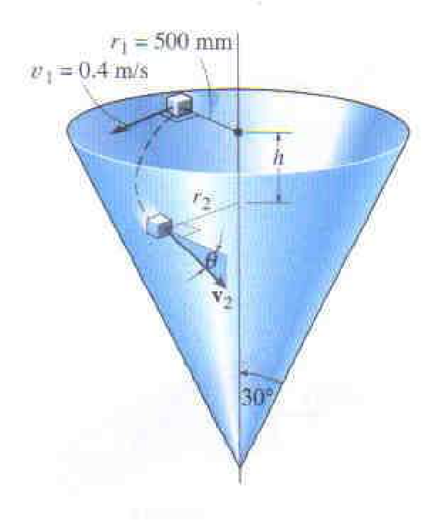

Prob. 15–109

***15-108.** Una niña con masa de 50 kg mantiene sus piernas levantadas como se muestra cuando oscila hacia abajo desde el reposo en $\theta_1 = 30°$. Su centro de masa está localizado en el punto $G_1$. Cuando está en la posición más baja, $\theta = 0°$, ella dobla *repentinamente* sus piernas cambiando su centro de masa a la posición $G_2$. Determine su rapidez cuando va hacia arriba debido a este movimiento repentino y el ángulo $\theta_2$ que oscila antes de llegar momentáneamente al reposo. Considere el cuerpo de la niña como una partícula.




Prob. 15–108

**15-110.** A un pequeño bloque con masa de 0.1 kg se le da una velocidad horizontal $v_1 = 0.4$ m/s cuando $r_1 = 500$ mm. El bloque se desliza a lo largo de la superficie cónica lisa. Determine la distancia $h$ que debe descender para alcanzar una rapidez de $v_2 = 2$ m/s. ¿Cuál es el ángulo de descenso $\theta$, esto es, el ángulo medido desde la horizontal a la tangente de la trayectoria?




Prob. 15–110

## 15.8 Corrientes de fluido estacionarias

El conocimiento de las fuerzas desarrolladas por corrientes de fluido estacionarias es importante en el diseño y análisis de turbinas, bombas, álabes y ventiladores. Para ilustrar cómo el principio del impulso y momentum puede ser usado al determinar estas fuerzas, considere la desviación de una corriente estacionaria de fluido (líquido o gas) por un tubo fijo, figura 15-27*a*. El fluido entra al tubo con velocidad $\mathbf{v}_A$ y sale con velocidad $\mathbf{v}_B$. Los diagramas de impulso y momentum para la corriente de fluido se muestran en la figura 15-27*b*. La fuerza $\Sigma\mathbf{F}$, mostrada en el diagrama de impulso, representa la resultante de todas las fuerzas externas que actúan sobre la corriente del fluido. Esta es la carga que da a la corriente un impulso por medio del cual el momentum original del fluido cambia en magnitud y dirección. Como el flujo es estacionario, $\Sigma\mathbf{F}$ será *constante* durante el intervalo de tiempo $dt$. Durante este tiempo la corriente de fluido está en movimiento, y como resultado una pequeña cantidad de fluido, con masa $dm$, está a punto de entrar al tubo a velocidad $\mathbf{v}_A$ en el tiempo $t$. Si este elemento de masa y la masa del fluido en el tubo son considerados como un "sistema cerrado", entonces, en el tiempo $t + dt$, un elemento correspondiente de masa $dm$ debe salir del tubo a velocidad $\mathbf{v}_B$. También, la corriente de fluido *dentro* de la sección del tubo tiene masa $m$ y *velocidad promedio* $\mathbf{v}$ que es constante durante el intervalo de tiempo $dt$. Aplicando el principio del impulso y momentum lineal a la corriente de fluido, tenemos

$$dm\,\mathbf{v}_A + m\mathbf{v} + \Sigma\mathbf{F}\,dt = dm\,\mathbf{v}_B + m\mathbf{v}$$

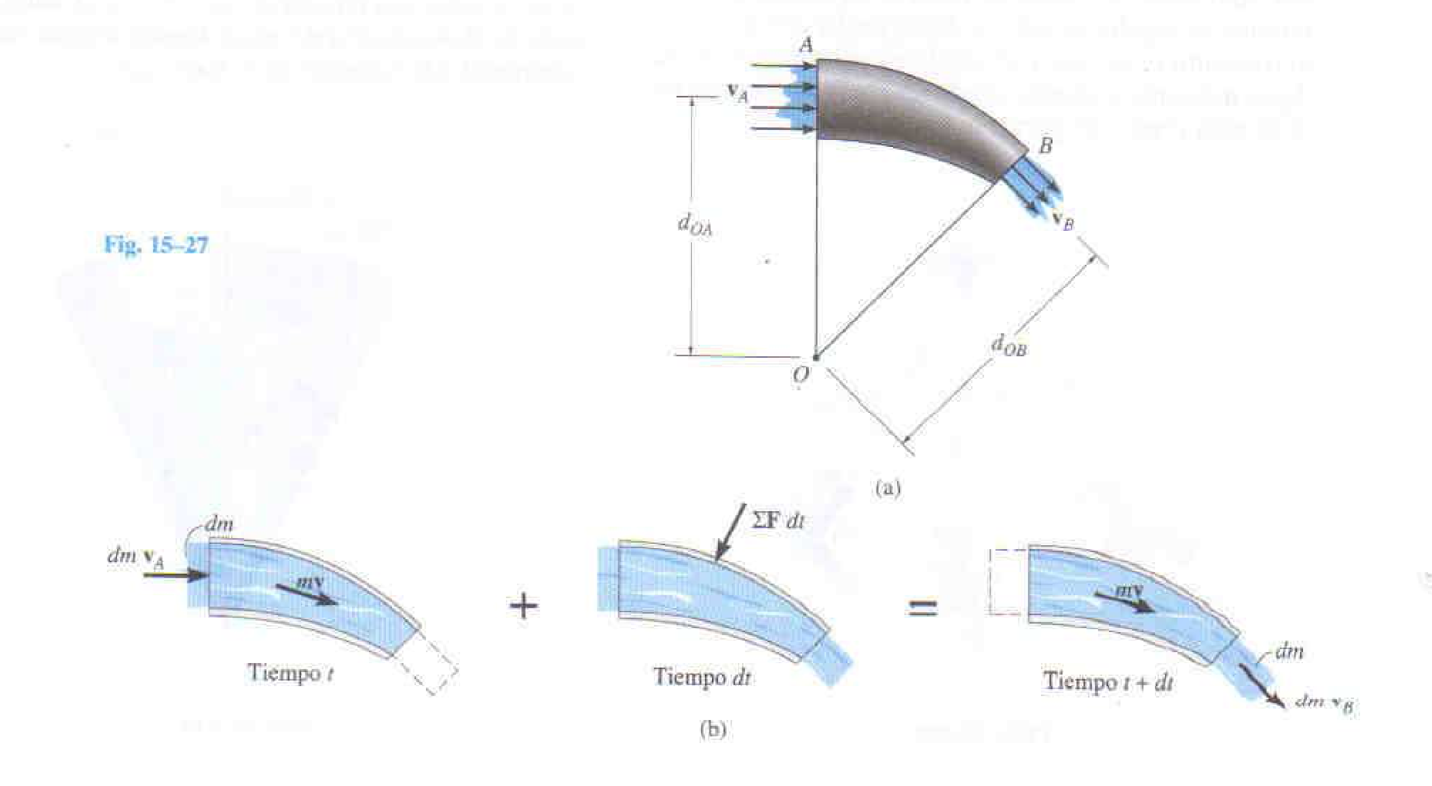



Fig. 15–27

**Fuerza resultante.** Despejando la fuerza resultante obtenemos

$$\Sigma \mathbf{F} = \frac{dm}{dt}(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A) \qquad (15\text{–}25)$$

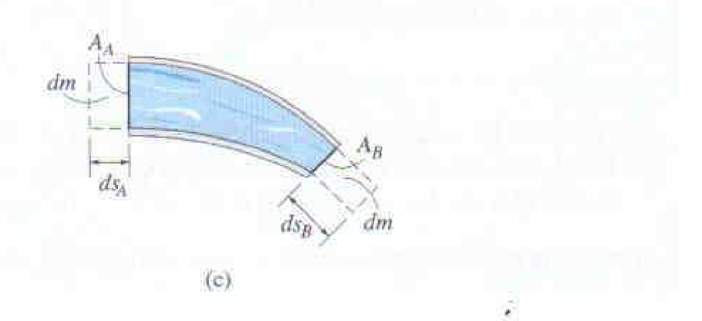
Si el movimiento del fluido puede ser representado en el plano $x-y$, usualmente conviene expresar esta ecuación vectorial en la forma de dos ecuaciones componentes escalares, esto es,

$$\Sigma F_x = \frac{dm}{dt}(v_{Bx} - v_{Ax})$$
$$\Sigma F_y = \frac{dm}{dt}(v_{By} - v_{Ay}) \qquad (15\text{–}26)$$

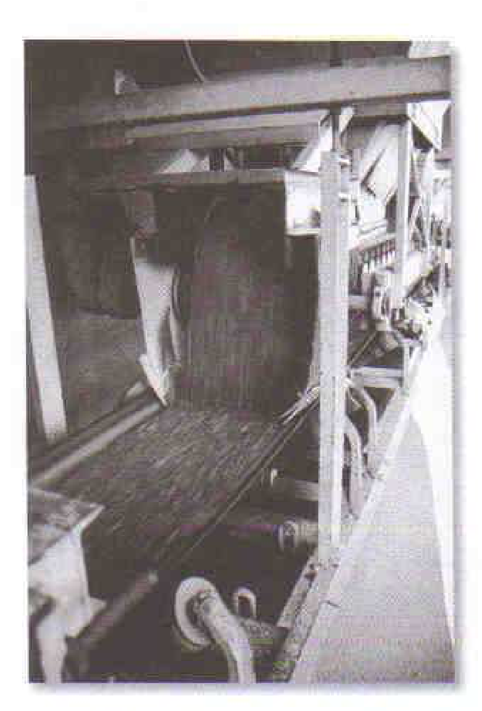
El término $dm/dt$ es llamado *flujo de masa* e indica la cantidad constante de fluido que pasa hacia dentro o hacia fuera de la tubería por unidad de tiempo. Si las áreas transversales y las densidades del fluido en la entrada $A$ y la salida $B$ son $A_A, \rho_A$ y $A_B, \rho_B$, respectivamente, figura 15-27*c*, entonces la *continuidad de masa* requiere que $dm = \rho\, dV = \rho_A(ds_A A_A) = \rho_B(ds_B A_B)$. Por consiguiente, durante el tiempo $dt$, como $v_A = ds_A/dt$ y $v_B = ds_B/dt$, tenemos

$$\frac{dm}{dt} = \rho_A v_A A_A = \rho_B v_B A_B = \rho_A Q_A = \rho_B Q_B \qquad (15\text{–}27)$$

Aquí $Q = vA$ es la *razón de flujo* volumétrico, la cual mide el volumen de fluido que pasa por unidad de tiempo.




(c)



La banda transportadora debe suministrar fuerzas de fricción a la grava que cae sobre ella para cambiar el momentum de la corriente de grava, de manera que empiece a viajar a lo largo de la banda.

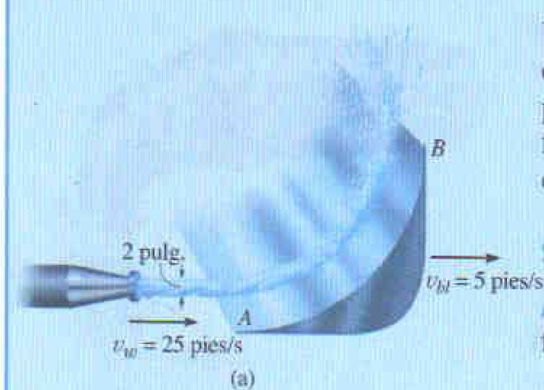
**Momento resultante.** En algunos casos es necesario obtener las reacciones en los soportes del dispositivo que transporta al fluido. Si la ecuación 15-25 no proporciona suficiente información para hacer esto, debe usarse el principio del impulso y momentum angular. La formulación de este principio aplicado a corrientes de fluidos puede obtenerse a partir de la ecuación 15-17, $\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O$, la cual establece que el momento de todas las fuerzas externas que actúan sobre el sistema con respecto al punto $O$ es igual a la razón de cambio con respecto al tiempo del momentum angular con respecto a $O$. En el caso del tubo mostrado en la figura 15-27*a*, el flujo es estacionario en el plano $x$-$y$; por consiguiente, tenemos

(↺+) (15–28)

donde los brazos de momento $d_{OB}$ y $d_{OA}$ están dirigidos desde $O$ hasta el *centro geométrico* o *centroide* de las aberturas localizadas en $A$ y $B$.

El aire a un lado de este ventilador está esencialmente en reposo, y al pasar por las aspas su momentum es incrementado. Para cambiar el momentum del flujo de aire de esta manera, las aspas deben ejercer un empuje horizontal sobre la corriente de aire. Conforme las aspas giren más rápido, el empuje igual pero opuesto del aire sobre ellas podría superar la resistencia al rodamiento de las ruedas sobre el suelo y empezar a mover el bastidor del ventilador.

**EJEMPLO 15.17**



(a)

Un chorro de agua de 2 pulg de diámetro y velocidad de 25 pies/s incide sobre un solo álabe móvil, figura 15-29*a*. Si el álabe se aleja a 5 pies/s del chorro, determine las componentes horizontal y vertical de fuerza que ejerce sobre el agua. ¿Qué potencia genera el agua sobre el álabe? El agua tiene un peso específico de $\gamma_w = 62.4\ \text{lb/pie}^3$.

### Solución

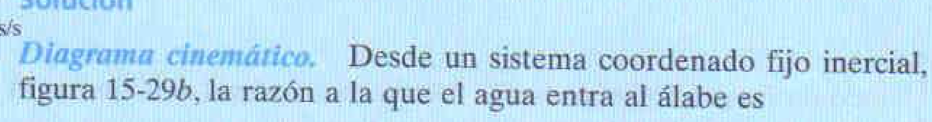


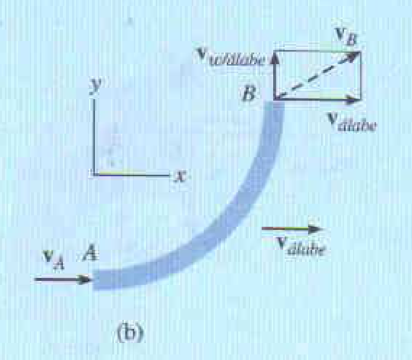
***Diagrama cinemático.*** Desde un sistema coordenado fijo inercial, figura 15-29*b*, la razón a la que el agua entra al álabe es



$$\mathbf{v}_A = \{25\mathbf{i}\}\ \text{pies/s}$$

La *velocidad relativa de flujo* del agua sobre el álabe es $\mathbf{v}_{w/álabe} = \mathbf{v}_w - \mathbf{v}_{álabe} = 25\mathbf{i} - 5\mathbf{i} = \{20\mathbf{i}\}$ pies/s. Como el álabe se está moviendo con velocidad $\mathbf{v}_{álabe} = \{5\mathbf{i}\}$ pies/s, la velocidad de flujo en $B$ medida desde $x$, $y$ es la suma vectorial, mostrada en la figura 15-29*b*. Aquí,

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_B &= \mathbf{v}_{álabe} + \mathbf{v}_{w/álabe}\\ &= \{5\mathbf{i} + 20\mathbf{j}\}\ \text{pies/s}\end{aligned}$$

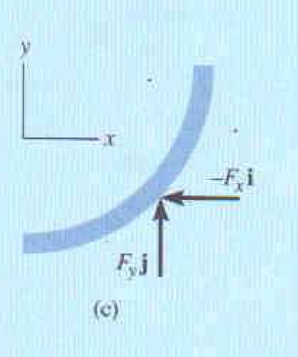


(b)

Entonces, el flujo de masa de agua *sobre* el álabe que sufre un cambio de momentum es

$$\frac{dm}{dt} = \rho_w(v_{w/álabe})A_A = \frac{62.4}{32.2}(20)\left[\pi\left(\frac{1}{12}\right)^2\right] = 0.846\ \text{slug/s}$$

***Diagrama de cuerpo libre.*** El diagrama de cuerpo libre de una sección de agua actuando sobre el álabe se muestra en la figura 15-29*c*. El peso del agua será despreciado en los cálculos, ya que esta fuerza es pequeña comparada con las componentes reactivas $\mathbf{F}_x$ y $\mathbf{F}_y$.



(c)

Fig. 15-29



***Ecuaciones de flujo estacionario.***

$$\Sigma\mathbf{F} = \frac{dm}{dt}(\mathbf{v}_B - \mathbf{v}_A)$$

$$-F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} = 0.846(5\mathbf{i} + 20\mathbf{j} - 25\mathbf{i})$$

Igualando las respectivas componentes **i** y **j** obtenemos

$$F_x = 0.846(20) = 16.9\ \text{lb} \leftarrow \qquad \textit{Resp.}$$

$$F_y = 0.846(20) = 16.9\ \text{lb}\uparrow \qquad \textit{Resp.}$$

El agua ejerce fuerzas iguales pero opuestas sobre el álabe.

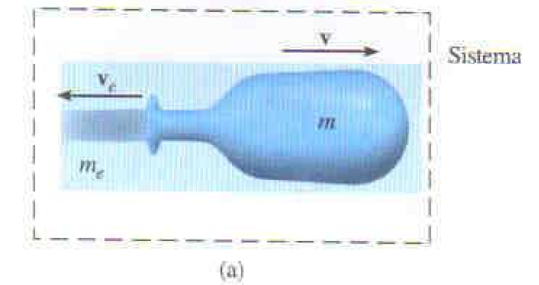
Como la fuerza del agua que causa que el álabe se mueva hacia adelante horizontalmente con velocidad de 5 pies/s es $F_x = 16.9$ lb, entonces, a partir de la ecuación 14-10, la potencia es

$$P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}; \qquad P = \frac{16.9\ \text{lb}(5\ \text{pies/s})}{550\ \text{hp/(pies}\cdot\text{lb/s)}} = 0.154\ \text{hp} \qquad \textit{Resp.}$$

# *15.9 Propulsión con masa variable

En la sección previa consideramos el caso en que una cantidad *constante* de masa $dm$ entra y sale de un "*sistema cerrado*". Sin embargo, hay otros dos casos importantes que implican flujo de masa, los cuales son representados por un sistema que gana o pierde masa. En esta sección analizaremos cada uno de esos casos por separado.

**Un sistema que pierde masa.** Considere un dispositivo, por ejemplo un cohete, que en cierto instante tiene una masa $m$ y se está moviendo hacia adelante con velocidad $\mathbf{v}$, figura 15-30*a*. En ese mismo instante, el dispositivo expulsa una cantidad de masa $m_e$ con velocidad de flujo de masa $\mathbf{v}_e$. Para el análisis, el "*sistema cerrado*" incluye *la masa m del dispositivo y la masa expulsada* $m_e$. Los diagramas de impulso y momentum para el sistema se muestran en la figura 15-30*b*. Durante el tiempo $dt$, la velocidad del dispositivo se incrementa de $\mathbf{v}$ a $\mathbf{v} + d\mathbf{v}$ ya que una cantidad de masa $dm_e$ ha sido expulsada y por ello ganado en la salida. Sin embargo, este incremento en velocidad hacia adelante no cambia la velocidad $\mathbf{v}_e$ de la masa expulsada, ya que esta masa se mueve a rapidez constante una vez que ha sido expulsada. Los impulsos son creados por $\Sigma\mathbf{F}_s$, que representa la resultante de todas las fuerzas externas que *actúan sobre el sistema* en la dirección del movimiento. Esta fuerza resultante *no incluye* la fuerza que causa que el dispositivo se mueva hacia adelante, ya que esta fuerza (llamada *empuje*) es *interna al sistema*; esto es, el empuje actúa con magnitud igual pero dirección opuesta sobre la masa $m$ del dispositivo y la masa expulsada del escape $m_e$.* Aplicando el principio del impulso y momentum al sistema, figura 15-30*b*, tenemos

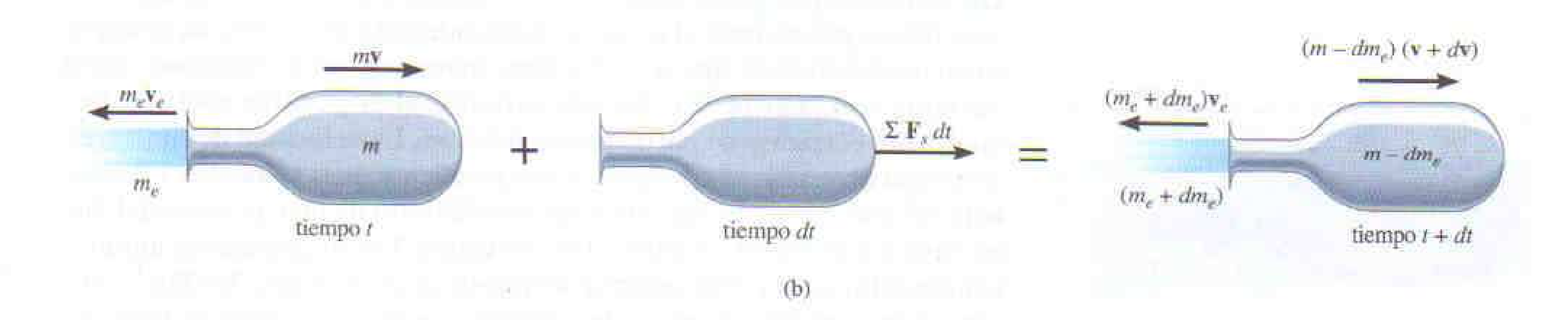



(a)

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \quad mv - m_e v_e + \Sigma F_s\,dt = (m - dm_e)(v + dv) - (m_e + dm_e)v_e$$

o bien

$$\Sigma F_s\,dt = -v\,dm_e + m\,dv - dm_e\,dv - v_e\,dm_e$$




(b)

Fig. 15–30

*$\Sigma\mathbf{F}_s$ representa la fuerza externa resultante *actuando sobre el sistema*, la cual es diferente de $\Sigma\mathbf{F}$, que es la fuerza resultante actuando sólo sobre el dispositivo.




Fig. 15–31

Sin perder exactitud, el tercer término del lado derecho puede ser despreciado ya que es un diferencial de "segundo orden". Dividiendo entre $dt$ resulta

$$\Sigma F_s = m\frac{dv}{dt} - (v + v_e)\frac{dm_e}{dt}$$

La velocidad relativa del dispositivo como es visto por un observador que se mueve con las partículas de la masa expulsada es $v_{D/e} = (v + v_e)$, y entonces el resultado final puede ser escrito como

$$\Sigma F_s = m\frac{dv}{dt} - v_{D/e}\frac{dm_e}{dt} \qquad (15\text{–}29)$$

Aquí el término $dm_e/dt$ representa la razón con que la masa está siendo expulsada.

Para ilustrar una aplicación de la ecuación 15-29, considere el cohete mostrado en la figura 15-31, el cual tiene un peso **W** y se está moviendo hacia arriba contra una fuerza resistente atmosférica $\mathbf{F}_D$. El sistema a ser considerado consta de la masa del cohete y la masa del gas expulsado $m_e$. Aplicando la ecuación 15-29 a este sistema obtenemos

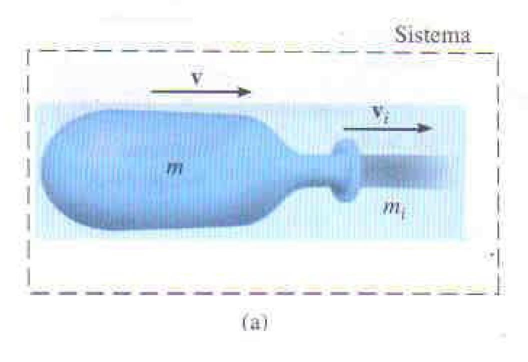
$$(+\uparrow) \qquad -F_D - W = \frac{W}{g}\frac{dv}{dt} - v_{D/e}\frac{dm_e}{dt}$$

El último término de esta ecuación representa el *empuje* **T** que el escape del motor ejerce sobre el cohete, figura 15-31. Por tanto, como $dv/dt = a$, podemos escribir

$$(+\uparrow) \qquad T - F_D - W = \frac{W}{g}a$$

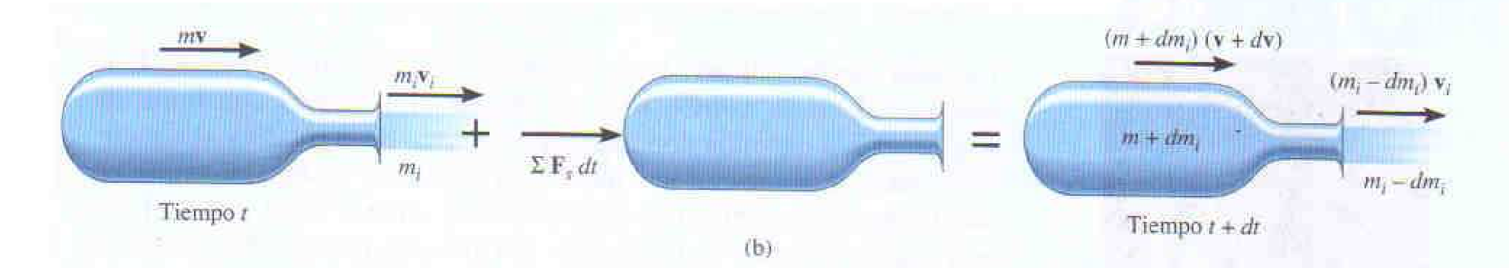
Si se traza un diagrama de cuerpo libre del cohete, resulta obvio que esta ecuación representa una aplicación de $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ para el cohete.

**Un sistema que gana masa.** Un dispositivo como un cangilón o una pala puede ganar masa al moverse hacia adelante. Por ejemplo, el dispositivo mostrado en la figura 15-32*a* tiene masa $m$ y se está moviendo hacia adelante con velocidad **v**. En este instante, el dispositivo está recolectando una corriente de partículas de masa $m_i$. La velocidad de flujo $\mathbf{v}_i$ de esta masa inyectada es constante e independiente de la velocidad **v** de manera tal que $v > v_i$. El sistema a ser considerado incluye la masa del dispositivo y la masa de las partículas inyectadas. Los diagramas de impulso y momentum para este sistema se muestran en la figura 15-32*b*. Junto con un incremento de masa $dm_i$ ganada por el dispositivo, se tiene un supuesto incremento de velocidad $d\mathbf{v}$ durante el intervalo de tiempo $dt$. Este incremento se debe al impulso creado por $\Sigma\mathbf{F}_s$, la resultante de todas las fuerzas externas que *actúan sobre el sistema* en la dirección del movimiento. La suma de fuerzas no incluye la fuerza retardante de la masa




(a)

Fig. 15–32




(b)

inyectada que actúa sobre el dispositivo. ¿Por qué? Aplicando el principio del impulso y momentum al sistema, tenemos

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad mv + m_i v_i + \Sigma F_s\, dt = (m + dm_i)(v + dv) + (m_i - dm_i)v_i$$

Usando el mismo procedimiento que en el caso previo, podemos escribir esta ecuación como

$$\Sigma F_s = m\frac{dv}{dt} + (v - v_i)\frac{dm_i}{dt}$$

Dado que la velocidad relativa del dispositivo vista por un observador que se mueve con las partículas de la masa inyectada es $v_{D/i} = (v - v_i)$, el resultado final puede ser escrito como

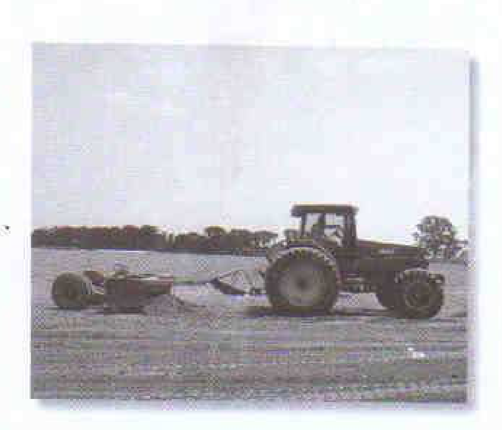
$$\Sigma F_s = m\frac{dv}{dt} + v_{D/i}\frac{dm_i}{dt} \qquad (15\text{–}30)$$

donde $dm_i/dt$ es la razón de masa inyectada en el dispositivo. El último término que aparece en esta ecuación representa la magnitud de la fuerza **R**, que la masa inyectada *ejerce sobre el dispositivo*. Como $dv/dt = a$, la ecuación 15-30 resulta en

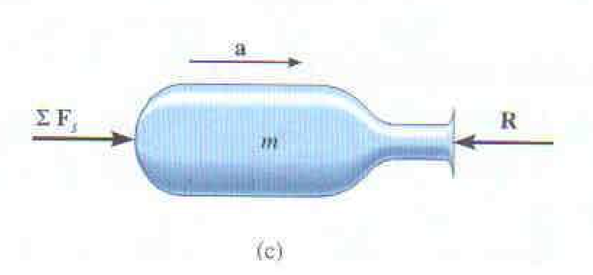
$$\Sigma F_s - R = ma$$

Esta es la aplicación de $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$, figura 15-32*c*.

Como en el caso de flujo estacionario, los problemas que son resueltos usando las ecuaciones 15-29 y 15-30 deben ser acompañados por el diagrama de cuerpo libre necesario. Con este diagrama es posible determinar $\Sigma F_s$ *para el sistema* y aislar la fuerza ejercida sobre el dispositivo por la corriente de partículas.



La caja recolectora detrás de este tractor representa un dispositivo que gana masa. Si el tractor mantiene velocidad constante, $v$, entonces $dv/dt = 0$ y, como el suelo está originalmente en reposo, $v_{D/i} = v$. Por la ecuación 15-30, la fuerza horizontal de remolque sobre la caja es entonces $T = 0 + v(dm/dt)$, donde $dm/dt$ es la razón de acumulación de tierra en la caja.




(c)

## EJEMPLO 15.18



La masa combinada inicial de un cohete y su combustible es $m_0$. Una masa total $m_f$ de combustible es consumida a razón constante de $dm_e/dt = c$ y expelida con rapidez constante de $u$ relativa al cohete. Determine la velocidad máxima del cohete, esto es, en el instante en que se agota el combustible. Desprecie el cambio en el peso del cohete con la altitud y la resistencia por fricción del aire. El cohete es disparado verticalmente del reposo.

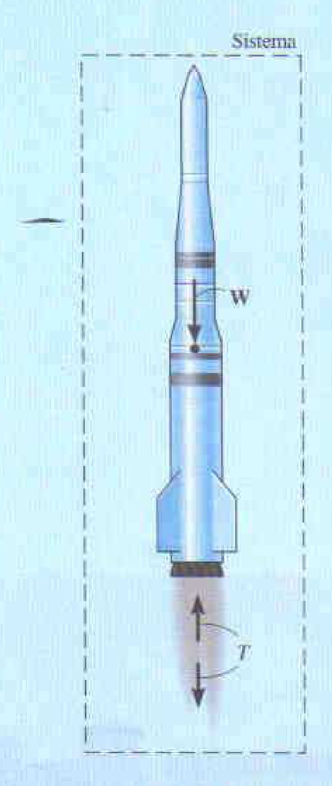



Fig. 15-33

### Solución

Como el cohete está perdiendo masa al moverse hacia arriba, la figura 15-29 puede usarse para buscar la solución. La única *fuerza externa* que actúa sobre el *sistema* constituido por el cohete y una porción de la masa expelida es el peso **W**, figura 15-33. Por consiguiente,

$$+\uparrow \Sigma F_s = m\frac{dv}{dt} - v_{D/e}\frac{dm_e}{dt}; \qquad -W = m\frac{dv}{dt} - uc \qquad (1)$$

La velocidad del cohete se obtiene integrando esta ecuación.

En cualquier instante dado $t$ durante el vuelo, la masa del cohete puede ser expresada como $m = m_0 - (dm_e/dt)t = m_0 - ct$. Como $W = mg$, la ecuación 1 toma la forma

$$-(m_0 - ct)g = (m_0 - ct)\frac{dv}{dt} - uc$$

Al separar las variables e integrar, observando que $v = 0$ en $t = 0$, tenemos

$$\int_0^v dv = \int_0^t \left(\frac{uc}{m_0 - ct} - g\right) dt$$

$$v = -u\ln(m_0 - ct) - gt\Big|_0^t = u\ln\left(\frac{m_0}{m_0 - ct}\right) - gt \qquad (2)$$

Observe que el despegue requiere que el primer término a la derecha sea mayor que el segundo durante la fase inicial del movimiento. El tiempo $t'$ necesario para consumir todo el combustible está dado por

$$m_f = \left(\frac{dm_e}{dt}\right)t' = ct'$$

Por consiguiente,

$$t' = m_f/c$$

Sustituyendo en la ecuación 2 obtenemos

$$v_{\text{máx}} = u\ln\left(\frac{m_0}{m_0 - m_f}\right) - \frac{gm_f}{c} \qquad \textit{Resp.}$$

## EJEMPLO 15.19

Una cadena de longitud $l$, figura 15-34$a$, tiene masa $m$. Determine la magnitud de la fuerza $\mathbf{F}$ requerida para (a) levantar la cadena con rapidez constante $v_c$, partiendo del reposo cuando $y = 0$; y (b) bajar la cadena con rapidez constante $v_c$, partiendo del reposo cuando $y = l$.

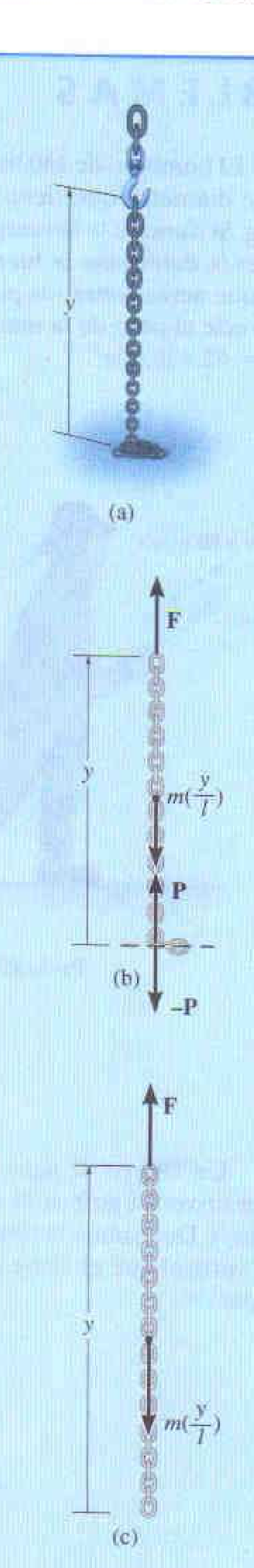



Fig. 15-34

### Solución

*Parte (a).* Conforme la cadena es levantada, a todos los eslabones suspendidos les es dado un impulso repentino hacia abajo por cada eslabón adicional que se levanta del suelo. Así, la *porción suspendida* de la cadena puede ser considerada como un dispositivo que está *ganando masa*. El sistema a ser considerado es la longitud de cadena $y$ que está suspendida por $\mathbf{F}$ en cualquier instante, incluido el siguiente eslabón que se encuentra a punto de ser agregado pero todavía está en reposo, figura 15-34$b$. Las fuerzas que actúan sobre este sistema *excluyen* las fuerzas internas $\mathbf{P}$ y $-\mathbf{P}$, las cuales actúan entre el eslabón agregado y la porción suspendida de la cadena. Por consiguiente, $\Sigma F_s = F - mg(y/l)$.

Para aplicar la ecuación 15-30, también es necesario encontrar la razón a la que la masa está siendo agregada al sistema. La velocidad $\mathbf{v}_c$ de la cadena es equivalente a $\mathbf{v}_{D/i}$. ¿Por qué? Como $v_c$ es constante, $dv_c/dt = 0$ y $dy/dt = v_c$. Integrando, usando la condición inicial $y = 0$ en $t = 0$, resulta $y = v_c t$. Así, la masa del sistema en cualquier instante es $m_s = m(y/l) = m(v_c t/l)$, y por tanto la *razón* a la que la masa está siendo *agregada* a la cadena suspendida es

$$\frac{dm_i}{dt} = m\left(\frac{v_c}{l}\right)$$

Al aplicar la ecuación 15-30 al sistema, usando estos datos, tenemos

$$+\uparrow \Sigma F_s = m\frac{dv_c}{dt} + v_{D/i}\frac{dm_i}{dt}$$

$$F - mg\left(\frac{y}{l}\right) = 0 + v_c m\left(\frac{v_c}{l}\right)$$

Por consiguiente,

$$F = (m/l)(gy + v_c^2) \qquad \textit{Resp.}$$

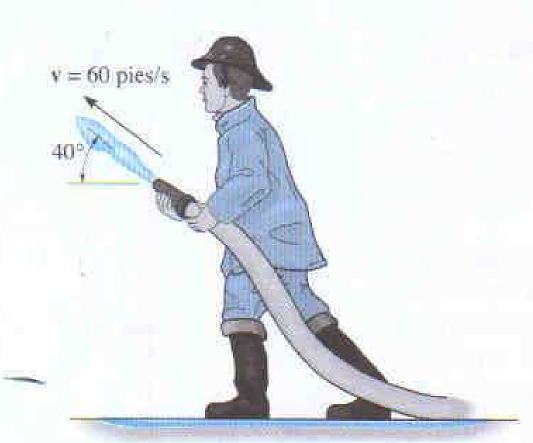
*Parte (b).* Cuando la cadena está siendo bajada, los eslabones que son expelidos (dada una velocidad cero) *no* imparten un impulso a los *restantes* eslabones suspendidos. ¿Por qué? Así, el sistema que analizamos en la parte ($a$) no puede ser considerado. En vez de esto, será usada la ecuación de movimiento para obtener la solución. En el tiempo $t$ la porción de cadena que aún no toca el suelo es $y$. El diagrama de cuerpo libre para una porción suspendida de la cadena se muestra en la figura 15-34$c$. Así,

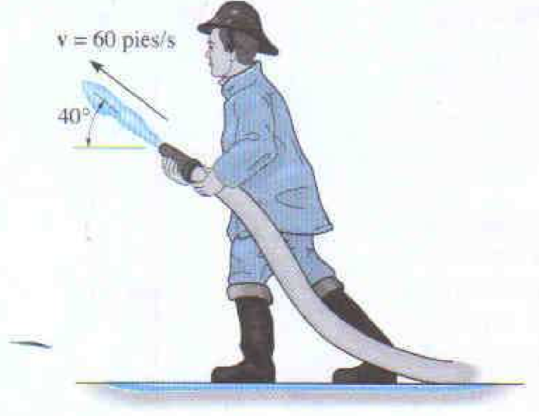
$$+\uparrow \Sigma F = ma; \qquad F - mg\left(\frac{y}{l}\right) = 0$$

$$F = mg\left(\frac{y}{l}\right) \qquad \textit{Resp.}$$

# PROBLEMAS

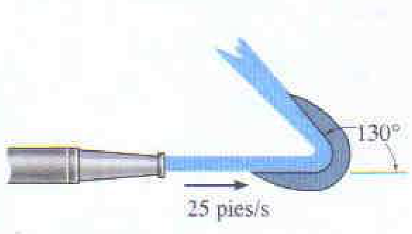
**15-111.** El bombero de 150 lb sostiene una manguera de 2 pulg de diámetro que tiene una tobera con diámetro de 1 pulg. Si durante la descarga la velocidad del agua es de 60 pies/s, determine la fuerza resultante normal y de fricción que actúa sobre los pies del bombero en el suelo. Desprecie el peso de la manguera y el agua dentro de ella. $\gamma_w = 62.4$ lb/pie$^3$.





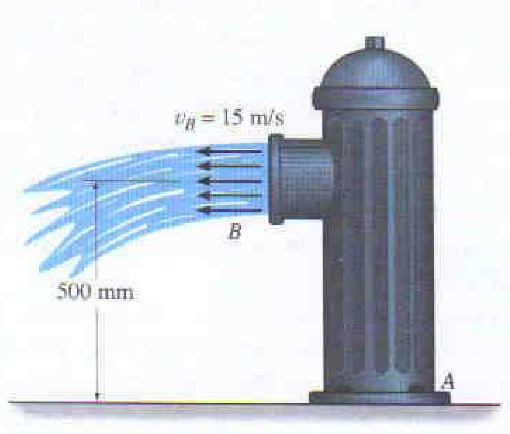
**Prob. 15–111**

***15-112.** Un chorro de agua con área de 4 pulg$^2$ en su sección transversal golpea el álabe fijo con una rapidez de 25 pies/s. Determine las componentes de fuerza horizontal y vertical que el álabe ejerce sobre el agua. $\gamma_w = 62.4$ lb/pie$^3$.



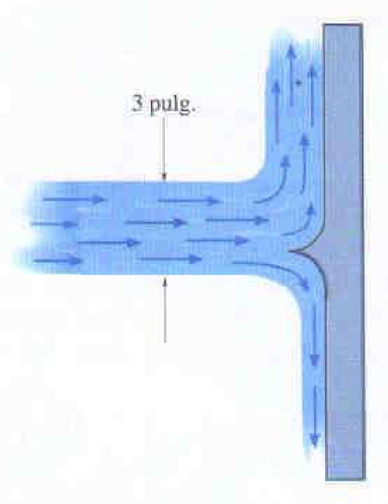

**Prob. 15–112**

**15-113.** El agua sale del hidrante de 150 mm de diámetro con velocidad $v_B = 15$ m/s. Determine las componentes de fuerza horizontal y vertical y el momento desarrollado en la base $A$, si la presión estática (manométrica) en $A$ es de 50 kPa. El diámetro del hidrante en el punto $A$ es de 200 mm. $\rho_w = 1$ Mg/m$^3$.



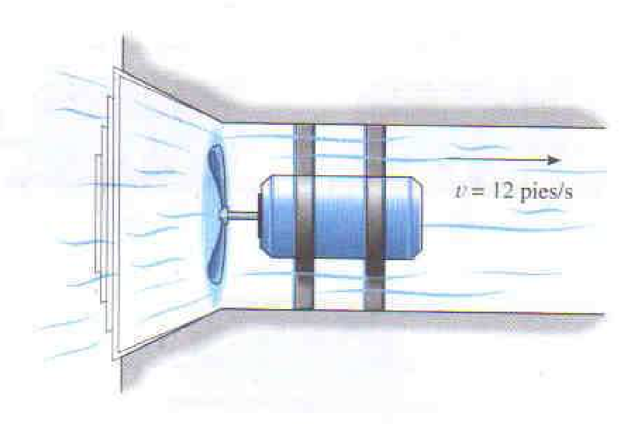

**Prob. 15–113**

**15-114.** La paleta divide el chorro de agua que tiene un diámetro de 3 pulg. Si un cuarto del agua fluye hacia abajo mientras que los otros tres cuartos fluyen hacia arriba, y el flujo total es $Q = 0.5$ pies$^3$/s, determine las componentes de fuerza horizontal y vertical ejercida sobre la paleta por el chorro; $\gamma_w = 62.4$ lb/pie$^3$.



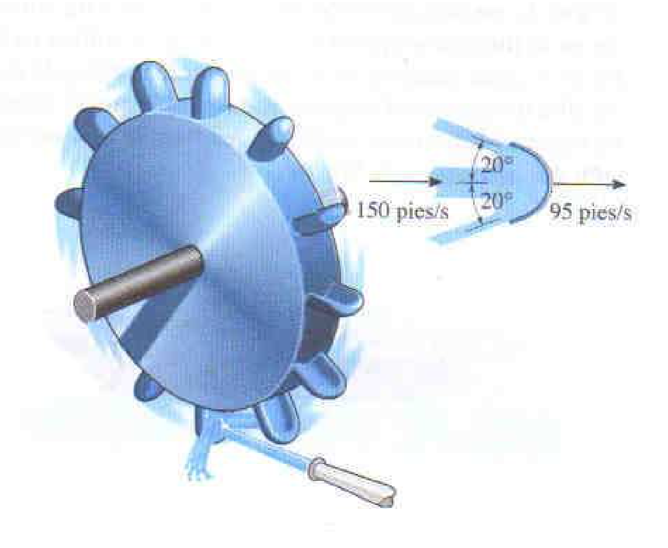

**Prob. 15–114**

**15-115.** El ventilador extrae aire por una ventila con rapidez de 12 pies/s. Si el área de la sección transversal de la ventila es de 2 pies$^2$, determine el empuje horizontal ejercido sobre la pala. El peso específico del aire es $\gamma_a = 0.076$ lb/pie$^3$.



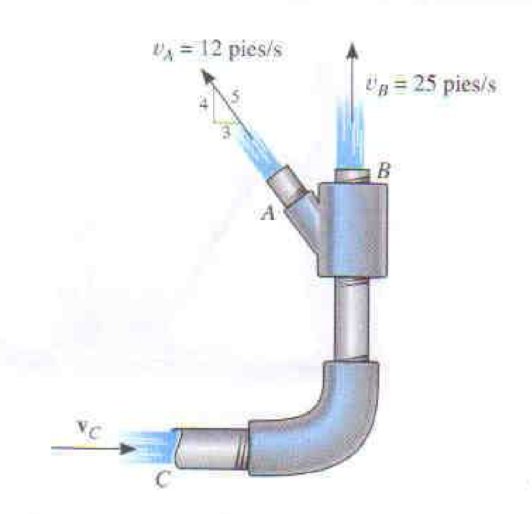

**Prob. 15-115**

***15-116.** Los cangilones sobre la *rueda Pelton* están sometidos a un chorro de agua de 2 pulg de diámetro y velocidad de 150 pies/s. Si cada cangilón está viajando a 95 pies/s cuando el agua lo golpea, determine la potencia desarrollada por la rueda. $\gamma_w = 62.4$ lb/pie$^3$.



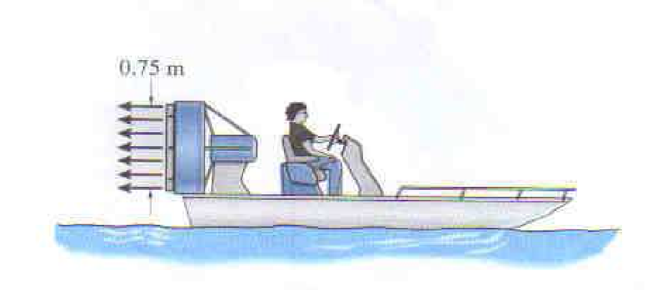

**Prob. 15-116**

**15-117.** La presión estática del agua en el punto $C$ es de 40 lb/pulg$^2$. Si el agua sale del tubo en los puntos $A$ y $B$ con velocidades $v_A = 12$ pies/s y $v_B = 25$ pies/s, respectivamente, determine las componentes de fuerza horizontal y vertical ejercida sobre el codo instalado en $C$ y que son necesarias para mantener en equilibrio al sistema de tubos. Desprecie el peso del agua dentro de los tubos y el peso de éstos. En el punto $C$ el tubo tiene diámetro de 0.75 pulg, y en $A$ y $B$ el diámetro es de 0.5 pulg. $\gamma_w = 62.4$ lb/pie$^3$.



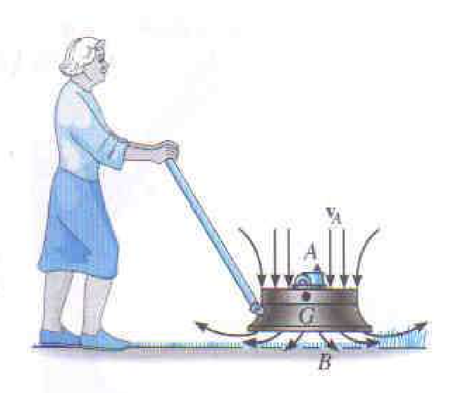

**Prob. 15-117**

**15-118.** El bote de 200 kg es impulsado por el ventilador que desarrolla una corriente con diámetro de 0.75 m. Si el ventilador emite aire con rapidez de 14 m/s, medida con respecto al bote, determine la aceleración inicial del bote si éste se encuentra inicialmente en reposo. Suponga que el aire tiene densidad constante de $\rho_a = 1.22$ kg/m$^3$ y que el aire que entra está esencialmente en reposo. Desprecie la resistencia de fricción del agua.



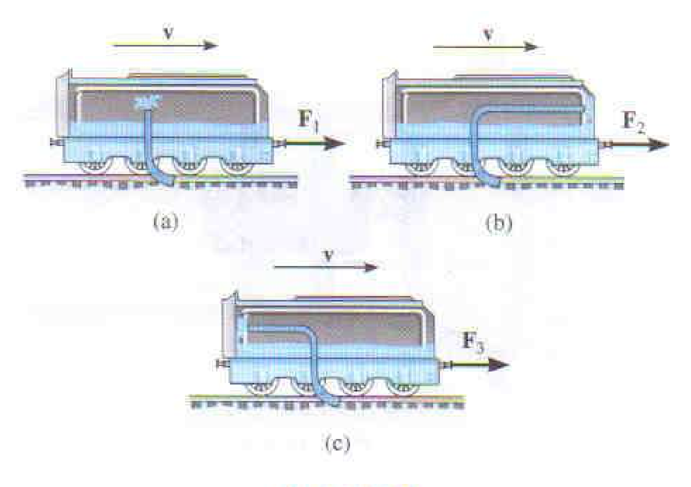

**Prob. 15-118**

**15-119.** Una podadora mecánica de césped "levita" muy cerca del suelo. Esto lo logra aspirando aire con rapidez de 6 m/s a través de una unidad de acceso $A$ que tiene un área transversal $A_A = 0.25\ \text{m}^2$, y descargándolo luego en el suelo $B$, donde el área transversal de descarga es $A_B = 0.35\ \text{m}^2$. Si en el punto $A$ el aire está sometido sólo a presión atmosférica, determine la presión de aire que la podadora ejerce sobre el suelo cuando la altura de la podadora está libremente soportada y no se tiene carga sobre el mango. La podadora tiene masa de 15 kg con centro de masa en $G$. Suponga que el aire tiene densidad constante $\rho_a = 1.22\ \text{kg/m}^3$.



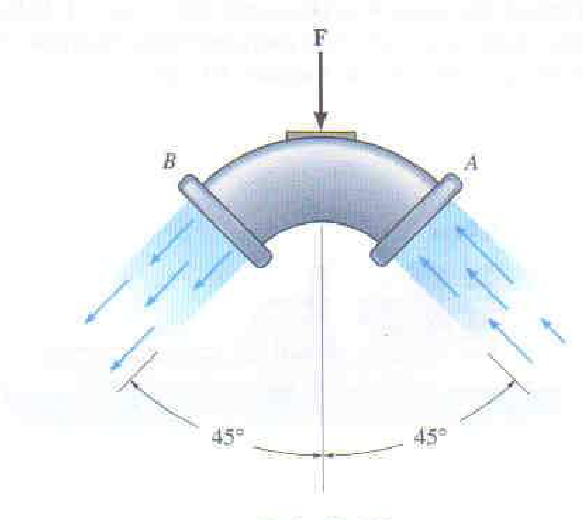

Prob. 15–119

**15-121.** El carro se usa para recoger el agua que se encuentra entre los rieles. Determine la fuerza necesaria para jalar el carro hacia adelante a velocidad constante **v** para cada uno de los tres casos. El recolector tiene un área de sección transversal $A$ y la densidad del agua es $\rho_w$.




Prob. 15–121

*__15-120.__ El codo de una tubería enterrada de 5 pulg de diámetro está sometido a una presión estática de 10 lb/pulg². La rapidez del agua que pasa por el codo es $v = 8$ pies/s. Suponiendo que las conexiones de los tubos en los puntos $A$ y $B$ no ofrecen ninguna resistencia de fuerza vertical sobre el codo, determine la fuerza vertical resultante **F** que el suelo debe ejercer entonces sobre el codo para mantenerlo en equilibrio. Desprecie el peso del codo y del agua dentro de él. $\gamma_w = 62.4\ \text{lb/pie}^3$.




Prob. 15–120

**15-122.** Un dispositivo recolector instalado al frente de una locomotora recoge nieve a razón de 10 pies³/s y la almacena en el tren. Si la locomotora está viajando a rapidez constante de 12 pies/s, determine la resistencia al movimiento causada por la recolección. El peso específico de la nieve es $\gamma_s = 6\ \text{lb/pie}^3$.

**15-123.** El bote tiene masa de 180 kg y está viajando hacia adelante por un río con velocidad constante de 70 km/h, medida *con relación* al río. El río está fluyendo en la dirección opuesta a 5 km/h. Si se coloca un tubo en el agua, como se muestra, para tomar 40 kg de agua en 80 s, determine el empuje horizontal $T$ que se requiere sobre el tubo para vencer la resistencia a la recolección del agua. $\rho_w = 1\ \text{Mg/m}^3$.




Prob. 15–123

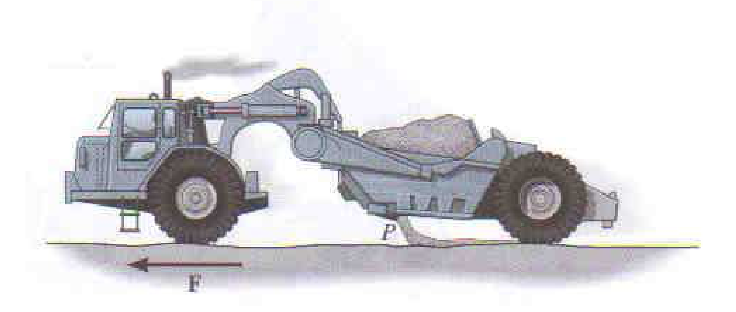
*15-124. La segunda etapa del cohete de dos etapas pesa 2000 lb (vacía) y es lanzada desde la primera etapa con velocidad de 3000 mi/h. El combustible existente en la segunda etapa pesa 1000 lb. Si este combustible se consume a razón de 50 lb/s y es eyectado con velocidad relativa de 8000 pies/s, determine la aceleración de la segunda etapa justo después que el motor es encendido. ¿Cuál es la aceleración del cohete justo antes de que todo el combustible sea consumido? Desprecie el efecto de la gravitación.

15-125. El cohete pesa 40 000 lb. El empuje constante proporcionado por el motor principal es $T = 15\ 000$ lb. Un empuje extra es proporcionado por *dos* impulsores adicionales $B$. El combustible en cada impulsor adicional es quemado a una razón constante de 150 lb/s, con velocidad relativa de expulsión de 3000 pies/s. Si la masa del combustible perdido por el motor principal puede ser despreciada, determine la velocidad del cohete después del tiempo de combustión de 4 s de los impulsores adicionales. La velocidad inicial del cohete es de 300 mi/h.




Prob. 15–125

15-126. La máquina para remover tierra lleva 10 m$^3$ de arena con densidad de 1520 kg/m$^3$. La arena es descargada horizontalmente a través de un puerto $P$ de descarga de 2.5 m$^2$ a razón de 900 kg/s medida con relación al puerto. Determine la fuerza de tracción resultante **F** en sus ruedas frontales si la aceleración del vehículo es de 0.1 m/s$^2$ cuando la mitad de la arena ha sido descargada. Vacío, el vehículo tiene masa de 30 Mg. Desprecie cualquier resistencia al movimiento hacia adelante y la masa de las ruedas. Las ruedas posteriores tienen libertad para girar.



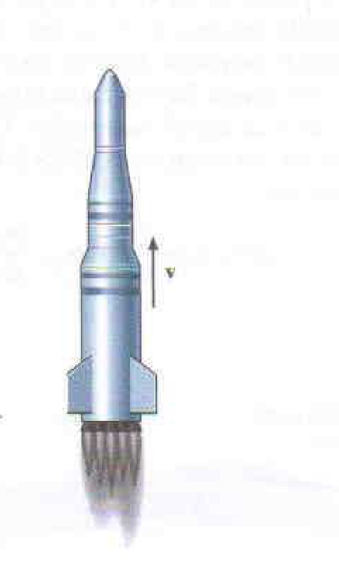

Prob. 15–126

15-127. El helicóptero de 10 Mg lleva un recipiente con 500 kg de agua que se usa para apagar incendios. Si el helicóptero se mantiene volando en una posición fija y luego libera 50 kg/s de agua a 10 m/s, medida con respecto al helicóptero, determine la aceleración inicial que experimenta hacia arriba cuando el agua está siendo liberada.




Prob. 15–127

*15-128. El cohete tiene masa de 65 Mg incluido el combustible. Determine la razón constante a la que el combustible debe ser quemado para que su empuje dé al cohete una rapidez de 200 pies/s en 10 s partiendo del reposo. El combustible es expulsado del cohete a una rapidez relativa de 3000 pies/s. Desprecie los efectos de la resistencia del aire y suponga que $g$ es constante.




Prob. 15–128

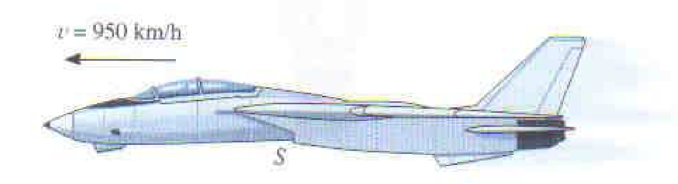
**15-129.** El cohete tiene masa inicial $m_0$, incluido el combustible. Por razones prácticas, se requiere que el cohete mantenga una aceleración constante $a_0$ hacia arriba. Si el combustible es expelido del cohete con rapidez relativa $v_{e/r}$, determine la razón a la que debe ser consumido para mantener el movimiento. Desprecie la resistencia del aire y suponga que la aceleración gravitatoria es constante.




Prob. 15–129

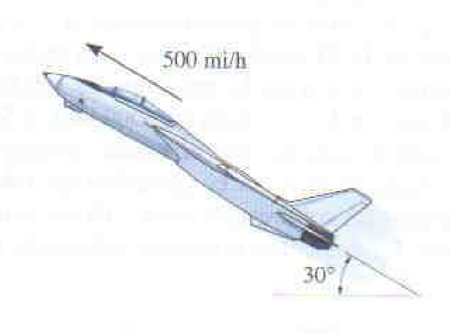
**15-130.** El avión a chorro de 12 Mg tiene rapidez constante de 950 km/h cuando está volando a lo largo de una línea recta horizontal. El aire entra a las cavidades de entrada $S$ a razón de 50 m$^3$/s. Si el motor quema combustible a razón de 0.4 kg/s y el gas (aire y combustible) es expulsado relativo al avión con rapidez de 450 m/s, determine la fuerza de fricción resultante ejercida sobre el avión por el aire. Suponga que el aire tiene densidad constante de 1.22 kg/m$^3$. *Sugerencia*: Como del avión entra y sale masa, las ecuaciones 15-29 y 15-30 deben combinarse para dar

$$\Sigma F_s = m\frac{dv}{dt} - v_{D/e}\frac{dm_e}{dt} + v_{D/i}\frac{dm_i}{dt}$$



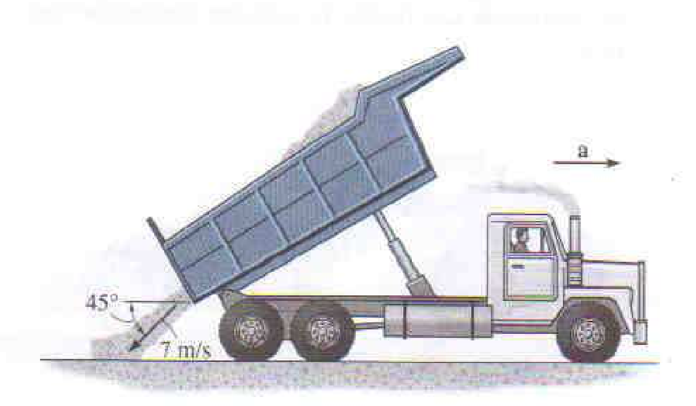

Prob. 15–130

**15-131.** El avión a chorro está viajando con rapidez de 500 mi/h, a 30° con la horizontal. Si el combustible se consume a 3 lb/s y el motor toma aire a 400 lb/s, mientras que el gas de escape (aire y combustible) tiene una rapidez relativa de 32 800 pies/s, determine la aceleración del avión en este instante. La resistencia del aire es $F_D = (0.7v^2)$ lb, donde la rapidez es medida en pies/s. El avión tiene un peso de 15 000 lb. *Sugerencia*: Vea el problema 15-130.



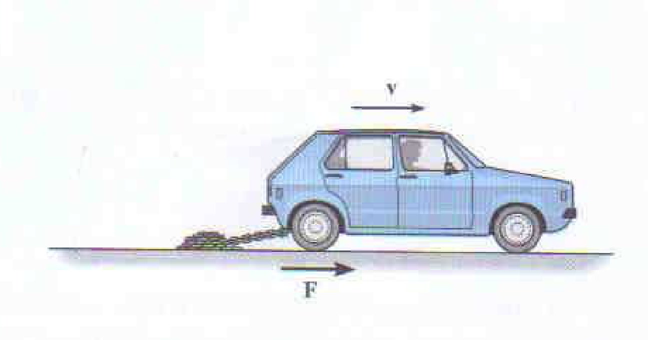

Prob. 15–131

***15-132.** El camión tiene masa de 50 Mg cuando está vacío. Cuando se encuentra descargando 5 m$^3$ de arena a razón constante de 0.8 m$^3$/s, la arena fluye por la parte posterior con rapidez de 7 m/s, medida con respecto al camión, en la dirección mostrada. Si el camión puede rodar libremente, determine su aceleración inicial justo cuando la carga empieza a vaciarse. Desprecie la masa de las ruedas y cualquier resistencia por fricción al movimiento. La densidad de la arena es $\rho_s = 1520$ kg/m$^3$.



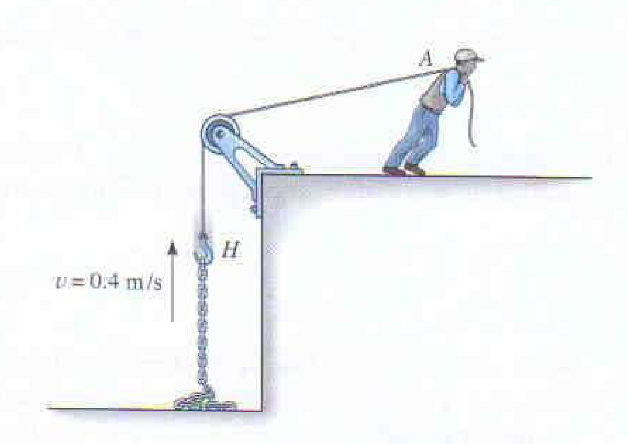

Prob. 15–132

**15-133.** El carro tiene masa $m_0$ y se usa para jalar la cadena lisa de longitud total $l$ y masa por unidad de longitud $m'$. Si originalmente la cadena está apilada, determine la fuerza de tracción $F$ que debe ser suministrada por las ruedas posteriores del carro, necesaria para mantener una rapidez constante $v$ mientras la cadena es estirada.




Prob. 15–133

**15-134.** Determine la magnitud de la fuerza **F** como una función del tiempo que debe ser aplicada al extremo de la cuerda localizado en $A$ para levantar el gancho $H$ con rapidez constante $v = 0.4$ m/s. Inicialmente la cadena está en reposo sobre el suelo. Desprecie la masa de la cuerda y el gancho. La cadena tiene masa de 2 kg/m.

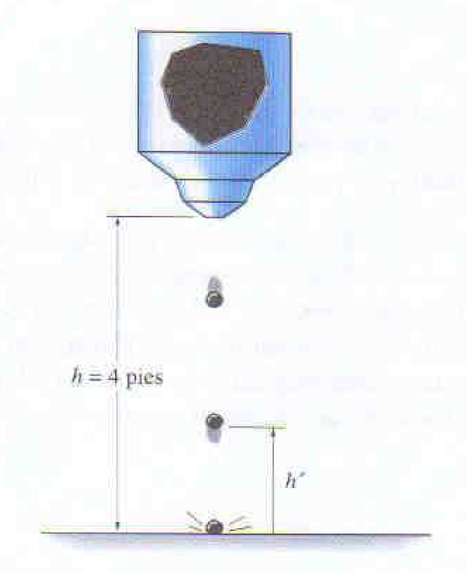



Prob. 15–134

# PROYECTOS DE DISEÑO

## 15–1D. DISEÑO DE UN SELECTOR DE ARÁNDANOS

La calidad de un arándano depende de su firmeza, que a su vez está relacionada con su capacidad de rebotar. Experimentalmente se ha encontrado que aquellos arándanos que rebotan a una altura de $2.5 \leq h' \leq 3.25$ pies, cuando se liberan del reposo a una altura de $h = 4$ pies, son apropiados para procesarlos. Usando esta información, determine el rango permisible del coeficiente de restitución de los arándanos, y luego diseñe una manera en que los buenos puedan separarse de los malos. Presente un dibujo de su diseño y muestre los cálculos de cómo se efectúa la selección y recolección de arándanos a partir del establecimiento de su geometría.




Prob. 15–1D

## REPASO DEL CAPÍTULO

- *Impulso.* Un impulso que actúa sobre una partícula es definido por

$$\mathbf{I} = \int \mathbf{F}\, dt$$

Gráficamente esto representa el área bajo el diagrama $F-t$. Si la fuerza es constante, entonces el impulso es

$$\mathbf{I} = \mathbf{F}_c(t_2 - t_1)$$

- *Principio del impulso y momentum.* Cuando la ecuación de movimiento, $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, y la ecuación cinemática, $a = dv/dt$, son combinadas, obtenemos el principio del impulso y el momentum.

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\, dt = m\mathbf{v}_2$$

Aquí, el momentum inicial de la partícula, $m\mathbf{v}_1$, más todos los impulsos que son aplicados a ésta durante el tiempo $t_1$ a $t_2$, $\Sigma\int \mathbf{F}\, dt$, es igual al momentum final $m\mathbf{v}_2$ de la partícula. Esta es una ecuación vectorial que puede ser resuelta en componentes y es usada para resolver problemas que implican fuerza, velocidad y tiempo. En su aplicación, el diagrama de cuerpo libre debe ser dibujado para tomar en cuenta todos los impulsos que actúan sobre la partícula.

- *Conservación del momentum lineal.* Si el principio del impulso y momentum es aplicado a un sistema de partículas, entonces las colisiones entre las partículas producen impulsos internos que son iguales, opuestos y colineales, y por tanto se cancelan en la ecuación. Además, si un impulso externo es pequeño, es decir, la fuerza es pequeña y el tiempo corto, entonces el impulso se clasifica como no impulsivo y puede ser despreciado. En consecuencia, el momentum para el sistema de partículas se conserva, y entonces

$$\Sigma(m\mathbf{v}_i)_1 = \Sigma(m\mathbf{v}_i)_2$$

Esta ecuación es útil para encontrar la velocidad final de una partícula cuando son ejercidos impulsos internos entre dos partículas. Si el impulso interno debe ser determinado, entonces una de las partículas es aislada y el principio del impulso y momentum se aplica a esta partícula.

- *Impacto.* Cuando entran en colisión dos partículas ($A$ y $B$), el impulso interno entre ellas es igual, opuesto y colineal. En consecuencia, la conservación del momentum para este sistema se aplica a lo largo de la línea de impacto. Si las velocidades finales son desconocidas, se necesita una segunda ecuación para encontrar la solución. Aquí, usamos el coeficiente de restitución $e$. Este coeficiente, determinado experimentalmente, depende de las propiedades físicas de las partículas en colisión. Puede ser expresado como la razón de la velocidad relativa después de la colisión a la velocidad relativa antes de la colisión,

$$e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1}$$

Si la colisión es elástica, no hay pérdida de energía y $e = 1$. Para una colisión plástica $e = 0$.

Si el impacto es oblicuo, entonces la conservación del momentum para el sistema y la ecuación del coeficiente de restitución se aplican a lo largo de la línea de impacto. También, la conservación del momentum para cada partícula se aplica perpendicularmente a esta línea, porque ningún impulso actúa sobre las partículas en esta dirección.

- *Principio del impulso y momentum angular.* El momento del momentum lineal con respecto a un eje ($z$) se denomina momentum angular. Su magnitud es

$$(H_O)_z = (d)(mv)$$

En tres dimensiones, se usa el producto cruz.

$$\mathbf{H}_O = \mathbf{r} \times m\mathbf{v}$$

El principio del impulso y momentum angular se deriva a partir de tomar momentos de la ecuación de movimiento con respecto a un eje inercial, usando $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$. El resultado es

$$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\, dt = (\mathbf{H}_O)_2$$

Esta ecuación se usa a menudo para eliminar impulsos desconocidos sumando los momentos con respecto a un eje a través del cual las líneas de acción de esos impulsos no producen momento. Por esta razón, un diagrama de cuerpo libre debe acompañar a la solución.

- *Corrientes de fluido estacionarios.* Los métodos del impulso y momentum a menudo son usados para determinar las fuerzas que ejerce un dispositivo sobre el flujo de masa de un fluido −líquido o gas. Para ello, se traza un diagrama de cuerpo libre de la masa de fluido que está en contacto con el dispositivo para identificar esas fuerzas. Se calcula también la velocidad del fluido al entrar o salir del dispositivo. Las ecuaciones de flujo estacionario implican la suma de fuerzas y momentos para determinar estas reacciones. Tales ecuaciones son

$$\Sigma F_x = \frac{dm}{dt}(v_{Bx} - v_{Ax})$$

$$\Sigma F_y = \frac{dm}{dt}(v_{By} - v_{Ay})$$

$$\Sigma M_O = \frac{dm}{dt}(d_{OB}v_B - d_{OA}v_A)$$

- *Propulsión con masa variable.* Algunos dispositivos, como un cohete, pierden masa al ser impulsados hacia adelante. Otros ganan masa, como una pala. Podemos tomar en cuenta esta pérdida o ganancia de masa aplicando el principio del impulso y momentum al dispositivo. A partir de esta ecuación, la fuerza ejercida sobre el dispositivo por el flujo de masa puede entonces ser determinada. Para una pérdida de masa, la ecuación es

$$\Sigma F_s = m\frac{dv}{dt} - v_{D/e}\frac{dm_e}{dt}$$

Y para una ganancia de masa, es

$$\Sigma F_s = m\frac{dv}{dt} + v_{D/i}\frac{dm_i}{dt}$$

REPASO 1

# Cinemática y cinética de una partícula

Todos los temas y problemas presentados en los capítulos del 12 al 15 han sido *clasificados* con el fin de proporcionar un *enfoque claro* para el aprendizaje de los diversos principios implicados en la resolución de problemas. Sin embargo, en la práctica de la ingeniería es muy importante poder *identificar* un método apropiado para lograr la solución de un problema en particular. Con respecto a esto, el lector debe entender plenamente los límites y el uso de las ecuaciones de dinámica, y poder reconocer qué ecuaciones y principios aplicar en la solución de problemas. Por estas razones, en seguida presentamos un resumen de las ecuaciones y los principios de la dinámica de partículas y proporcionamos la oportunidad de aplicarlos a una gran variedad de problemas.

**Cinemática.** Los problemas de cinemática sólo requieren el estudio de la geometría del movimiento, y no consideran las fuerzas que causan el movimiento. Cuando las ecuaciones de cinemática sean aplicadas, deberá establecerse claramente un origen fijo y seleccionar un sistema coordenado apropiado para definir la posición de la partícula. Una vez que la dirección positiva de cada eje coordenado sea establecida, las direcciones de las componentes de posición, velocidad y aceleración podrán determinarse mediante el signo algebraico de sus cantidades numéricas.

**Movimiento rectilíneo.**

*Aceleración variable.* Si una relación matemática (o gráfica) es establecida entre *dos cualesquiera* de las *cuatro variables* $s, v, a$ y $t$, entonces una tercera variable puede ser determinada resolviendo una de las siguientes ecuaciones que relacionan a las tres variables.

$$v = \frac{ds}{dt} \qquad a = \frac{dv}{dt} \qquad a\,ds = v\,dv$$

*Aceleración constante.* Al usar las siguientes ecuaciones, *asegúrese plenamente* de que la aceleración es constante:

$$s = s_0 + v_0 t + \tfrac{1}{2}a_c t^2 \qquad v = v_0 + a_c t \qquad v^2 = v_0^2 + 2a_c(s - s_0)$$

**Movimiento curvilíneo.**

*Coordenadas x, y, z.* Estas coordenadas se utilizan a menudo cuando el movimiento puede ser resuelto en las componentes horizontal y vertical. También resultan útiles en el estudio del movimiento de proyectiles ya que la aceleración de un proyectil es *siempre* hacia abajo.

$$v_x = \dot{x} \qquad a_x = \dot{v}_x$$
$$v_y = \dot{y} \qquad a_y = \dot{v}_y$$
$$v_z = \dot{z} \qquad a_z = \dot{v}_z$$

*Coordenadas n, t, b.* Estas coordenadas resultan particularmente ventajosas en el estudio de la *aceleración* de una partícula a lo largo de una trayectoria conocida. Esto es así porque las componentes $t$ y $n$ de **a** representan los cambios separados en la magnitud y la dirección de la velocidad, respectivamente, y estas componentes pueden ser formuladas fácilmente.

$$v = \dot{s}$$
$$a_t = \dot{v} = v\frac{dv}{ds}$$
$$a_n = \frac{v^2}{\rho}$$

donde

$$\rho = \left|\frac{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}}{d^2y/dx^2}\right|$$

cuando la trayectoria $y = f(x)$ es dada.

*Coordenadas r, θ, z.* Estas coordenadas se usan cuando datos relativos al movimiento angular de la coordenada radial $r$ son dados para describir el movimiento de la partícula. Además, algunas trayectorias de movimiento pueden ser convenientemente descritas usando estas coordenadas.

$$v_r = \dot{r} \qquad a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$$
$$v_\theta = r\dot{\theta} \qquad a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$$
$$v_z = \dot{z} \qquad a_z = \ddot{z}$$

**Movimiento relativo.** Si el origen de un sistema coordenado en *traslación* es establecido en la partícula $A$, entonces, para la partícula $B$,

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$$

Aquí el movimiento relativo se mide por medio de un observador fijo en el sistema coordenado en traslación.

**Cinética.** Los problemas de cinética implican el análisis de las fuerzas que causan el movimiento. Al aplicar las ecuaciones de cinética, es absolutamente necesario que las medidas del movimiento sean realizadas desde un *sistema coordenado inercial*, esto es, uno que no gire y esté fijo o se traslade con velocidad constante. Si un problema requiere la *solución simultánea* de las ecuaciones de cinética y cinemática, entonces es importante que los sistemas coordenados seleccionados para escribir cada una de las ecuaciones definan las *direcciones positivas* de los ejes de la *misma* manera.

**Ecuaciones de movimiento.** Estas ecuaciones se usan para determinar la aceleración o las fuerzas que causan el movimiento de la partícula. Si se utilizan para determinar la posición, la velocidad o el tiempo de movimiento de una partícula, entonces también la cinemática tendrá que ser considerada en la solución. Antes de aplicar las ecuaciones de movimiento, *siempre dibuje un diagrama de cuerpo libre* para identificar todas las fuerzas que actúan sobre la partícula. Establezca también la dirección de la aceleración de la partícula o sus componentes. (Un diagrama cinético puede acompañar la solución para tomar en cuenta gráficamente el vector $m\mathbf{a}$.)

$$\Sigma F_x = ma_x \qquad \Sigma F_n = ma_n \qquad \Sigma F_r = ma_r$$
$$\Sigma F_y = ma_y \qquad \Sigma F_t = ma_t \qquad \Sigma F_\theta = ma_\theta$$
$$\Sigma F_z = ma_z \qquad \Sigma F_b = 0 \qquad \Sigma F_z = ma_z$$

**Trabajo y energía.** La ecuación del trabajo y la energía representa una forma integrada de la ecuación tangencial de movimiento, $\Sigma F_t = ma_t$, combinada con cinemática ($a_t\,ds = v\,dv$). *Esta ecuación se usa para resolver problemas que implican fuerza, velocidad y desplazamiento.* Antes de aplicarla, *siempre dibuje un diagrama de cuerpo libre* para identificar las fuerzas que efectúan trabajo sobre la partícula.

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$

donde

$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 \qquad \text{(energía cinética)}$$
$$U_F = \int_{s_1}^{s_2} F\cos\theta\,ds \qquad \text{(trabajo de una fuerza variable)}$$
$$U_{F_c} = F_c\cos\theta\,(s_2 - s_1) \qquad \text{(trabajo de una fuerza constante)}$$
$$U_W = -W\,\Delta y \qquad \text{(trabajo de un peso)}$$
$$U_s = -(\tfrac{1}{2}ks_2^2 - \tfrac{1}{2}ks_1^2) \qquad \text{(trabajo de un resorte elástico)}$$

Si las fuerzas que actúan sobre la partícula son *fuerzas conservadoras*, esto es, fuerzas que *no* generan disipación de energía, como la fricción, entonces la ecuación de la conservación de la energía es aplicable. Esta ecuación es más fácil de usar que la ecuación del trabajo y la energía ya que se aplica sólo en *dos puntos* sobre la trayectoria, y *no* requiere el cálculo del trabajo efectuado por una fuerza conforme la partícula se mueve a lo largo de la trayectoria.

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

donde

$$V_g = Wy \qquad \text{(energía potencial gravitatoria)}$$

$$V_e = \tfrac{1}{2}ks^2 \qquad \text{(energía potencial elástica)}$$

Si la *potencia* desarrollada por una fuerza debe ser determinada, use

$$P = \frac{dU}{dt} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}$$

donde $\mathbf{v}$ es la velocidad de una partícula sobre la que actúa la fuerza $\mathbf{F}$.

**Impulso y momentum.** La ecuación del *impulso y momentum lineal* es una forma integrada a partir de la ecuación de movimiento, $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}$, combinada con cinemática ($\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$). *Esta ecuación se usa para resolver problemas que implican fuerza, velocidad y tiempo.* Antes de aplicarla, debemos *dibujar siempre el diagrama de cuerpo libre* para identificar todas las fuerzas que generan impulsos sobre la partícula. A partir del diagrama, las fuerzas impulsivas y no impulsivas deben ser identificadas. Recuerde que las fuerzas no impulsivas pueden ser despreciadas en el análisis durante el tiempo de impacto. Establezca también la dirección de la velocidad de la partícula justo antes y justo después que los impulsos son aplicados. Como un procedimiento alternativo, los diagramas de impulso y momentum pueden acompañar la solución para tomar en cuenta gráficamente los términos de la ecuación.

$$m\mathbf{v}_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt = m\mathbf{v}_2$$

Si varias partículas están implicadas en el problema, considere aplicar la *conservación del momentum* al sistema para eliminar los impulsos internos del análisis. Esto puede hacerse en una dirección específica, siempre que no actúen impulsos externos sobre las partículas en esa dirección.

$$\Sigma m\mathbf{v}_1 = \Sigma m\mathbf{v}_2$$

Si el problema implica impacto y el coeficiente de restitución $e$ es dado, entonces aplique la siguiente ecuación.

$$e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1} \qquad \text{(a lo largo de la línea de impacto)}$$

Recuerde que durante el impacto el principio del trabajo y la energía no puede usarse, ya que las partículas se deforman y por tanto el trabajo debido a las fuerzas internas será desconocido. Sin embargo, el principio del trabajo y la energía puede usarse para determinar la pérdida de energía durante la colisión una vez que las velocidades inicial y final de las partículas son determinadas.

El *principio del impulso y momentum angular* y el de la *conservación del momentum angular* pueden ser aplicados con respecto a un eje para *eliminar* algunos de los impulsos desconocidos que actúan sobre la partícula durante el periodo de tiempo en que su movimiento es estudiado. El estudio del diagrama de cuerpo libre de la partícula (o el diagrama de impulso) ayudará a elegir el eje de aplicación.

$$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\, dt = (\mathbf{H}_O)_2$$

$$(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2$$

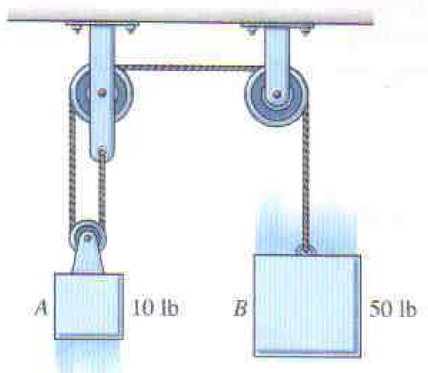
Los siguientes problemas ofrecen una oportunidad para aplicar los conceptos anteriores. Están presentados *al azar* de manera que pueda ganarse práctica en identificar los diversos tipos de problemas y desarrollar las habilidades necesarias para su solución.

## PROBLEMAS DE REPASO

**R1-1.** Un carro deportivo puede acelerar a 6 m/s$^2$ y desacelerar a 8 m/s$^2$. Si la rapidez máxima que puede alcanzar es de 60 m/s, determine el tiempo más corto que le toma viajar 900 m partiendo del reposo y luego detenerse cuando $s = 900$ m.

**R1-2.** Una partícula de 2 kg descansa sobre un plano horizontal liso y sobre ella actúan fuerzas $F_x = 0$ y $F_y = 3$ N. Si $x = 0$, $y = 0$, $v_x = 6$ m/s, y $v_y = 2$ m/s cuando $t = 0$, determine la ecuación $y = f(x)$ que describe la trayectoria.

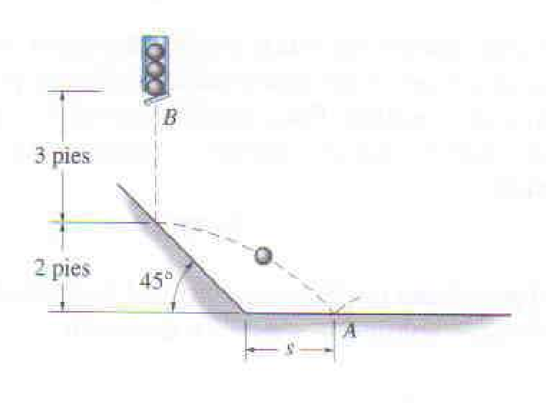
**R1-3.** Determine la velocidad de cada bloque 2 s después que son liberados del reposo. Desprecie la masa de poleas y cuerda.





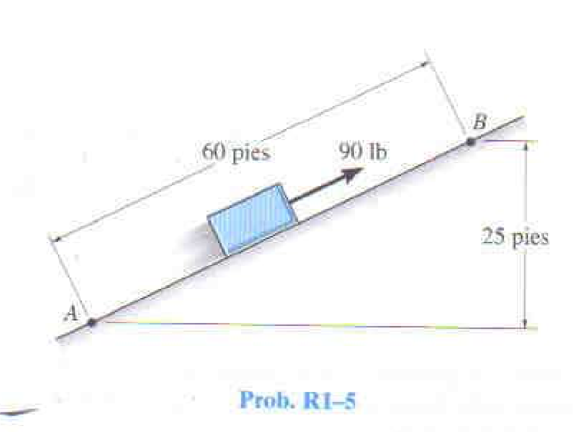

Prob. R1–3

***R1-4.** Para probar las propiedades de fabricación de bolas de acero de 2 lb, cada bola es liberada del reposo como se muestra y golpea una superficie inclinada a 45°. Si el coeficiente de restitución debe ser $e = 0.8$, determine la distancia $s$ donde la bola debe golpear el plano horizontal situado en $A$. ¿A qué rapidez golpea la bola el punto $A$?



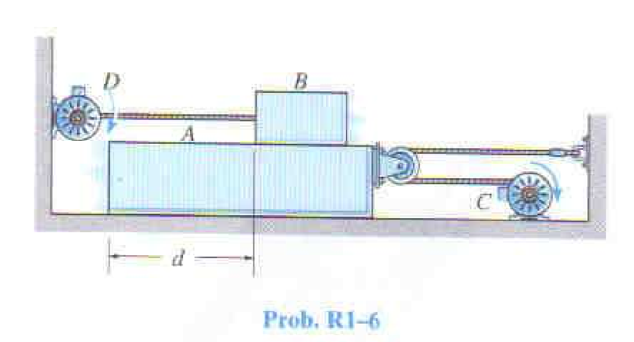

Prob. R1–4

**R1-5.** La fuerza de 90 lb es requerida para jalar el bloque de 200 lb 60 pies hacia arriba por el plano inclinado *rugoso* a velocidad constante. Si la fuerza es retirada cuando el bloque llega al punto $B$, y entonces el bloque es liberado del reposo, determine la velocidad del bloque cuando se desliza por el plano y llega al punto $A$.




Prob. R1–5

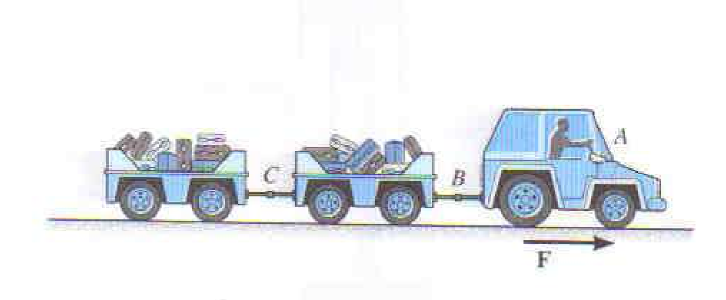
**R1-6.** El motor situado en $C$ jala el cable con aceleración $a_c = (3t^2)$ m/s$^2$, donde $t$ está en segundos. El motor colocado en $D$ jala su cable a $a_D = 5$ m/s$^2$. Si ambos motores empiezan a jalar en el mismo instante desde el reposo cuando $d = 3$ m, determine (a) el tiempo necesario para $d = 0$, y (b) la velocidad relativa del bloque $A$ con respecto al bloque $B$ cuando esto ocurre.




Prob. R1–6

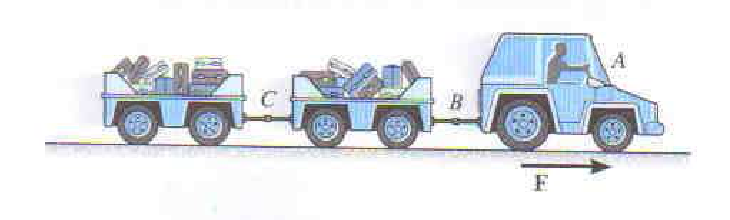
**R1-7.** Un resorte con rigidez de 5 kN/m es comprimido 400 mm. La energía almacenada en el resorte se usa para impulsar una máquina que requiere 80 W de potencia. Determine qué tiempo puede el resorte suministrar energía a la razón requerida.

***R1-8.** El camión $A$ remolcador de equipaje tiene masa de 800 kg y se usa para jalar los carros de 300 kg. Determine la tensión en los coples colocados en $B$ y $C$ si la fuerza de tracción **F** sobre el camión es $F = 480$ N. ¿Cuál es la rapidez del camión cuando $t = 2$ s, partiendo del reposo? Las ruedas de los carros pueden rodar libremente. Desprecie la masa de las ruedas.




Prob. R1–8

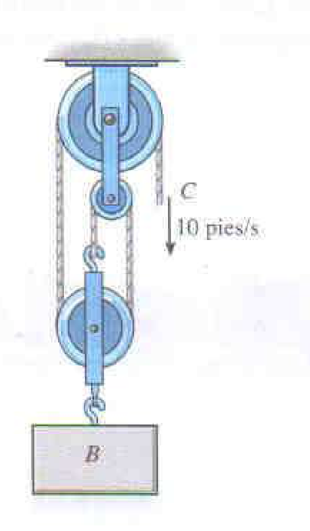
**R1-9.** El camión $A$ remolcador de equipaje tiene masa de 800 kg y se usa para jalar los carros de 300 kg. Si la fuerza de tracción **F** sobre el camión es $F = 480$ N, determine la aceleración inicial del camión. ¿Cuál es la aceleración del camión si el cople situado en $C$ falla repentinamente? Las ruedas de los carros pueden rodar libremente. Desprecie la masa de las ruedas.




Prob. R1–9

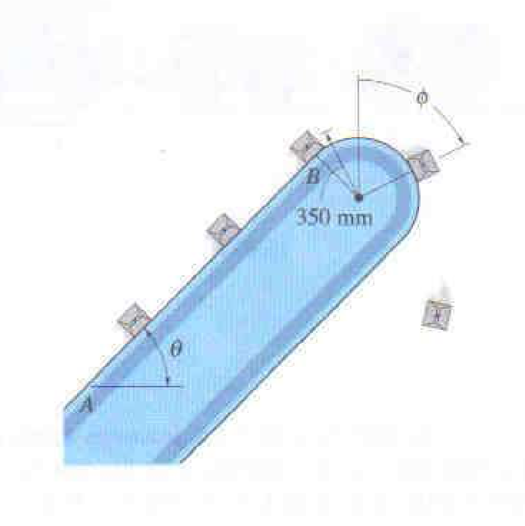
**R1-10.** Una partícula de 2 kg descansa sobre un plano horizontal liso y está sometida a las fuerzas $F_x = (8x)$ N, donde $x$ está en metros, y $F_y = 0$. Si $x = 0$, $y = 0$, $v_x = 4$ m/s, y $v_y = 6$ m/s cuando $t = 0$, determine la ecuación $y = f(x)$ que describe la trayectoria.

**R1-11.** Determine la rapidez del bloque $B$ si el extremo del cable en $C$ es jalado hacia abajo con rapidez de 10 pies/s. ¿Cuál es la velocidad relativa del bloque con respecto a $C$?

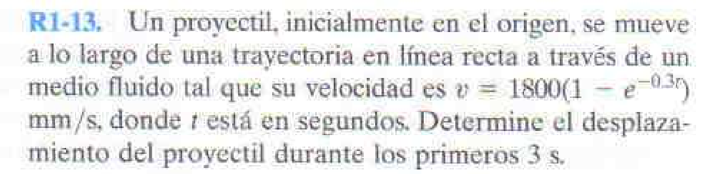



Prob. R1–11

*■**R1-12.** Los paquetes con masa de 2.5 kg viajan sobre la superficie de la banda transportadora. Si la banda parte del reposo y con aceleración constante aumenta su rapidez a 0.75 m/s en 2 s, determine el ángulo máximo de inclinación, $\theta$, de manera que ninguno de los paquetes resbale sobre la superficie inclinada $AB$ de la banda. El coeficiente de fricción estática entre la banda y cada paquete es $\mu_s = 0.3$. ¿A qué ángulo $\phi$ los paquetes empiezan a resbalar fuera de la superficie de la banda si ésta se está moviendo con rapidez constante de 0.75 m/s?




Prob. R1–12



**R1-13.** Un proyectil, inicialmente en el origen, se mueve a lo largo de una trayectoria en línea recta a través de un medio fluido tal que su velocidad es $v = 1800(1 - e^{-0.3t})$ mm/s, donde $t$ está en segundos. Determine el desplazamiento del proyectil durante los primeros 3 s.

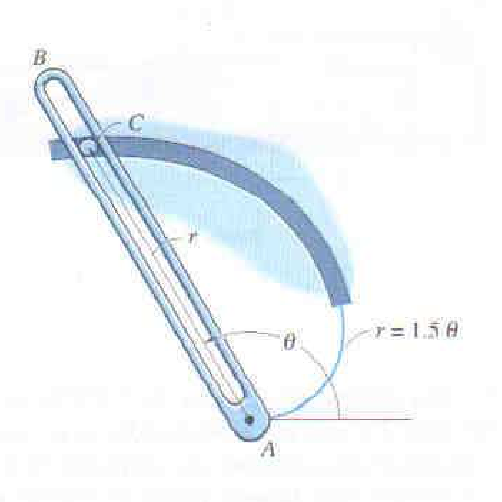
**R1-14.** La rapidez de un tren durante el primer minuto de su movimiento ha sido registrada como sigue:

| $t$ (s) | 0 | 20 | 40 | 60 |
|---|---|---|---|---|
| $v$ (m/s) | 0 | 16 | 21 | 24 |

Dibuje la gráfica $v$–$t$, aproximando la curva como segmentos de línea recta entre los puntos dados. Determine la distancia total viajada.

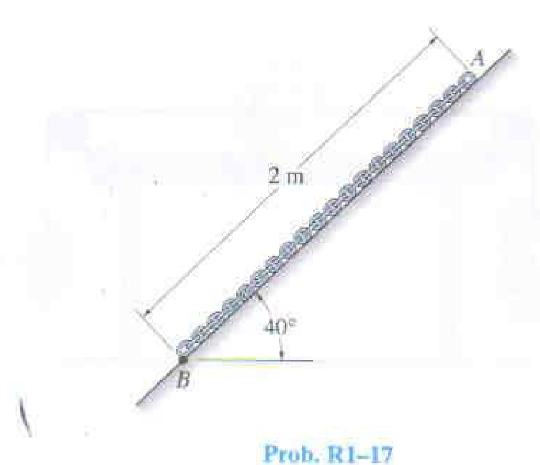
**R1-15.** Un vagón de tren, con masa de 25 Mg, viaja hacia arriba por un plano inclinado a 10° con rapidez constante de 80 km/h. Determine la potencia requerida para vencer la fuerza de gravedad.

***R1-16.** El brazo ranurado $AB$ mueve al pasador $C$ a través de la ranura en espiral descrita por la ecuación $r = (1.5\theta)$ pies, donde $\theta$ está en radianes. Si el brazo parte del reposo cuando $\theta = 60°$ y es impulsado con una razón angular de $\dot{\theta} = (4t)$ rad/s, donde $t$ está en segundos, determine las componentes radial y transversal de velocidad y aceleración del pasador cuando $t = 1$ s.



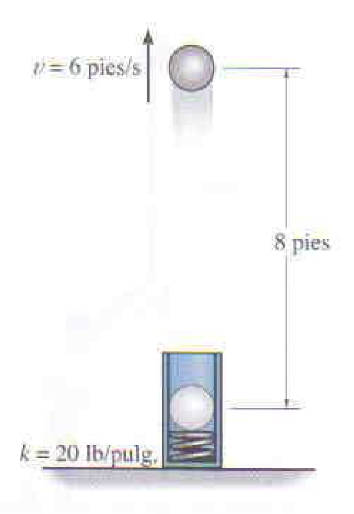

Prob. R1–16

**R1-17.** La cadena tiene masa de 3 kg/m. Si el coeficiente de fricción cinética entre la cadena y el plano es $\mu_k = 0.2$, determine la velocidad con que el extremo $A$ pasará el punto $B$ cuando la cadena se libere del reposo.

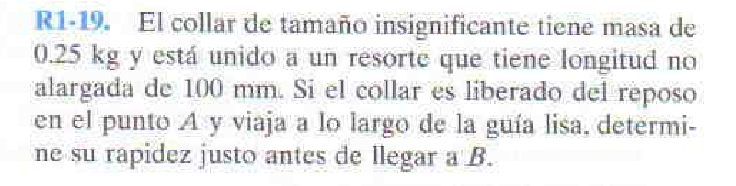



Prob. R1–17

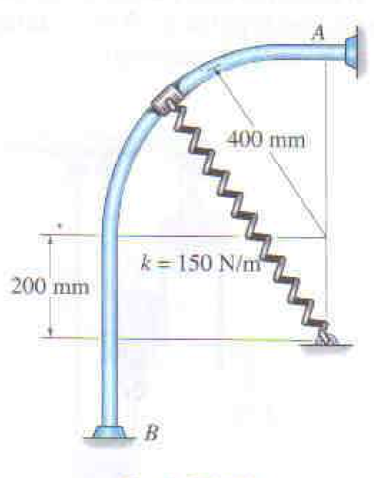
**R1-18.** La bola de 6 lb es disparada desde un tubo por un resorte que tiene rigidez $k = 20$ lb/pulg. Determine cuánto debe comprimirse el resorte para disparar la bola desde la posición comprimida hasta una altura de 8 pies, en donde tenga una velocidad de 6 pies/s.




Prob. R1–18



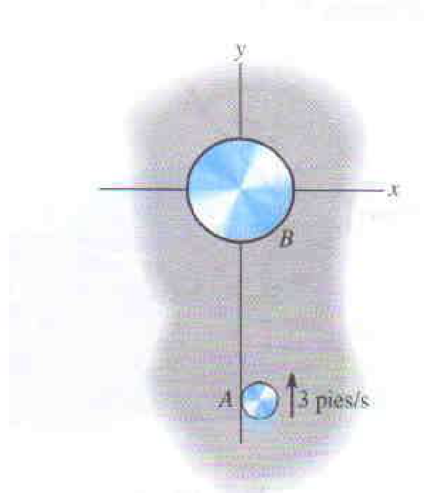
**R1-19.** El collar de tamaño insignificante tiene masa de 0.25 kg y está unido a un resorte que tiene longitud no alargada de 100 mm. Si el collar es liberado del reposo en el punto $A$ y viaja a lo largo de la guía lisa, determine su rapidez justo antes de llegar a $B$.




Prob. R1–19

*R1-20. Una caja con peso de 1500 lb es jalada a lo largo del suelo con rapidez constante una distancia de 20 pies; si el cable que la remolca forma un ángulo de 15° con la horizontal, determine la tensión en el cable y el trabajo efectuado por la fuerza remolcadora. El coeficiente de fricción cinética entre la caja y el suelo es $\mu_k = 0.55$.

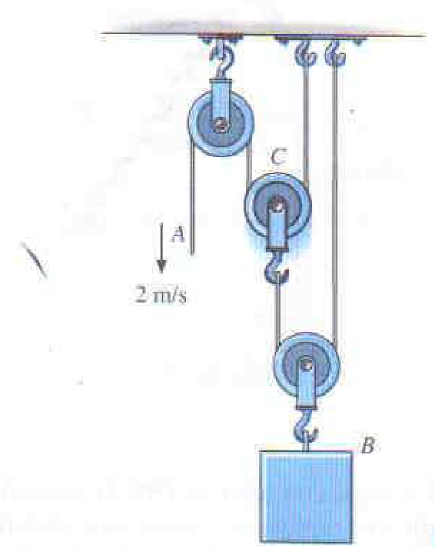
**R1-21.** El disco $A$ pesa 2 lb y se desliza sobre un plano horizontal liso con velocidad de 3 pies/s. El disco $B$ pesa 11 lb e inicialmente está en reposo. Si después del impacto $A$ tiene velocidad de 1 pie/s a lo largo del eje $x$ positivo, determine la velocidad de $B$ después del impacto. ¿Cuánta energía cinética se pierde en la colisión?




Prob. R1–21

**R1-22.** Una partícula se mueve por una trayectoria circular de 2 m de radio de manera tal que su posición como función del tiempo está dada por $\theta = (5t^2)$ rad, donde $t$ está en segundos. Determine la magnitud de la aceleración de la partícula cuando $\theta = 30°$. La partícula parte del reposo cuando $\theta = 0°$.

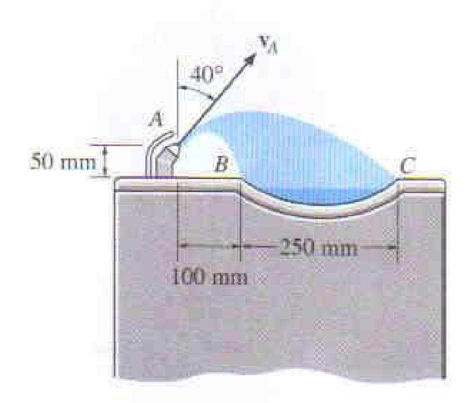
**R1-23.** Si el extremo del cable localizado en $A$ es jalado hacia abajo con rapidez de 2 m/s, determine la rapidez con que se levanta el bloque $B$.




Prob. R1–23

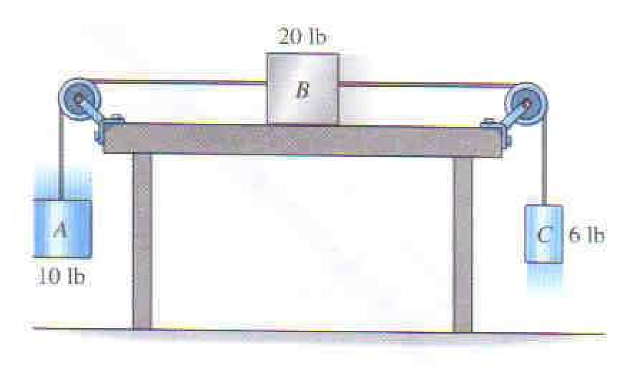
***R1-24.** Un rifle tiene masa de 2.5 kg. Si está sostenido suavemente y una bala de 1.5 g es disparada con velocidad de salida de 1400 m/s, determine la velocidad de retroceso justo después del disparo.

**R1-25.** La fuente de agua potable está diseñada de manera que la tobera se localiza a cierta distancia del borde de la pileta como se muestra. Determine la rapidez máxima y mínima con que el agua puede ser eyectada por la tobera de modo que no salpique los lados de la pileta en los puntos $B$ y $C$.



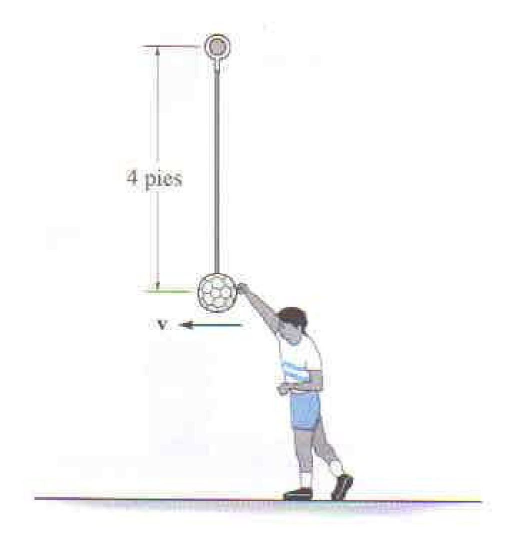

Prob. R1–25

**R1-26.** El bloque $B$ descansa sobre la superficie de una mesa para la cual el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.1$. Determine la rapidez del bloque $A$ de 10 lb después que se ha movido hacia abajo 2 pies desde el reposo. Desprecie la masa de poleas y cuerdas.



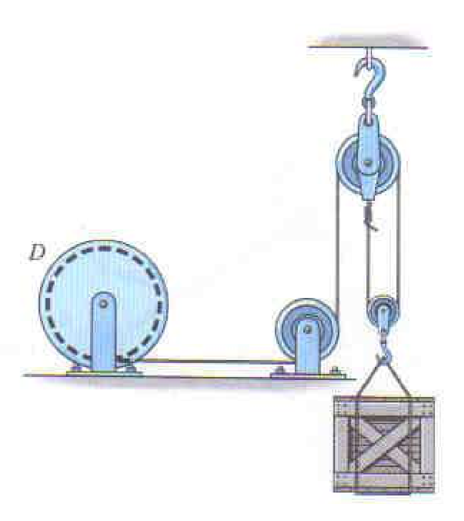

Prob. R1–26

**R1-27.** La pelota de 5 lb, unida a la cuerda, es golpeada por el niño. Determine la rapidez más pequeña que el niño debe impartir a la pelota para que ésta oscile en rededor formando un círculo vertical, sin que la cuerda quede floja.



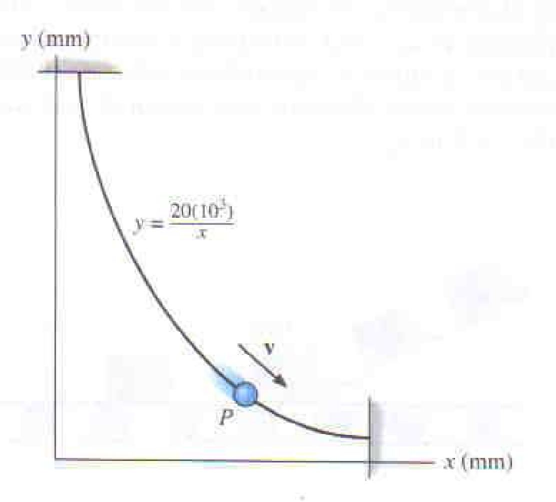

Prob. R1–27

***R1-28.** El tambor de enrollamiento $D$ está jalando al cable con aceleración de 5 m/s$^2$. Determine la tensión en el cable si la caja suspendida tiene masa de 800 kg.



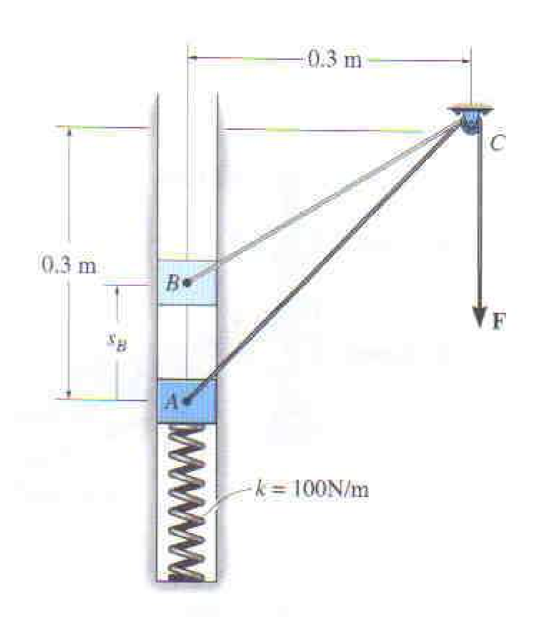

Prob. R1–28

**R1-29.** La partícula $P$ viaja con rapidez constante de 300 mm/s por la curva. Determine su aceleración cuando está localizada en el punto (200 mm, 100 mm).



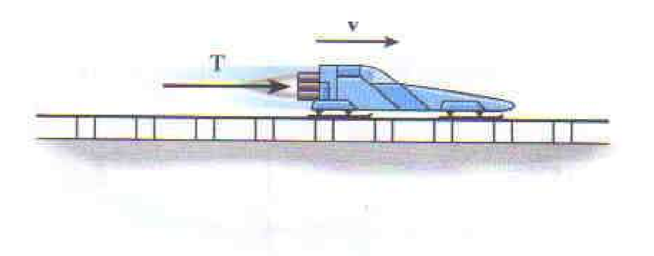

Prob. R1–29

**R1-30.** El bloque tiene masa de 0.5 kg y se mueve dentro de la ranura vertical lisa. Si el bloque parte del reposo cuando el resorte *unido* a él está en la posición no estirada en $A$, determine la fuerza vertical $F$ *constante* que debe ser aplicada a la cuerda de manera que el bloque alcance una rapidez $v_B = 2.5$ m/s cuando llegue a $B$; $s_B = 0.15$ m. Desprecie la masa de cuerda y polea.



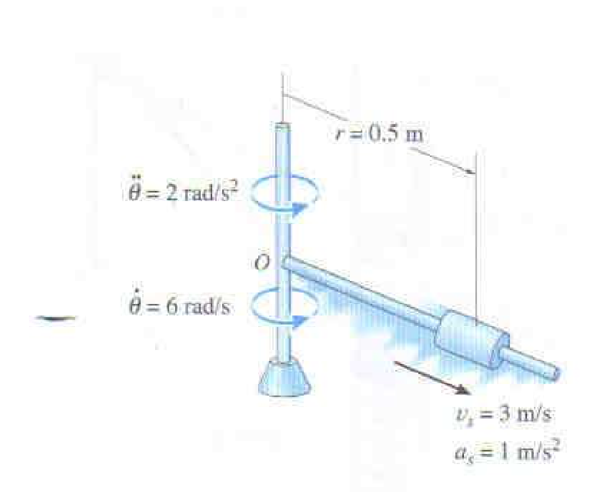

Prob. R1–30

**R1-31.** El trineo cohete tiene masa de 4 Mg y viaja desde el reposo a lo largo de la vía horizontal lisa de manera tal que mantiene una salida constante de potencia de 450 kW. Desprecie la pérdida de masa de combustible y la resistencia del aire, y determine qué tan lejos debe viajar para alcanzar una rapidez $v = 60$ m/s.



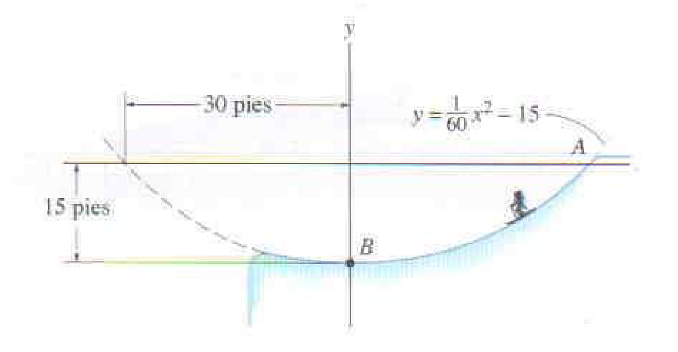

Prob. R1–31

*R1-32. El carrete tiene masa de 4 kg y se desliza a lo largo de la barra en rotación. En el instante mostrado, la razón angular de rotación de la barra es $\dot{\theta} = 6$ rad/s y esta rotación está aumentando a $\ddot{\theta} = 2$ rad/s$^2$. En ese mismo instante, el carrete tiene velocidad de 3 m/s y aceleración de 1 m/s$^2$, ambas medidas con respecto a la barra y dirigidas alejándose del centro $O$ cuando $r = 0.5$ m. Determine la fuerza de fricción radial y la fuerza normal ejercidas por la barra sobre el carrete en el instante señalado.



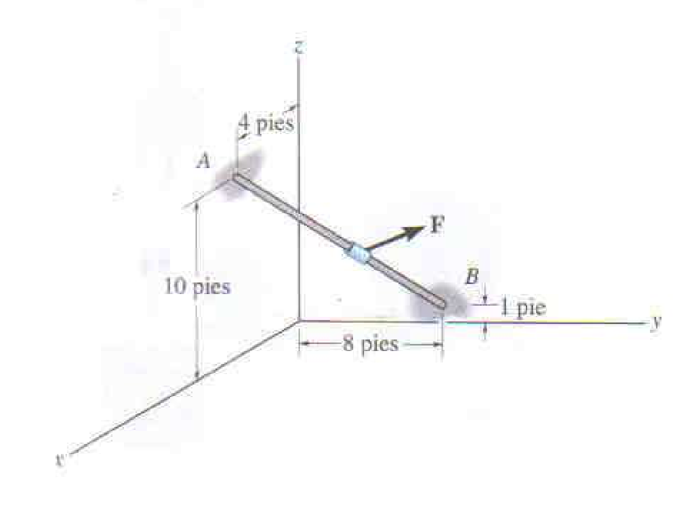

Prob. R1–32

R1-33. Una esquiadora parte del reposo en $A$ (30 pies, 0) y desciende por la suave pendiente, la cual puede ser aproximada mediante una parábola. Si la esquiadora tiene un peso de 120 lb, determine la fuerza normal que ejerce sobre el terreno en el instante en que llega al punto $B$.




Prob. R1–33

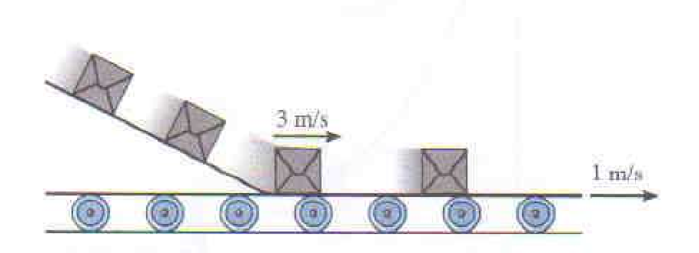
R1-34. El pequeño collar de 2 lb parte del reposo en $A$ y se desliza hacia abajo a lo largo de la barra lisa. Durante el movimiento, sobre el collar actúa una fuerza $\mathbf{F} = \{10\mathbf{i} + 6y\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}\}$ lb, donde $x, y, z$ están en pies. Determine la rapidez del collar cuando golpea la pared en el punto $B$.




Prob. R1–34

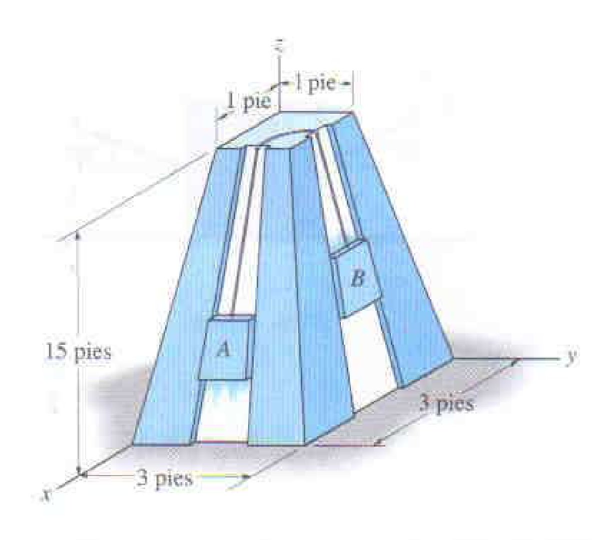
R1-35. Una bola con masa de 200 g es liberada del reposo a una altura de 400 mm por arriba de una superficie metálica fija muy grande. Si la bola rebota a una altura de 325 mm por arriba de la superficie, determine el coeficiente de restitución entre la bola y la superficie.

*R1-36. Los paquetes con masa de 6 kg se deslizan hacia abajo por una canaleta lisa hasta un transportador de banda horizontal donde se mueven con rapidez de 3 m/s. Si el coeficiente de fricción cinética entre la banda y un paquete es $\mu_k = 0.2$, determine el tiempo necesario para llevar el paquete al reposo sobre la banda si ésta se mueve en la misma dirección que el paquete con una rapidez de $v = 1$ m/s.



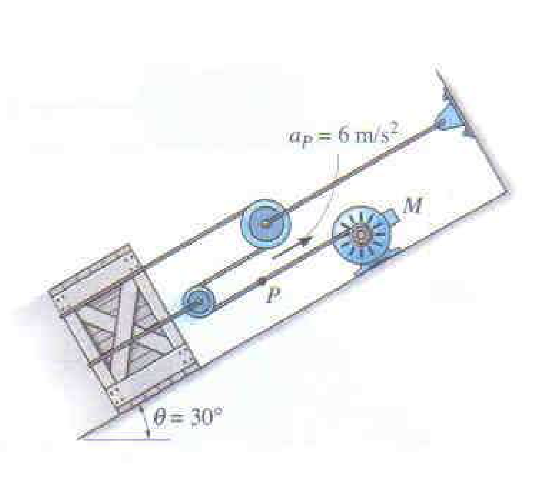

Prob. R1–36

**R1-37.** Los bloques $A$ y $B$ pesan 10 y 30 lb, respectivamente. Están conectados entre sí mediante una cuerda ligera y viajan en las ranuras sin fricción. Determine la rapidez de cada bloque después que el bloque $A$ se mueve hacia arriba 6 pies a lo largo del plano. Los bloques son liberados del reposo.




Prob. R1–37

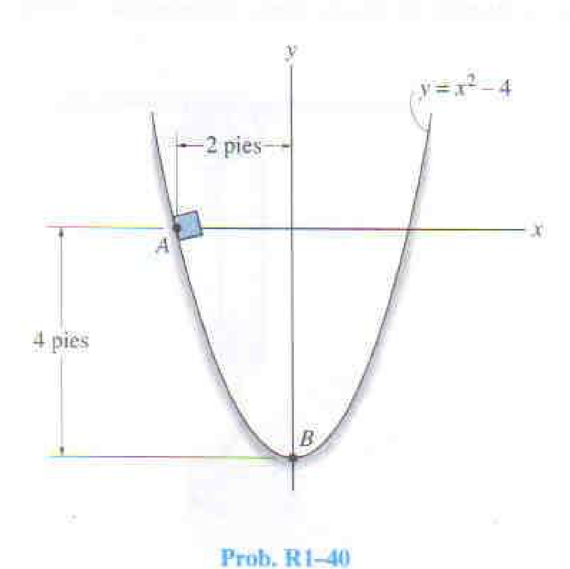
**R1-38.** El motor $M$ jala la cuerda a la que está unido con aceleración $a_p = 6\ \text{m/s}^2$. Determine la fuerza ejercida por $M$ sobre la cuerda para mover hacia arriba la caja de 50 kg por el plano inclinado. El coeficiente de fricción cinética entre la caja y el plano es $\mu_k = 0.3$. Desprecie la masa de poleas y cuerda.




Prob. R1–38

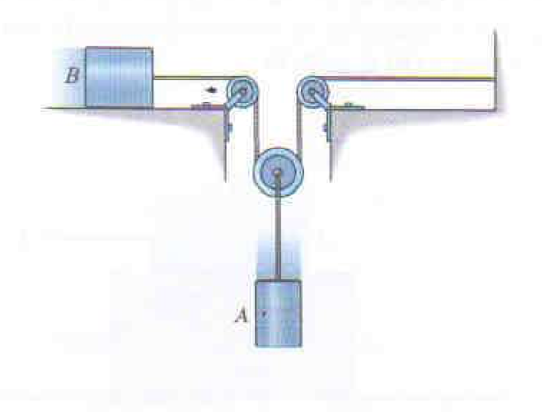
**R1-39.** Si una partícula tiene velocidad $v_0 = 12$ pies/s hacia la derecha, y aceleración constante de 2 pies/s$^2$ hacia la izquierda, determine el desplazamiento de la partícula en 10 s. Originalmente $s_0 = 0$.

***R1-40.** Un bloque de 3 lb, inicialmente en reposo en el punto $A$, se desliza por la superficie parabólica lisa. Determine la fuerza normal que actúa sobre el bloque cuando llega a $B$. Desprecie el tamaño del bloque.




Prob. R1–40

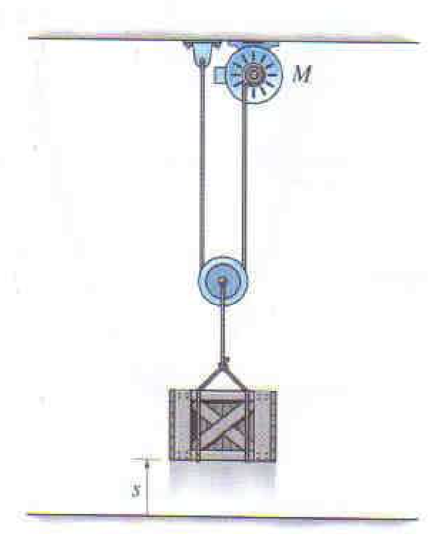
**R1-41.** En un instante dado, el bloque $A$ de 10 lb se está moviendo hacia abajo con rapidez de 6 pies/s. Determine su rapidez 2 s después. El bloque $B$ tiene un peso de 4 lb, y el coeficiente de fricción cinética entre él y el plano horizontal es $\mu_k = 0.2$. Desprecie la masa de poleas y cuerda.




Prob. R1–41

**R1-42.** Un tren de carga parte del reposo y viaja con aceleración constante de 0.5 pies/s$^2$. Después de un tiempo $t'$, mantiene rapidez constante de manera que cuando $t$ = 160 s ha viajado 2000 pies. Determine el tiempo $t'$ y dibuje la gráfica $v-t$ para el movimiento.

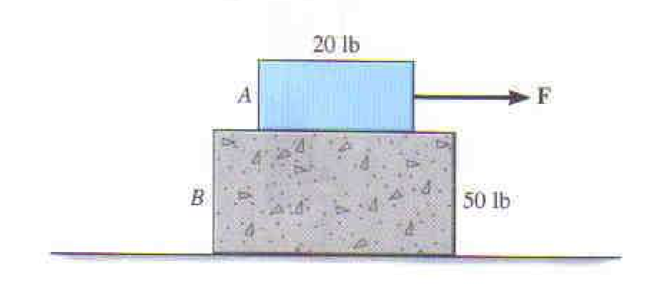
**R1-43.** La caja con peso de 50 lb es levantada por el sistema de polea y motor $M$. Si la caja parte del reposo y, por aceleración constante, alcanza una rapidez de 12 pies/s después de ser levantada 10 pies, determine la potencia que debe ser suministrada al motor en el instante $s$ = 10 pies. El motor tiene eficiencia $\epsilon = 0.74$.




Prob. R1–43

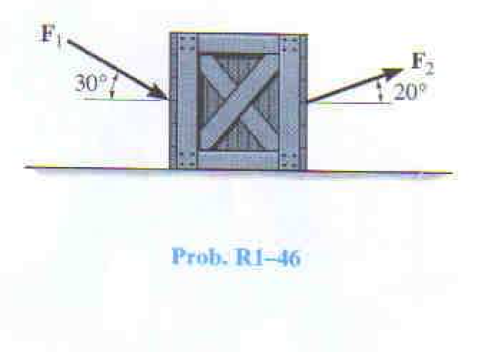
***R1-44.** Un automóvil está viajando con *rapidez constante* por una curva circular horizontal que tiene un radio $\rho$ = 750 pies. Si la magnitud de la aceleración es $a$ = 8 pies/s$^2$, determine la rapidez con que el automóvil está viajando.

**R1-45.** El bloque $B$ descansa sobre una superficie lisa. Si los coeficientes de fricción entre $A$ y $B$ son $\mu_s = 0.4$ y $\mu_k = 0.3$, determine la aceleración de cada bloque si (a) $F$ = 6 lb, y (b) $F$ = 50 lb.



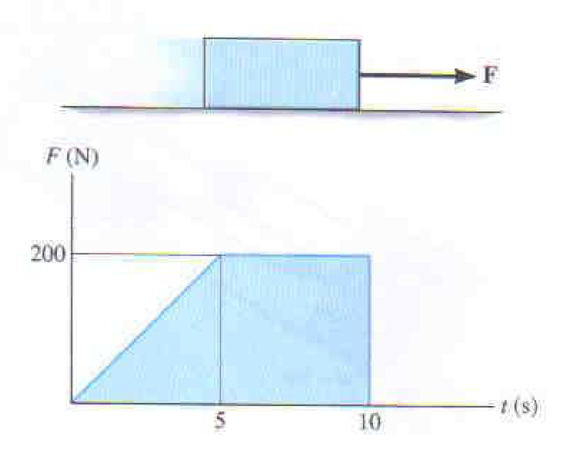

Prob. R1–45

**R1-46.** La caja de 100 kg está sometida a la acción de dos fuerzas, $F_1$ = 800 N y $F_2$ = 1.5 kN, como se muestra. Si originalmente la caja está en reposo, determine la distancia que se desliza para alcanzar una rapidez de 6 m/s. El coeficiente de fricción cinética entre la caja y la superficie es $\mu_k = 0.2$.



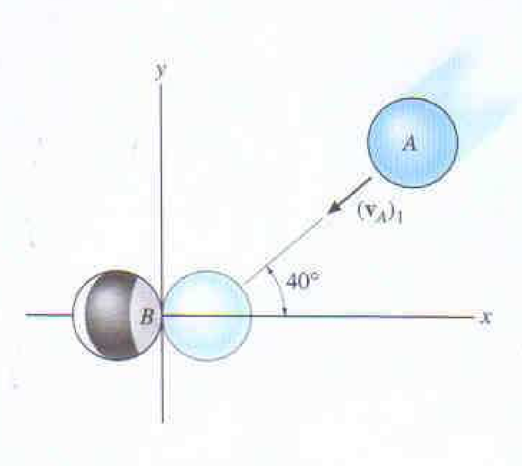

Prob. R1–46

**R1-47.** Un bloque de 20 kg está originalmente en reposo sobre una superficie horizontal para la que el coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.6$ y el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.5$. Si una fuerza horizontal $F$ es aplicada de tal manera que varía con el tiempo como se muestra, determine la rapidez del bloque en 10 s. *Sugerencia*: Primero determine el tiempo necesario para vencer la fricción y que el bloque empiece a moverse.



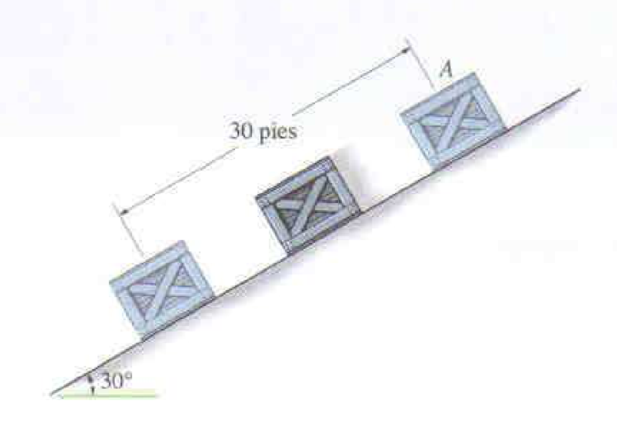

Prob. R1–47

*R1-48. Dos bolas lisas de billar $A$ y $B$ tienen masas iguales de $m = 200$ g. Si $A$ golpea a $B$ con velocidad de $(v_A)_1 = 2$ m/s como se muestra, determine sus velocidades finales justo después de la colisión. La bola $B$ está originalmente en reposo y el coeficiente de restitución es $e = 0.75$.



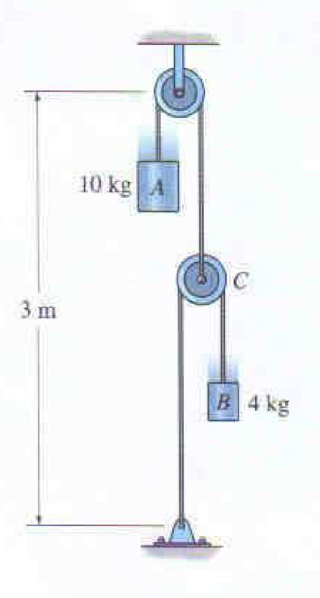

Prob. R1–48

R1-49. Si una caja de 150 lb es liberada del reposo en $A$, determine su rapidez después que se desliza 30 pies hacia abajo por el plano. El coeficiente de fricción cinética entre la caja y el plano es $\mu_k = 0.3$.




Prob. R1–49

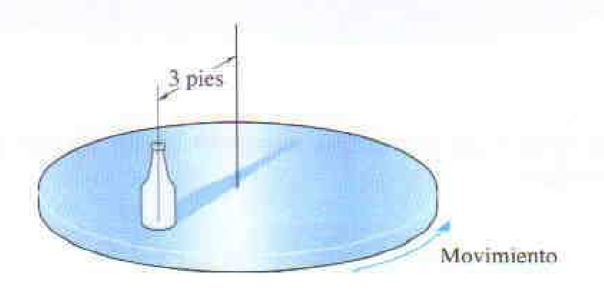
R1-50. Determine la tensión desarrollada en las dos cuerdas y la aceleración de cada bloque. Desprecie la masa de poleas y cuerdas. *Sugerencia*: Como el sistema consta de *dos* cuerdas, relacione el movimiento del bloque $A$ con el de $C$, y el movimiento del bloque $B$ con el de $C$. Luego, por eliminación, relacione el movimiento del bloque $A$ con el de $B$.



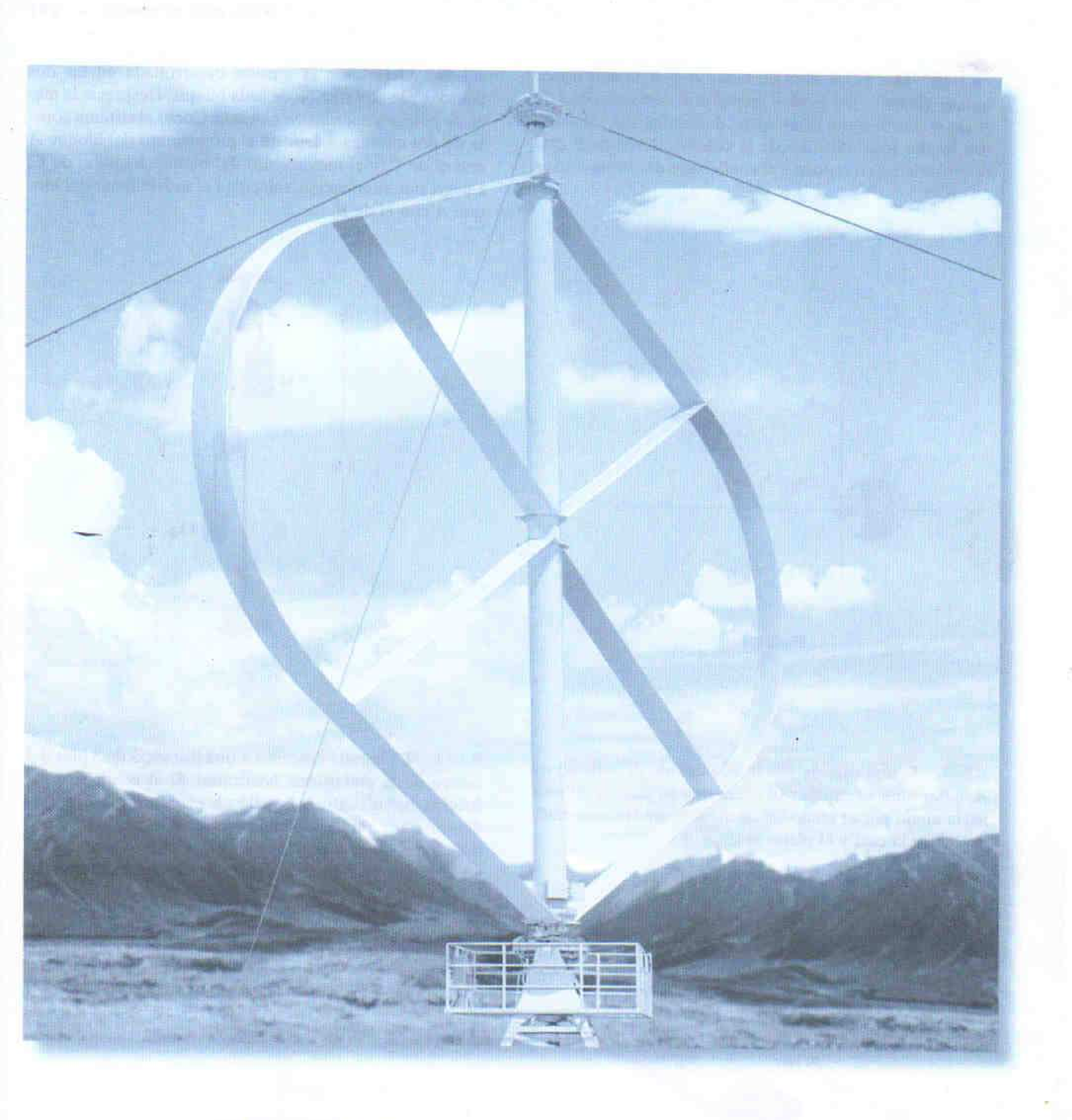

Prob. R1–50

R1-51. La botella descansa a una distancia de 3 pies del centro de la plataforma horizontal. Si el coeficiente de fricción estática entre la botella y la plataforma es $\mu_s = 0.3$, determine la rapidez máxima que puede alcanzar la botella antes de resbalar. Suponga que el movimiento angular de la plataforma está incrementándose lentamente.

*R1-52. Resuelva el problema R1−51 suponiendo que la plataforma empieza a girar desde el reposo de manera que la rapidez de la botella es incrementada a 2 pies/s$^2$.




Probs. R1–51/R1–52



La turbina de viento gira alrededor de un eje fijo con movimiento angular variable.

CAPÍTULO 16

# Cinemática plana de un cuerpo rígido

## OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Clasificar los diversos tipos de movimiento plano de un cuerpo rígido.
- Investigar la traslación de un cuerpo rígido y mostrar cómo se analiza el movimiento alrededor de un eje fijo.
- Estudiar el movimiento plano usando un análisis de movimiento absoluto.
- Proporcionar un análisis de movimiento relativo de velocidad y aceleración usando un marco de referencia en traslación.
- Mostrar cómo encontrar el centro instantáneo de velocidad cero y determinar la velocidad de un punto sobre un cuerpo usando este método.
- Proporcionar un análisis de movimiento relativo de velocidad y aceleración usando un marco de referencia en rotación.

## 16.1 Movimiento de un cuerpo rígido

En este capítulo analizaremos la cinemática plana de un cuerpo rígido. Este estudio es importante para el diseño de engranes, levas y mecanismos usados en muchas operaciones mecánicas. Además, una vez que la cinemática de un cuerpo rígido sea completamente entendida, será posible aplicar las ecuaciones de movimiento, las cuales relacionan las fuerzas sobre el cuerpo con el movimiento de éste.

Cuando todas las partículas de un cuerpo rígido se mueven a lo largo de trayectorias que son equidistantes de un plano fijo, se dice que el cuerpo experimenta *movimiento plano*. Hay tres tipos de movimiento plano de un cuerpo rígido y, en orden de complejidad creciente, son:

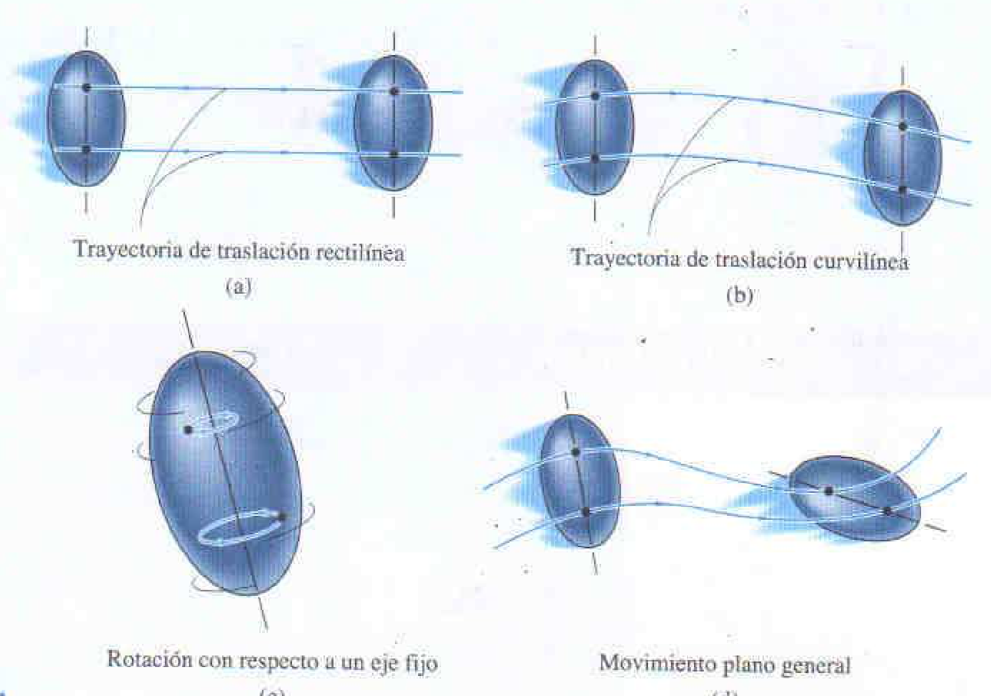



Fig. 16–1

1. *Traslación.* Este tipo de movimiento ocurre si cada segmento de línea sobre el cuerpo permanece paralelo a su dirección original durante el movimiento. Cuando las trayectorias de movimiento para dos partículas cualesquiera del cuerpo son a lo largo de líneas rectas equidistantes, el movimiento se llama *traslación rectilínea*, figura 16-1*a*. Sin embargo, si las trayectorias de movimiento pasan por líneas curvas que son equidistantes, el movimiento se llama *traslación curvilínea*, figura 16-1*b*.
2. *Rotación con respecto a un eje fijo.* Cuando un cuerpo rígido gira con respecto a un eje fijo, todas las partículas del cuerpo, excepto aquellas que se encuentran sobre el eje de rotación, se mueven por trayectorias circulares, figura 16-1*c*.
3. *Movimiento plano general.* Cuando un cuerpo está sometido a movimiento plano general, experimenta una combinación de traslación *y* rotación, figura 16-1*d*. La traslación ocurre dentro de un plano de referencia, y la rotación se efectúa con respecto a un eje perpendicular al plano de referencia.

En las siguientes secciones consideraremos con todo detalle cada uno de estos movimientos. Ejemplos de cuerpos experimentando estos movimientos se muestran en la figura 16-2.

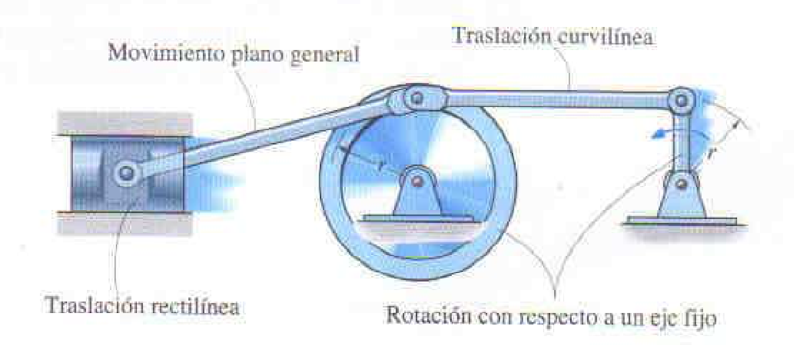



Fig. 16–2

## 16.2 Traslación

Considere un cuerpo rígido que está sometido a traslación rectilínea o curvilínea en el plano $x$–$y$, figura 16-3.

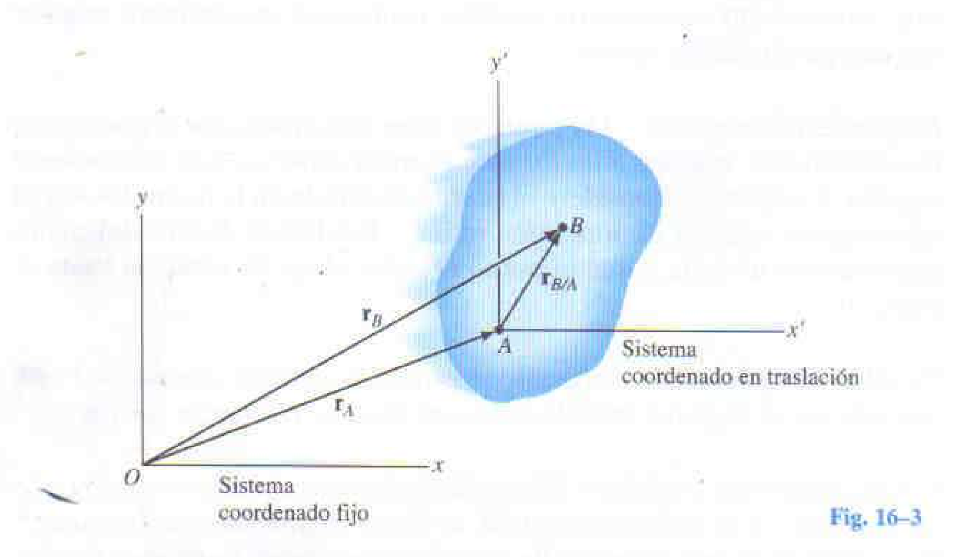



Fig. 16–3

**Posición.** La ubicación de los puntos $A$ y $B$ en el cuerpo se define desde el marco de referencia fijo $x$, $y$ usando *vectores de posición* $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$. El sistema coordenado en traslación $x'$, $y'$ está *fijo en el cuerpo* y tiene su origen localizado en el punto $A$, al que llamaremos *punto base*. La posición de $B$ con respecto a $A$ es denotada mediante el *vector de posición relativa* $\mathbf{r}_{B/A}$ ("$\mathbf{r}$ de $B$ con respecto a $A$"). Por adición vectorial,

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

**Velocidad.** Una relación entre las velocidades instantáneas de $A$ y $B$ se obtiene tomando las derivadas con respecto al tiempo de la ecuación de posición, la cual da $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + d\mathbf{r}_{B/A}/dt$. Aquí $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ denotan *velocidades absolutas* ya que estos vectores son medidos desde los ejes $x$, $y$. El término $d\mathbf{r}_{B/A}/dt = \mathbf{0}$, ya que la *magnitud* de $\mathbf{r}_{B/A}$ es *constante* por definición de un cuerpo rígido, y a causa de que el cuerpo se está trasladando la *dirección* de $\mathbf{r}_{B/A}$ es *constante*. Por tanto,

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A$$

**Aceleración.** Tomando la derivada con respecto al tiempo de la ecuación de velocidad se obtiene una relación similar entre las aceleraciones instantáneas de $A$ y $B$:

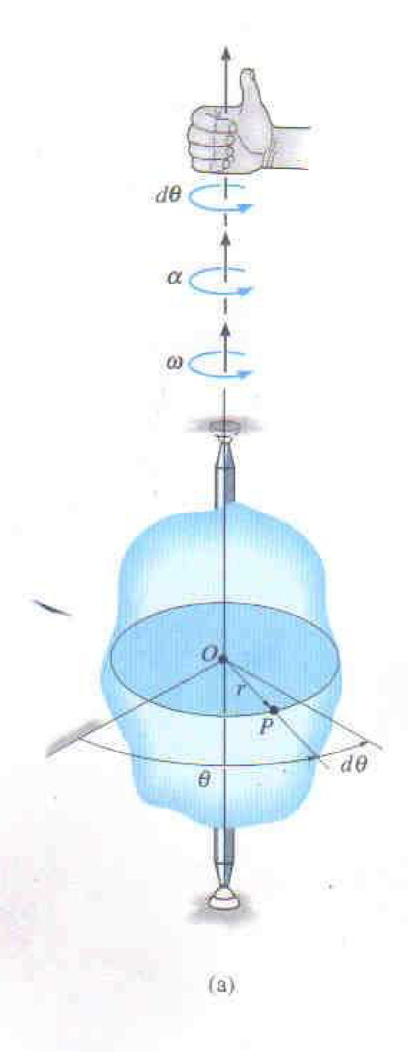
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A$$

Las dos ecuaciones anteriores indican que *todos los puntos en un cuerpo rígido sometido a traslación rectilínea o curvilínea se mueven con la misma velocidad y aceleración*. Como resultado, la cinemática del movimiento de una partícula, vista en el capítulo 12, puede usarse también para especificar la cinemática de puntos ubicados en un cuerpo rígido en traslación.

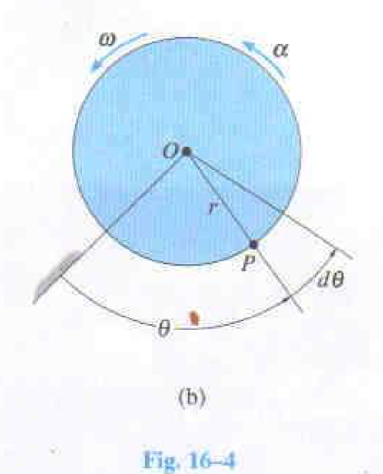


En este juego los pasajeros están sometidos a traslación curvilínea ya que el vehículo se mueve en una trayectoria circular pero siempre permanece en posición vertical.

## 16.3 Rotación con respecto a un eje fijo




(a)




(b)

Fig. 16–4

Cuando un cuerpo está girando alrededor de un eje fijo, cualquier punto $P$ ubicado en el cuerpo viaja por una *trayectoria circular*. Para estudiar este movimiento es necesario analizar primero el movimiento angular del cuerpo alrededor del eje.

**Movimiento angular.** Un punto no tiene dimensión, por lo que carece de movimiento angular. *Sólo líneas o cuerpos experimentan movimiento angular*. Por ejemplo, considere el cuerpo mostrado en la figura 16-4$a$ y el movimiento angular de una línea radial $r$ localizada dentro del plano sombreado y dirigida desde el punto $O$ sobre el eje de rotación hasta el punto $P$.

**Posición angular.** En el instante mostrado, la *posición angular* de $r$ está definida por el ángulo $\theta$, medido entre una línea de referencia *fija* y $r$.

**Desplazamiento angular.** El cambio en la posición angular, que puede ser medido como un diferencial $d\boldsymbol{\theta}$, se llama *desplazamiento angular*.* Este vector tiene una *magnitud* de $d\theta$, medido en grados, radianes o revoluciones, donde 1 rev = $2\pi$ rad. Como el movimiento es con respecto a un *eje fijo*, la dirección de $d\boldsymbol{\theta}$ es *siempre* a lo largo del eje. Específicamente, la *dirección* es determinada aplicando la regla de la mano derecha; esto es, los dedos de la mano derecha se doblan según el sentido de la rotación, de manera que en este caso el pulgar, o $d\theta$, señala hacia arriba, figura 16-4$a$. En dos dimensiones, como se muestra en la vista superior del plano sombreado, figura 16-4$b$, $\theta$ y $d\theta$ están dirigidos en sentido contrario al de las manecillas del reloj, por lo que el pulgar señala hacia fuera de la página.

**Velocidad angular.** La razón de cambio con respecto al tiempo de la posición angular se llama *velocidad angular* $\boldsymbol{\omega}$. Como $d\boldsymbol{\theta}$ ocurre durante un instante $dt$, entonces,

$$(\circlearrowleft+) \qquad \omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad (16\text{–}1)$$

Este vector tiene una *magnitud* que a menudo es medida en rad/s. Está expresado en forma escalar ya que su *dirección* es siempre a lo largo del eje de rotación, esto es, en la misma dirección que $d\boldsymbol{\theta}$, figura 16-4$a$. Al indicar el movimiento angular en el plano sombreado, figura 16-4$b$, podemos referirnos al sentido de rotación como igual o contrario al de las manecillas del reloj. Aquí hemos elegido *arbitrariamente* las rotaciones en sentido contrario al de las manecillas del reloj como *positivas*, indicado esto por medio de la flecha curva mostrada en paréntesis a un lado de la ecuación 16-1. Sin embargo, observe que el sentido direccional de $\boldsymbol{\omega}$ es en realidad hacia fuera de la página.

*En la sección 20.1 se muestra que las rotaciones finitas o los desplazamientos angulares finitos *no* son cantidades vectoriales, aunque las rotaciones diferenciales $d\boldsymbol{\theta}$ sí lo son.

**Aceleración angular.** La *aceleración angular* $\boldsymbol{\alpha}$ mide la razón de cambio con respecto al tiempo de la velocidad angular. La *magnitud* de este vector puede ser escrita como

$$(\downarrow +) \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad (16\text{–}2)$$

Usando la ecuación 16-1, es posible expresar $\alpha$ como

$$(\downarrow +) \qquad \alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad (16\text{–}3)$$

La línea de acción de $\boldsymbol{\alpha}$ es la misma que la de $\boldsymbol{\omega}$, figura 16-4*a*; sin embargo, el sentido de *dirección* depende de si $\boldsymbol{\omega}$ está aumentando o disminuyendo. En particular, si $\boldsymbol{\omega}$ está disminuyendo, entonces $\boldsymbol{\alpha}$ se llama *desaceleración angular* y tiene, por tanto, un sentido de dirección opuesto al de $\boldsymbol{\omega}$.

Eliminando $dt$ de las ecuaciones 16-1 y 16-2, obtenemos una relación diferencial entre la aceleración angular, la velocidad angular y el desplazamiento angular, esto es,

$$(\downarrow +) \qquad \alpha\, d\theta = \omega\, d\omega \qquad (16\text{–}4)$$

La similitud entre las relaciones diferenciales para el movimiento angular y las desarrolladas para el movimiento rectilíneo de una partícula ($v = ds/dt$, $a = dv/dt$, y $a\, ds = v\, dv$) deberá ser aparente.

**Aceleración angular constante.** Si la aceleración angular del cuerpo es constante, $\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{\alpha}_c$, entonces las ecuaciones 16-1, 16-2 y 16-4, al ser integradas, resultan en un conjunto de fórmulas que relacionan la velocidad angular del cuerpo, la posición angular y el tiempo. Esas ecuaciones son similares a las 12-4, 12-5 y 12-6 usadas para movimiento rectilíneo. Los resultados son

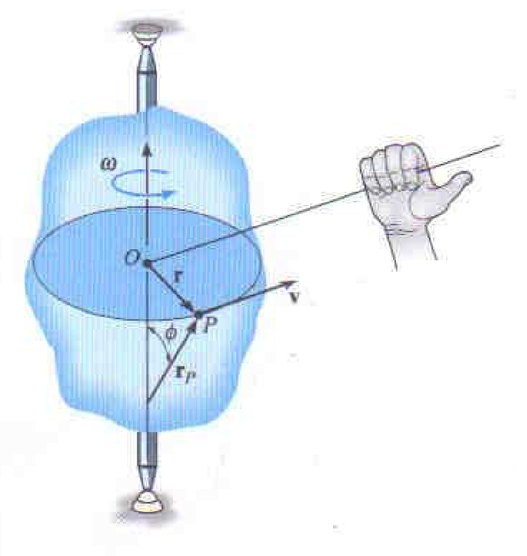
$$(\downarrow +) \qquad \omega = \omega_0 + \alpha_c t \qquad (16\text{–}5)$$

$$(\downarrow +) \qquad \theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha_c t^2 \qquad (16\text{–}6)$$

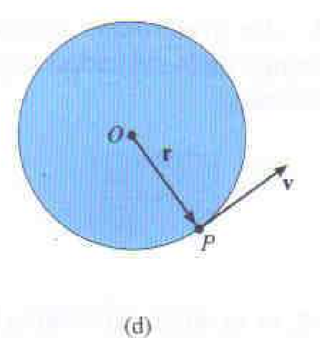
$$(\downarrow +) \qquad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0) \qquad (16\text{–}7)$$

Aceleración angular constante

Aquí $\theta_0$ y $\omega_0$ son los valores iniciales de la posición angular y de la velocidad angular del cuerpo, respectivamente.




(c)




(d)

**Fig. 16–4**

**Movimiento del punto P.** Al girar el cuerpo rígido en la figura 16-4*c*, el punto *P* viaja por una *trayectoria circular* de radio *r* y centro en el punto *O*. Esta trayectoria está contenida dentro del plano sombreado que aparece en la vista superior, figura 16-4*d*.

**Posición.** La posición de *P* es definida por el vector de posición **r**, el cual se extiende desde *O* hasta *P*.

**Velocidad.** La velocidad de *P* tiene una magnitud que puede encontrarse a partir de sus componentes coordenadas polares $v_r = \dot{r}$ y $v_\theta = r\dot{\theta}$, ecuaciones 12-25. Como *r* es constante, la componente radial $v_r = \dot{r} = 0$, y entonces $v = v_\theta = r\dot{\theta}$. Ya que $\omega = \dot{\theta}$, ecuación 16-1, la velocidad es

$$v = \omega r \tag{16–8}$$

Como se muestra en las figuras 16-4*c* y 16-4*d*, la *dirección* de **v** es *tangente* a la trayectoria circular.

Tanto la magnitud como la dirección de **v** también pueden ser determinadas usando el producto cruz de $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{r}_P$ (vea el Apéndice C). Aquí, $\mathbf{r}_P$ está dirigido desde *cualquier punto* sobre el eje de rotación hasta el punto *P*, figura 16-4*c*. Tenemos

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P \tag{16–9}$$

En esta formulación el orden de los vectores es importante, ya que el producto cruz no es conmutativo, esto es, $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P \neq \mathbf{r}_P \times \boldsymbol{\omega}$. Con respecto a esto, observe en la figura 16-4*c* cómo la dirección correcta de **v** es establecida aplicando la regla de la mano derecha. Los dedos de la mano derecha se doblan de $\boldsymbol{\omega}$ hacia $\mathbf{r}_P$. El pulgar indica la dirección correcta de **v**, que es tangente a la trayectoria en la dirección del movimiento. A partir de la ecuación C-8, la magnitud de **v** en la ecuación 16-9 es $v = \omega r_P \operatorname{sen} \phi$, y como $r = r_P \operatorname{sen} \phi$, figura 16-4*c*, entonces $v = \omega r$, lo que concuerda con la ecuación 16-8. Como caso especial, el vector **r** puede seleccionarse para $\mathbf{r}_P$. Aquí **r** se encuentra en el plano de movimiento y de nuevo la velocidad del punto *P* es

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \tag{16–10}$$

**Aceleración.** La aceleración de $P$ puede ser expresada en términos de sus componentes normal y tangencial.* Como $a_t = dv/dt$ y $a_n = v^2/\rho$, donde $\rho = r$, $v = \omega r$, y $\alpha = d\omega/dt$, tenemos

$$a_t = \alpha r \tag{16–11}$$

$$a_n = \omega^2 r \tag{16–12}$$

La *componente tangencial de aceleración*, figuras 16-4*e* y 16-4*f*, representa la razón de cambio con respecto al tiempo de la magnitud de la velocidad. Si la rapidez de $P$ aumenta, entonces $\mathbf{a}_t$ actúa en la misma dirección que $\mathbf{v}$; si la rapidez disminuye, $\mathbf{a}_t$ actúa en la dirección opuesta de $\mathbf{v}$; y finalmente, si la rapidez es constante, $\mathbf{a}_t$ es cero.

La *componente normal de aceleración* representa la razón de cambio con respecto al tiempo de la dirección de la velocidad. La *dirección* de $\mathbf{a}_n$ es siempre hacia $O$, el centro de la trayectoria circular, figuras 16-4*e* y 16-4*f*.

Igual que la velocidad, la aceleración del punto $P$ puede ser expresada en términos del producto cruz vectorial. Tomando la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 16-9, tenemos

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega} \times \frac{d\mathbf{r}_P}{dt}$$

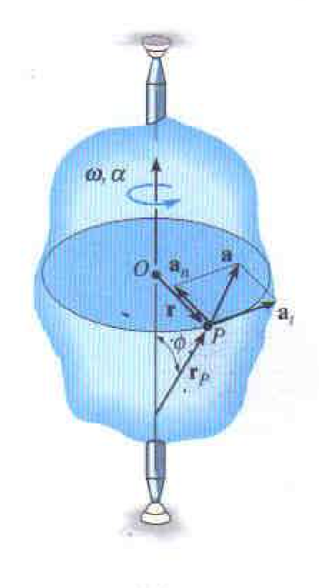
Recordando que $\boldsymbol{\alpha} = d\boldsymbol{\omega}/dt$, y usando la ecuación 16-9 ($d\mathbf{r}_P/dt = \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P$), resulta

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_P + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P) \tag{16–13}$$

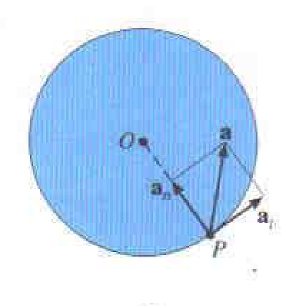
A partir de la definición de producto cruz, el primer término a la derecha tiene una magnitud $a_t = \alpha r_P \operatorname{sen} \phi = \alpha r$, y por la regla de la mano derecha, $\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_P$ tiene la dirección de $\mathbf{a}_t$, figura 16-4*e*. Igualmente, el segundo término tiene una magnitud $a_n = \omega^2 r_P \operatorname{sen} \phi = \omega^2 r$, y aplicando la regla de la mano derecha dos veces, primero para determinar el resultado de $\mathbf{v}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P$ y luego el de $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}_P$, puede verse que este resultado tiene la *misma* dirección que $\mathbf{a}_n$, mostrado en la figura 16-4*e*. Observando que ésta es también la *misma* dirección de $-\mathbf{r}$, la cual se encuentra en el plano de movimiento, podemos expresar $\mathbf{a}_n$ en una manera mucho más simple como $\mathbf{a}_n = -\omega^2\mathbf{r}$. Por consiguiente, la ecuación 16-12 puede ser identificada por sus dos componentes como

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \mathbf{a}_t + \mathbf{a}_n \\ &= \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} - \omega^2\mathbf{r}\end{aligned} \tag{16–14}$$

Como $\mathbf{a}_t$ y $\mathbf{a}_n$ son perpendiculares entre sí, de ser necesario, la magnitud de la aceleración puede determinarse a partir del teorema de Pitágoras, es decir, $a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$, figura 16-4*f*.



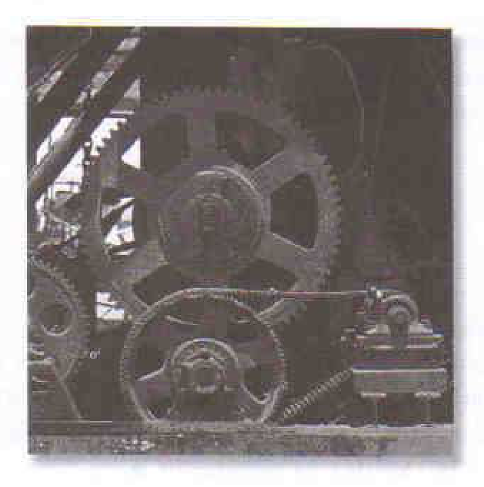

(e)




(f)

**Fig. 16–4**

*También pueden usarse coordenadas polares. Como $a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ y $a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}$, sustituyendo $\dot{r} = \ddot{r} = 0$, $\dot{\theta} = \omega$, $\ddot{\theta} = \alpha$, obtenemos las ecuaciones 16-11 y 16-12.



Los muchos engranes usados en la operación de una grúa giran todos con respecto a ejes fijos. Los ingenieros deben poder relacionar los movimientos angulares para diseñar apropiadamente este sistema de engranes.

## PUNTOS IMPORTANTES

- Un cuerpo puede experimentar dos tipos de traslación. Durante una traslación rectilínea todos los puntos siguen trayectorias paralelas en línea recta, y durante una traslación curvilínea los puntos siguen trayectorias curvas que tienen la misma forma y son equidistantes una de otra.
- Todos los puntos situados en un cuerpo en traslación se mueven con la misma velocidad y aceleración.
- Los puntos ubicados sobre un cuerpo que gira con respecto a un eje fijo siguen trayectorias circulares.
- La relación $\alpha\, d\theta = \omega\, d\omega$ se deriva de $\alpha = d\omega/dt$ y $\omega = d\theta/dt$ por eliminación de $dt$.
- Una vez conocidos los movimientos angulares $\omega$ y $\alpha$, la velocidad y la aceleración de cualquier punto sobre el cuerpo pueden ser determinadas.
- La velocidad actúa siempre tangencialmente a la trayectoria del movimiento.
- La aceleracion tiene dos componentes. La aceleración tangencial mide la razón de cambio en la magnitud de la velocidad y puede ser determinada usando $a_t = \alpha r$. La aceleración normal mide la razón de cambio en la dirección de la velocidad y puede ser determinada a partir de $a_n = \omega^2 r$.

## PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

La velocidad y la aceleración de un punto ubicado sobre un cuerpo rígido que gira alrededor de un eje fijo pueden ser determinadas usando el siguiente procedimiento.

*Movimiento angular:*

- Establezca el sentido de dirección positivo de acuerdo con el eje de rotación y muéstrelo junto a cada ecuación cinemática en que se aplique.
- Si se conoce una relación entre *dos* cualesquiera de las cuatro variables $\alpha$, $\omega$, $\theta$ y $t$, entonces puede obtenerse una tercera variable aplicando una de las siguientes ecuaciones cinemáticas que relaciona las tres variables.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad \alpha\, d\theta = \omega\, d\omega$$

- Si la aceleración angular del cuerpo es *constante*, entonces pueden usarse las siguientes ecuaciones:

$$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$$
$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha_c t^2$$
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$

- Una vez obtenida la solución, el sentido de $\theta$, $\omega$ y $\alpha$ es determinado a partir de los signos algebraicos de sus cantidades numéricas.

*Movimiento de P:*

- En muchos casos la velocidad de $P$ y sus dos componentes de aceleración pueden ser determinadas con las ecuaciones escalares

$$v = \omega r$$
$$a_t = \alpha r$$
$$a_n = \omega^2 r$$

- Si la geometría del problema es difícil de visualizar, deben ser usadas las siguientes ecuaciones vectoriales:

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$
$$\mathbf{a}_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_P = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$$
$$\mathbf{a}_n = \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_P) = -\omega^2 \mathbf{r}$$

Aquí $\mathbf{r}_P$ está dirigido desde cualquier punto sobre el eje de rotación hasta el punto $P$, mientras que $\mathbf{r}$ se encuentra en el plano del movimiento de $P$. Cualesquiera de esos vectores, junto con $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$, deben ser expresados en términos de sus componentes **i**, **j**, **k**, y, si es necesario, resolver los productos cruz usando una ampliación del determinante (vea la ecuación C-12).

## EJEMPLO 16.1

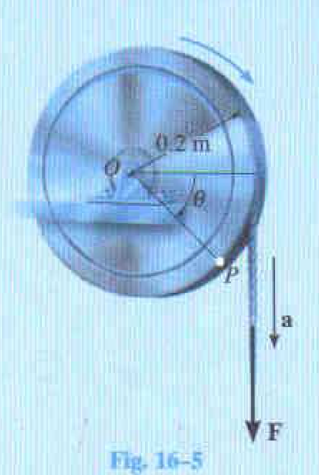



Fig. 16-5

Una cuerda es enrollada alrededor de una rueda que inicialmente está en reposo como se muestra en la figura 16-5. Si una fuerza aplicada a la cuerda le da una aceleración $a = (4t)$ m/s$^2$, donde $t$ está en segundos, determine, en función del tiempo, (a) la velocidad angular de la rueda, y (b) la posición angular de la línea $OP$ en radianes.

### Solución

*Parte (a).* La rueda está sometida a rotación con respecto a un eje fijo que pasa por el punto $O$. El punto $P$ sobre la rueda tiene entonces movimiento alrededor de una trayectoria circular, y la aceleración de este punto tiene componentes tangencial y normal. La componente tangencial es $(a_P)_t = (4t)$ m/s$^2$, ya que la cuerda está enrollada alrededor de la rueda y se mueve *tangente* a ella. Por tanto, la aceleración angular de la rueda es

$$(\circlearrowright +) \qquad (a_P)_t = \alpha r$$

$$(4t)\ \text{m/s}^2 = \alpha(0.2\ \text{m})$$

$$\alpha = 20t\ \text{rad/s}^2 \ \circlearrowright$$

Usando este resultado, la velocidad angular de la rueda $\omega$ puede ser determinada ahora a partir de $\alpha = d\omega/dt$, ya que esta ecuación relaciona $\alpha$, $t$ y $\omega$. Integrando, con la condición inicial $\alpha = 0$ en $t = 0$, obtenemos

$$(\circlearrowright +) \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} = (20t)\ \text{rad/s}^2$$

$$\int_0^\omega d\omega = \int_0^t 20t\, dt$$

$$\omega = 10t^2\ \text{rad/s} \ \circlearrowright \qquad \textit{Resp.}$$

¿Por qué no usar la ecuación 16-5 ($\omega = \omega_0 + \alpha_c t$) para obtener este resultado?

*Parte (b).* Usando este resultado, la posición angular $\theta$ de $OP$ puede encontrarse con $\omega = d\theta/dt$, ya que esta ecuación relaciona $\theta$, $\omega$ y $t$. Integrando, con la condición inicial $\theta = 0$ en $t = 0$, tenemos

$$(\circlearrowright +) \qquad \frac{d\theta}{dt} = \omega = (10t^2)\ \text{rad/s}$$

$$\int_0^\theta d\theta = \int_0^t 10t^2\, dt$$

$$\theta = 3.33t^3\ \text{rad} \qquad \textit{Resp.}$$

## EJEMPLO 16.2

El motor mostrado en la fotografía se usa para hacer girar una rueda y el ventilador contenido dentro del bastidor. Los detalles del diseño se muestran en la figura 16-6*a*. Si la polea *A* conectada al motor comienza a girar desde el reposo con aceleración angular $\alpha_A = 2\ \text{rad/s}^2$, determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración del punto *P* sobre la rueda, después que la rueda *B* ha girado una revolución. Suponga que la banda de transmisión no resbala sobre la polea ni sobre la rueda.



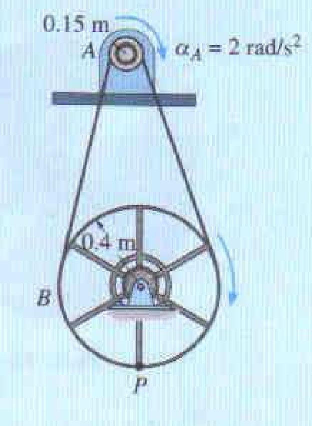
### Solución

***Movimiento angular.*** Primero convertimos la revolución a radianes. Como hay $2\pi$ radianes en una revolución, entonces

$$\theta_B = 1\ \text{rev}\left(\frac{2\pi\ \text{rad}}{1\ \text{rev}}\right) = 6.283\ \text{rad}$$

Podemos calcular la velocidad angular de la polea *A* si encontramos primero su desplazamiento angular. Como la banda no resbala, una longitud equivalente de banda *s* debe desenrollarse de la polea y de la rueda en todo momento. Así,

$$s = \theta_A r_A = \theta_B r_B; \qquad \theta_A(0.15\ \text{m}) = 6.283(0.4\ \text{m})$$
$$\theta_A = 16.76\ \text{rad}$$




(a)

Como $\alpha_A$ es constante, la velocidad angular de la polea *A* es, por tanto,

$$(\circlearrowleft +) \qquad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$
$$\omega_A^2 = 0 + 2(2\ \text{rad/s}^2)(16.76\ \text{rad} - 0)$$
$$\omega_A = 8.188\ \text{rad/s}$$

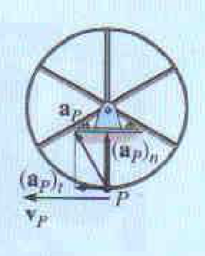
La banda tiene las mismas rapidez y componente tangencial de aceleración cuando pasa sobre la polea y la rueda. Así,

$$v = \omega_A r_A = \omega_B r_B; \qquad 8.188\ \text{rad/s}(0.15\ \text{m}) = \omega_B(0.4\ \text{m})$$
$$\omega_B = 3.070\ \text{rad/s}$$

$$a_t = \alpha_A r_A = \alpha_B r_B; \qquad 2\ \text{rad/s}^2(0.15\ \text{m}) = \alpha_B(0.4\ \text{m})$$
$$\alpha_B = 0.750\ \text{rad/s}^2$$

***Movimiento de P.*** Como se muestra en el diagrama cinemático mostrado en la figura 16-6*b*, tenemos

$$v_P = \omega_B r_B = 3.070\ \text{rad/s}(0.4\ \text{m}) = 1.23\ \text{m/s} \qquad \textit{Resp.}$$
$$(a_P)_t = \alpha_B r_B = 0.750\ \text{rad/s}^2(0.4\ \text{m}) = 0.3\ \text{m/s}^2$$
$$(a_P)_n = \omega_B^2 r_B = (3.070\ \text{rad/s})^2(0.4\ \text{m}) = 3.77\ \text{m/s}^2$$




(b)

Entonces,

$$a_P = \sqrt{(0.3)^2 + (3.77)^2} = 3.78\ \text{m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Fig. 16-6

# PROBLEMAS

**16-1.** Una rueda tiene velocidad angular inicial, en el sentido de las manecillas del reloj, de 10 rad/s y aceleración angular constante de 3 rad/s$^2$. Determine el número de revoluciones que debe experimentar para adquirir una velocidad angular, en el mismo sentido, de 15 rad/s. ¿Qué tiempo se requiere?

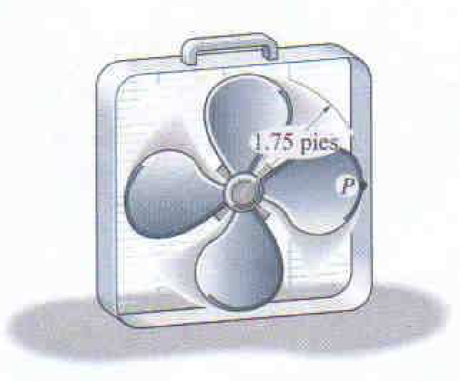
**16-2.** Un volante tiene una rapidez angular que es incrementada uniformemente desde 15 hasta 60 rad/s en 80 s. Si el diámetro de la rueda es de 2 pies, determine las magnitudes de las componentes de aceleración normal y tangencial de un punto sobre el borde de la rueda cuando $t = 80$ s, y la distancia total que el punto viaja durante el periodo de tiempo.

**16-3.** La velocidad angular del disco está definida por $\omega = (5t^2 + 2)$ rad/s, donde $t$ está en segundos. Determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración del punto $A$ sobre el disco cuando $t = 0.5$ s.



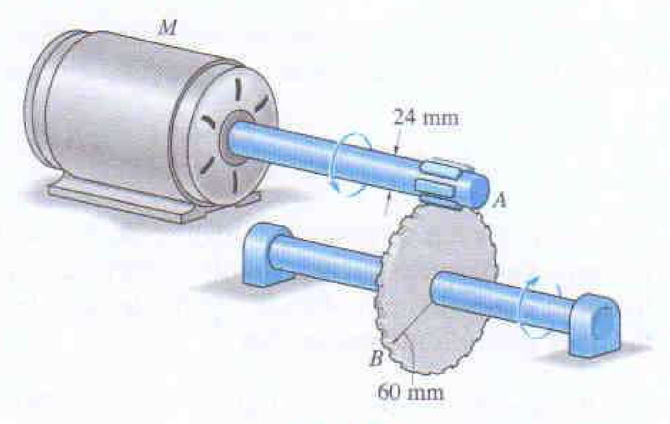

Prob. 16–3

***16-4.** Justo después que el ventilador es encendido, el motor da al aspa una aceleración angular $\alpha = (20e^{-0.6t})$ rad/s$^2$, donde $t$ está en segundos. Determine la rapidez de la punta $P$ de una de las aspas cuando $t = 3$ s. ¿Cuántas revoluciones ha efectuado el aspa en 3 s? Cuando $t = 0$, el aspa está en reposo.



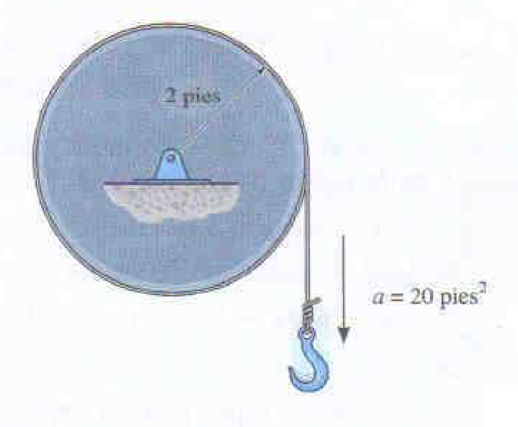

Prob. 16–4

**16-5.** Debido a un incremento de potencia, el motor $M$ hace girar la flecha con aceleración angular de $\alpha = (0.06\theta^2)$ rad/s$^2$, donde $\theta$ está en radianes. Si la flecha está girando inicialmente a $\omega_0 = 50$ rad/s, determine la velocidad angular del engrane $B$ después que la flecha experimenta un desplazamiento angular $\Delta\theta = 10$ revoluciones.



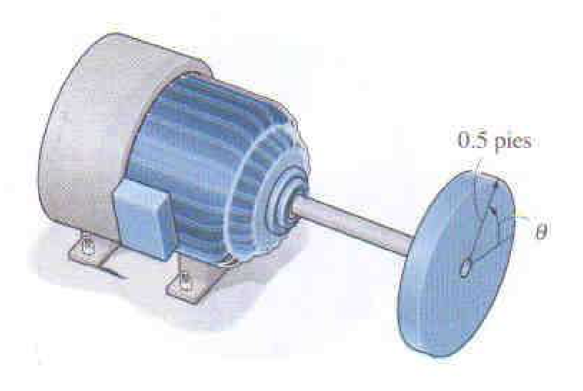

Prob. 16–5

**16-6.** El gancho se mueve desde el resposo con aceleración de 20 pies/s$^2$. Si se encuentra unido a una cuerda que está enrollada alrededor del tambor, determine la aceleración angular del tambor y su velocidad angular después que el tambor ha completado 10 revoluciones. ¿Cuántas revoluciones más girará el tambor después que ha completado primero 10 revoluciones y el gancho continúa moviéndose hacia abajo durante 4 segundos?



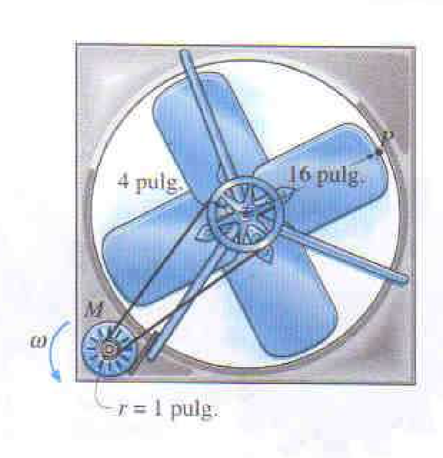

Prob. 16–6

16-7. El disco es impulsado por un motor tal que su posición angular es definida por $\theta = (20t + 4t^2)$ rad, donde $t$ está en segundos. Determine el número de revoluciones, la velocidad angular y la aceleración angular del disco cuando $t = 90$ s.



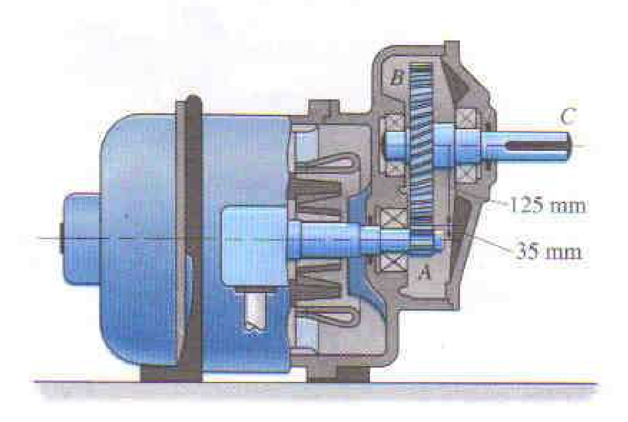

Prob. 16–7

16-9. El motor $M$ comienza a girar a una razón angular de $\omega = 4(1 - e^{-t})$ rad/s, donde $t$ está en segundos. Si las poleas y el ventilador tienen los radios mostrados, determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración del punto $P$ sobre el aspa del ventilador cuando $t = 0.5$ s. ¿Cuál es la rapidez máxima de este punto?




Prob. 16–9

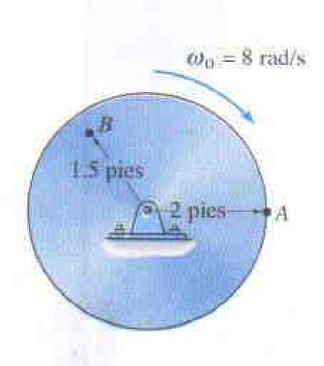
*16-8. El engrane piñón $A$ colocado en la flecha del motor recibe una aceleración angular constante $\alpha = 3$ rad/s$^2$. Si los engranes $A$ y $B$ tienen las dimensiones mostradas, determine la velocidad angular y el desplazamiento angular de la flecha de salida $C$ cuando $t = 2$ s partiendo del reposo. La flecha está fija a $B$ y gira con él.




Prob. 16–8

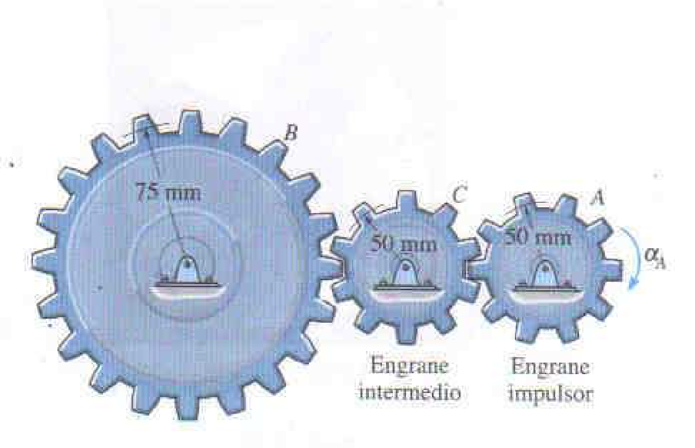
16-10. El disco está girando originalmente a $\omega_0 = 8$ rad/s. Si se encuentra sometido a una aceleración angular constante de $\alpha = 6$ rad/s$^2$, determine las magnitudes de la velocidad y de las componentes $n$ y $t$ de la aceleración del punto $A$ en el instante $t = 0.5$ s.

16-11. El disco está girando originalmente a $\omega_0 = 8$ rad/s. Si se encuentra sometido a una aceleración angular constante de $\alpha = 6$ rad/s$^2$, determine las magnitudes de la velocidad y las componentes $n$ y $t$ de aceleración del punto $B$ justo después que la rueda efectúa 2 revoluciones.



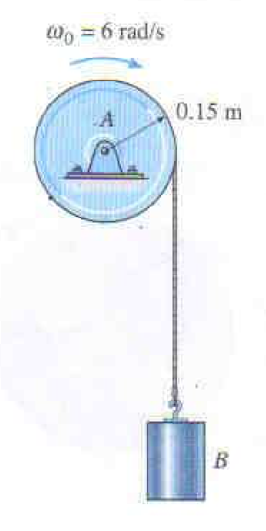

Probs. 16–10/11

*16-12. Cuando sólo dos engranes están acoplados, el engrane impulsor $A$ y el engrane impulsado $B$ giran siempre en direcciones opuestas. Para que giren en la *misma dirección* se usa un engrane intermedio $C$. En el caso mostrado, determine la velocidad angular del engrane $B$ cuando $t = 5$ s, si el engrane $A$ parte del reposo y tiene una aceleración angular de $\alpha_A = (3t + 2)$ rad/s², donde $t$ está en segundos.



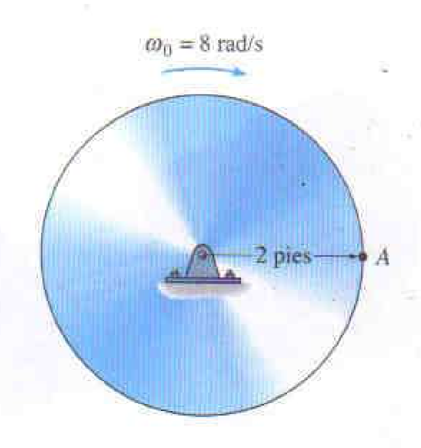

Prob. 16–12

16-13. Un motor da al disco $A$ una aceleración angular de $\alpha_A = (0.6t^2 + 0.75)$ rad/s², donde $t$ está en segundos. Si la velocidad angular inicial del disco es $\omega_0 = 6$ rad/s, determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración del bloque $B$ cuando $t = 2$ s.



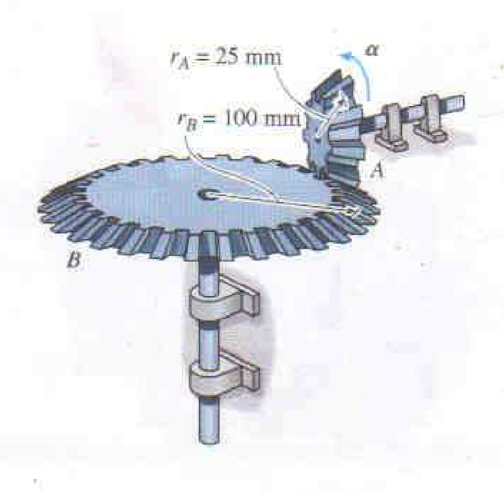

Prob. 16–13

16-14. El disco está girando originalmente a $\omega_0 = 8$ rad/s. Si se encuentra sometido a una aceleración angular constante $\alpha_c = 6$ rad/s², determine las magnitudes de la velocidad y las componentes $n$ y $t$ de la aceleración del punto $A$ en el instante $t = 3$ s.




Prob. 16–14

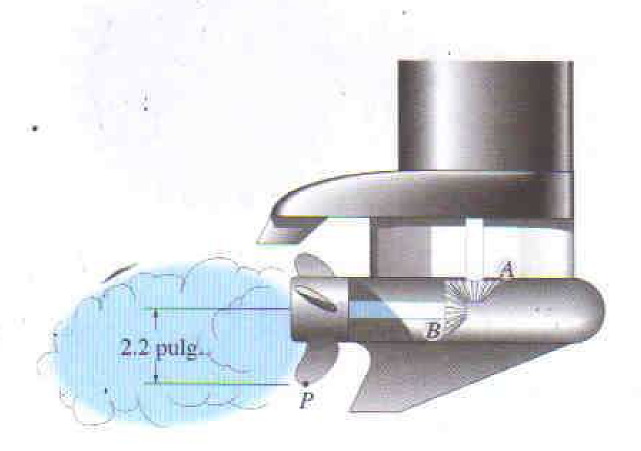
16-15. El engrane $A$ está acoplado con el engrane $B$ como se muestra. Si $A$ parte del reposo y tiene aceleración angular constante de $\alpha_A = 2$ rad/s², determine el tiempo necesario para que $B$ alcance una velocidad angular de $\omega_B = 50$ rad/s.




Prob. 16–15

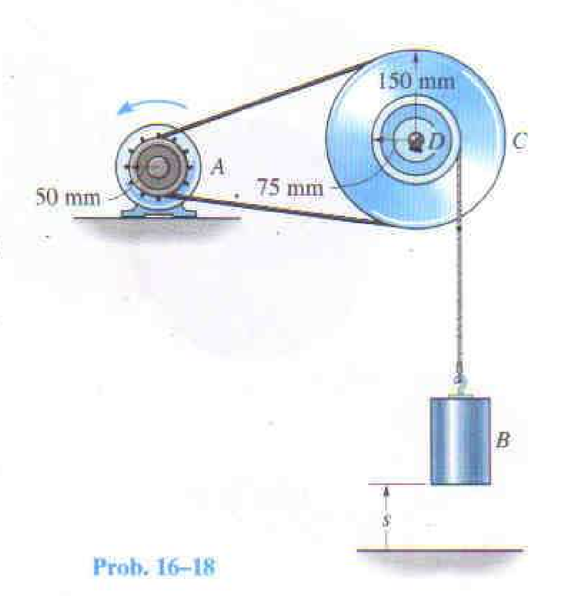
***16-16.** El engrane $A$ sobre la flecha impulsora del motor fuera de borda tiene radio $r_A = 0.7$ pulg. y el engrane piñón $B$ acoplado sobre la flecha de la hélice tiene radio $r_B = 1.4$ pulg. Determine la velocidad angular de la hélice en $t = 1.3$ s si la flecha impulsora gira con aceleración angular $\alpha = (300\sqrt{t})$ rad/s$^2$, donde $t$ está en segundos. La hélice está originalmente en reposo y el marco del motor no se mueve.

**16-17.** Para el motor fuera de borda referido en el problema 16-16, determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración de un punto $P$ ubicado sobre la punta de la hélice en el instante $t = 0.75$ s.



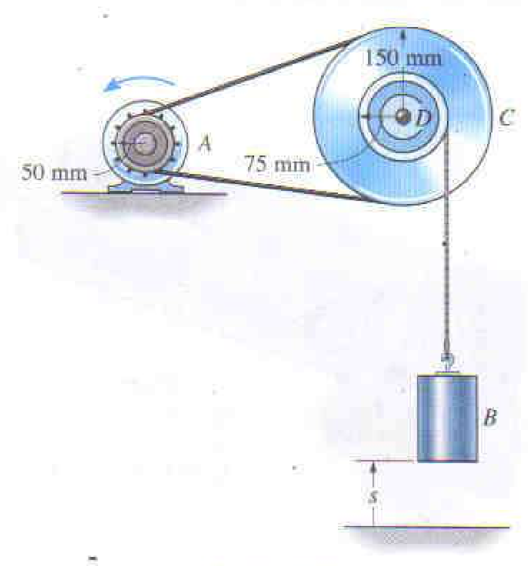

Probs. 16–16/17

**16-18.** Partiendo del reposo cuando $s = 0$, la polea $A$ recibe una aceleración angular $\alpha = (6\theta)$ rad/s$^2$, donde $\theta$ está en radianes. Determine la rapidez del bloque $B$ cuando se ha levantado $s = 6$ m. La polea tiene un cubo interior $D$ que está fijo a $C$ y gira con él.



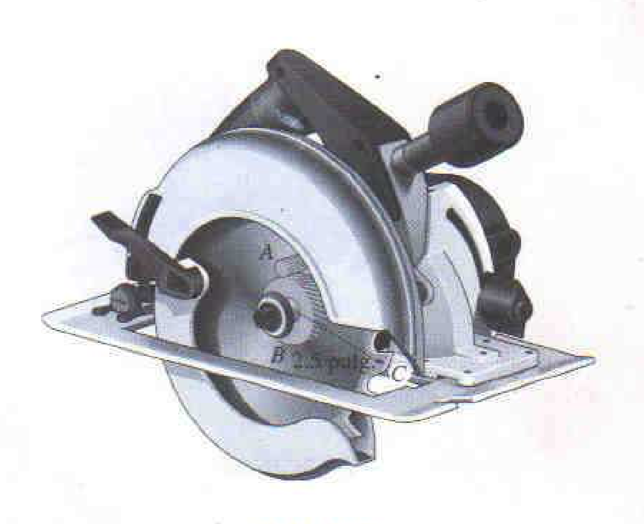

Prob. 16–18

**16-19.** Partiendo del reposo cuando $s = 0$, la polea $A$ recibe una aceleración angular constante $\alpha_c = 6$ rad/s$^2$. Determine la rapidez del bloque $B$ cuando se ha levantado $s = 6$ m. La polea tiene un cubo interior $D$ que está fijo a $C$ y gira con él.



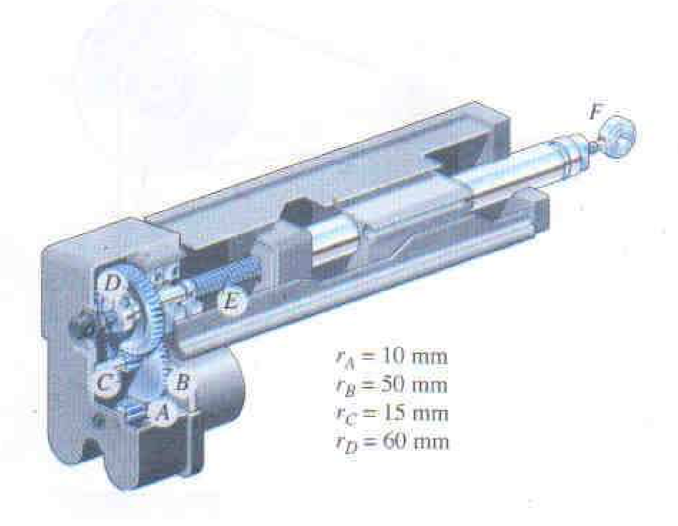

Prob. 16–19

***16-20.** Inicialmente, el motor de la sierra circular gira su flecha a $\omega = (20t^{2/3})$ rad/s, donde $t$ está en segundos. Si los radios de los engranes $A$ y $B$ son de 0.25 pulg. y 1 pulg., respectivamente, determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración de un diente $C$ sobre la hoja de la sierra después que la flecha impulsora gira $\theta = 5$ rad partiendo del reposo.



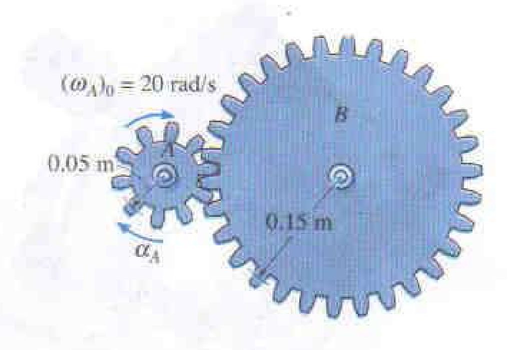

Prob. 16–20

**16-21.** Debido al tornillo situado en $E$, el impulsor proporciona movimiento lineal al brazo colocado en $F$ cuando el motor hace girar al engrane instalado en $A$. Si los engranes tienen los radios indicados en la figura, y el tornillo en $E$ tiene un paso $p = 2$ mm, determine la rapidez en $F$ cuando el motor hace girar a $A$ a $\omega_A = 20$ rad/s. *Sugerencia*: El paso del tornillo indica la cantidad de avance del tornillo por cada revolución completa.



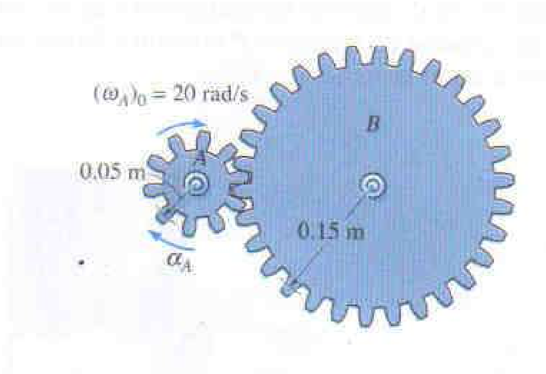

**Prob. 16-21**

**16-22.** Un motor le imparte al engrane $A$ una aceleración angular de $\alpha_A = (0.25\theta^3 + 0.5)$ rad/s², donde $\theta$ está en radianes. Si este engrane está girando inicialmente a $(\omega_A)_0 = 20$ rad/s, determine la velocidad angular del engrane $B$ después que $A$ experimenta un desplazamiento angular de 10 revoluciones.



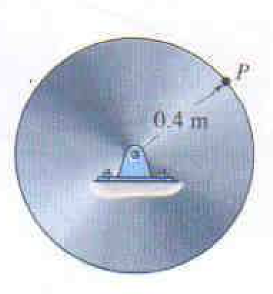

**Prob. 16-22**

**16-23.** Un motor da al engrane $A$ una aceleración angular de $\alpha_A = (4t^3)$ rad/s², donde $t$ está en segundos. Si este engrane está girando inicialmente a $(\omega_A)_0 = 20$ rad/s, determine la velocidad angular del engrane $B$ cuando $t = 2$ s.



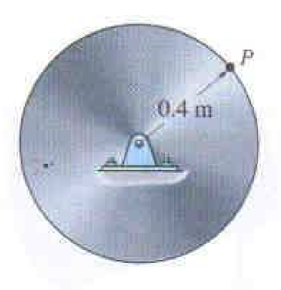

**Prob. 16-23**

***16-24.** El disco parte del reposo y recibe una aceleración angular $\alpha = (10\theta^{1/3})$ rad/s², donde $\theta$ está en radianes. Determine la velocidad angular del disco y su desplazamiento angular cuando $t = 4$ s.



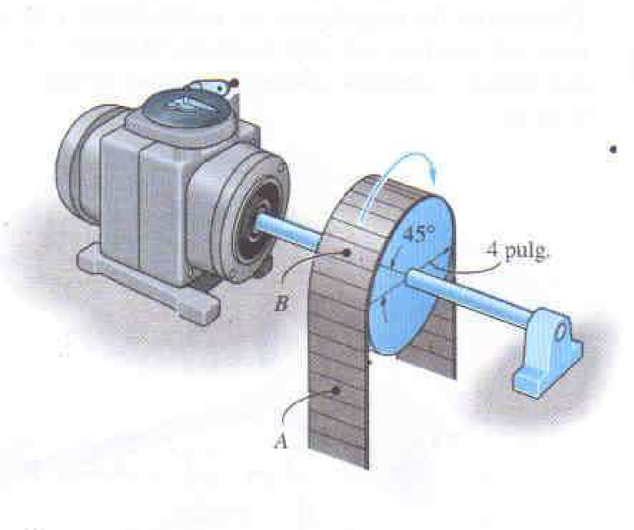

**Prob. 16-24**

**16-25.** El disco parte del reposo y recibe una aceleración angular $\alpha = (10\theta^{1/3})$ rad/s$^2$, donde $\theta$ está en radianes. Determine las magnitudes de aceleración de las componentes normal y tangencial de un punto $P$ sobre el borde del disco cuando $t = 4$ s.



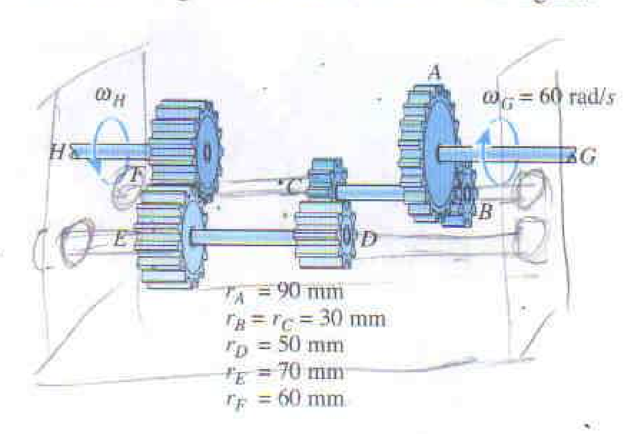

Prob. 16–25.

**16-26.** Si la velocidad angular del tambor es incrementada uniformemente de 6 rad/s cuando $t = 0$ a 12 rad/s cuando $t = 5$ s, determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración de los puntos $A$ y $B$ sobre la banda cuando $t = 1$ s. En este instante, los puntos están ubicados como se muestra.



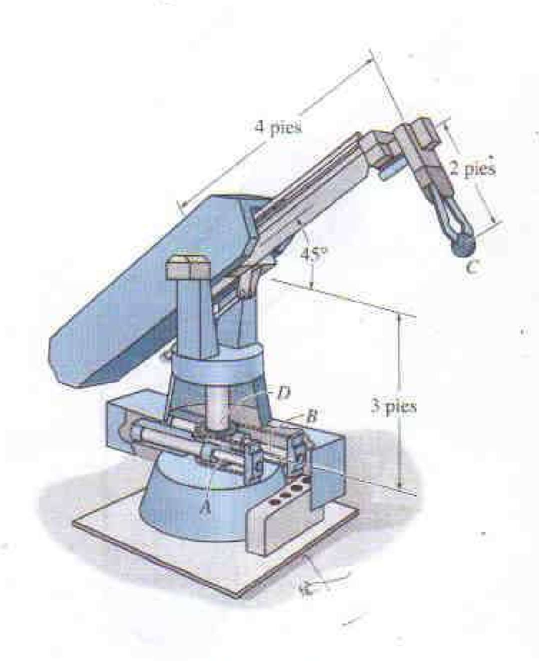

Prob. 16–26

**16-27.** La operación de "reversa" para la transmisión automática de tres velocidades está ilustrada esquemáticamente en la figura. Si la flecha $G$ del cigüeñal está girando con rapidez angular de 60 rad/s, determine la rapidez angular de la flecha impulsora $H$. Cada uno de los engranes gira con respecto a un eje fijo. Observe que los engranes $A$ y $B$, $C$ y $D$, $E$ y $F$ están acoplados. Los radios de cada uno de esos engranes están indicados en la figura.



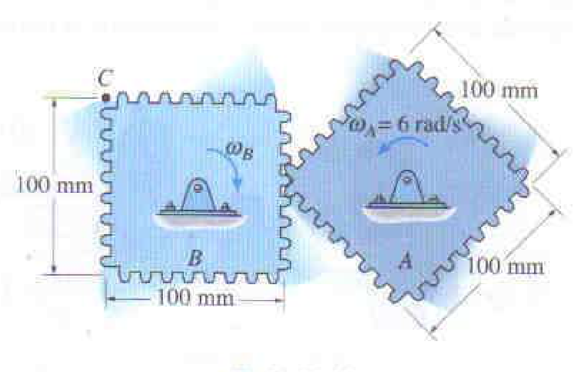

Prob. 16–27

***16-28.** La rotación del brazo robótico ocurre debido a un movimiento lineal de los cilindros hidráulicos $A$ y $B$. Si el cilindro $A$ se está extendiendo a razón constante de 0.5 pies/s mientras $B$ se mantiene fijo, determine la magnitud de la velocidad y la aceleración de la parte $C$ sostenida en el agarre del brazo. El engrane situado en $D$ tiene radio de 0.10 pies.



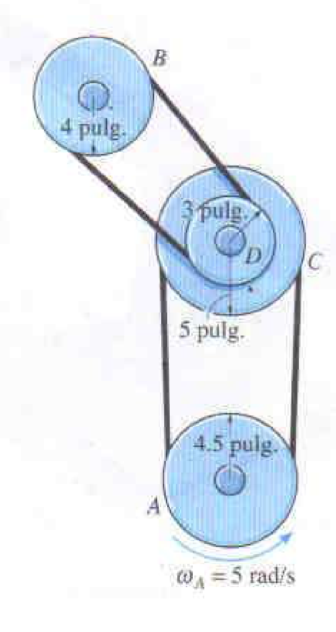

Prob. 16–28

**16-29.** En el instante mostrado, el engrane $A$ está girando con velocidad angular constante $\omega_A = 6$ rad/s. Determine la máxima velocidad angular del engrane $B$ y la máxima rapidez del punto $C$.



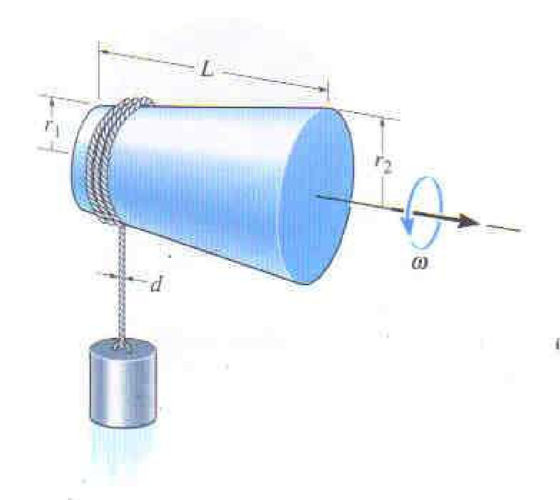

Prob. 16–29

**16-30.** En una planta textil, un molino usa el arreglo de banda y polea mostrado para transmitir potencia. Cuando $t = 0$, un motor eléctrico hace girar la polea $A$ con velocidad angular $\omega_A = 5$ rad/s. Si esta polea está sometida a aceleración angular constante de 2 rad/s$^2$, determine la velocidad angular de la polea $B$ después que gira 6 revoluciones. El cubo situado en $D$ está *conectado* rígidamente a la polea $C$ y gira con ella.



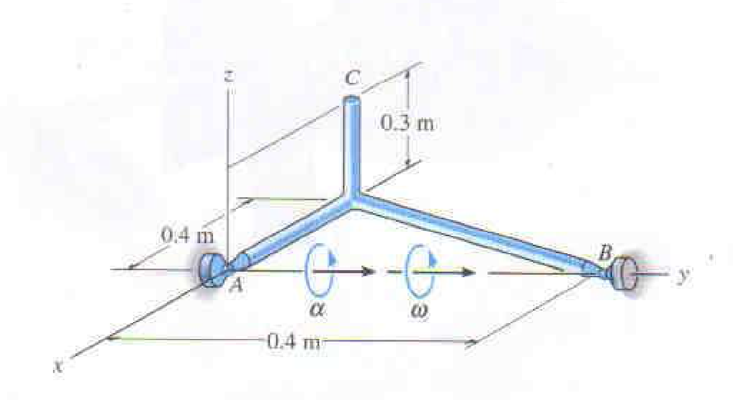

Prob. 16–30

**16-31.** La cuerda de diámetro $d$ está enrollada alrededor del tambor ahusado que tiene las dimensiones mostradas. Si el tambor se encuentra girando a una razón constante $\omega$, determine la aceleración del bloque hacia arriba. Desprecie el pequeño desplazamiento horizontal del bloque.




Prob. 16–31

***16-32.** El conjunto de barras está soportado por juntas esféricas colocadas en $A$ y $B$. En el instante mostrado, está girando con respecto al eje $y$ a velocidad angular $\omega = 5$ rad/s y tiene aceleración angular $\alpha = 8$ rad/s$^2$. Determine las magnitudes de la velocidad y la aceleración del punto $C$ en este instante. Resuelva el problema usando vectores cartesianos y las ecuaciones 16-9 y 16-13.




Prob. 16–32

## *16.4 Análisis del movimiento absoluto

Un cuerpo sometido a *movimiento plano general* experimenta traslación y rotación *simultáneas*. Si el cuerpo es representado por una placa delgada, la placa se traslada en el plano y gira con respecto a un eje perpendicular al plano. El movimiento puede ser completamente especificado si se conocen *tanto* la rotación angular de una línea fija en el cuerpo *como* el movimiento de un punto sobre el cuerpo. Una manera de definir estos movimientos es usar una coordenada $s$ de posición rectilínea para localizar el punto a lo largo de su trayectoria y una coordenada $\theta$ de posición angular para especificar la orientación de la línea. Las dos coordenadas son relacionadas entonces usando la geometría del problema. Por *aplicación directa* de las ecuaciones diferenciales de tiempo $v = ds/dt$, $a = dv/dt$, $\omega = d\theta/dt$, y $\alpha = d\omega/dt$, el *movimiento* del punto y el *movimiento angular* de la línea pueden ser relacionados. En algunos casos, este procedimiento puede ser usado también para relacionar los movimientos de un cuerpo con los de un cuerpo conectado, o para estudiar el movimiento de un cuerpo sometido a rotación con respecto a un eje fijo.

Mecánica Taller
5 NOV 2008
... 10 lección

## PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

La velocidad y la aceleración de un punto $P$ que experimenta movimiento rectilíneo pueden relacionarse con la velocidad angular y la aceleración angular de una línea contenida dentro de un cuerpo usando el siguiente procedimiento.

***Ecuación de la coordenada de posición.***

- Localice el punto $P$ usando una coordenada de posición $s$ que se mida desde un *origen fijo* y esté *dirigida a lo largo de la trayectoria del movimiento en línea recta* del punto $P$.
- Mida desde una línea fija de referencia la posición angular $\theta$ de una línea que se encuentre en el cuerpo.
- De las dimensiones del cuerpo, relacione $s$ con $\theta$, $s = f(\theta)$, usando geometría y/o trigonometría.

***Derivadas con respecto al tiempo.***

- Tome la primera derivada de $s = f(\theta)$ con respecto al tiempo para obtener una relación entre $v$ y $\omega$.
- Tome la segunda derivada para obtener una relación entre $a$ y $\alpha$.
- En cada caso debe usarse la regla de la cadena al tomar las derivadas de la ecuación de la coordenada de posición.




El contenedor sobre el camión gira con respecto a un eje fijo que pasa por el pasador localizado en $A$. Es operado por medio de la extensión del cilindro hidráulico $BC$. La posición angular del contenedor puede ser especificada usando la coordenada de posición angular $\theta$, y la posición del punto $C$ sobre el contenedor es especificada usando la coordenada rectilínea $s$. Como $a$ y $b$ son longitudes fijas, entonces las coordenadas pueden ser relacionadas mediante la ley de los cosenos, $s = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta}$. Usando la regla de la cadena, la derivada con respecto al tiempo de esta ecuación relaciona la rapidez a la que el cilindro hidráulico se extiende con la velocidad angular del contenedor, esto es,

$$v = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta)^{-\frac{1}{2}}(2ab\,\text{sen}\,\theta)\,\omega.$$

## EJEMPLO 16.3

El extremo de la barra $R$ mostrada en la figura 16-7 mantiene contacto con la leva por medio de un resorte. Si la leva gira con respecto a un eje que pasa por el punto $O$ con una aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ y velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, determine la velocidad y la aceleración de la barra cuando la leva está en la posición arbitraria $\theta$.

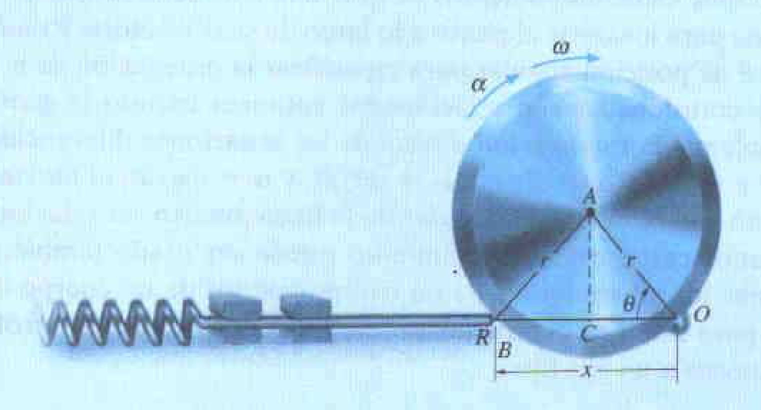



Fig. 16-7

### Solución

***Ecuación de la coordenada de posición.*** Las coordenadas $\theta$ y $x$ son elegidas para relacionar el *movimiento rotatorio* del segmento de línea $OA$ sobre la leva con el *movimiento rectilíneo* de la barra. Estas coordenadas son medidas desde el *punto fijo O* y pueden ser relacionadas entre sí usando trigonometría. Como $OC = CB = r\cos\theta$, figura 16-7, entonces

$$x = 2r\cos\theta$$

***Derivadas con respecto al tiempo.*** Usando la regla de la cadena, tenemos

$$\frac{dx}{dt} = -2r(\operatorname{sen}\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

$$v = -2r\omega\operatorname{sen}\theta \qquad \textit{Resp.}$$

$$\frac{dv}{dt} = -2r\left(\frac{d\omega}{dt}\right)\operatorname{sen}\theta - 2r\omega(\cos\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

$$a = -2r(\alpha\operatorname{sen}\theta + \omega^2\cos\theta) \qquad \textit{Resp.}$$

Los signos negativos indican que $v$ y $a$ son opuestas a la dirección positiva de $x$.

## EJEMPLO 16.4

En un instante dado, el cilindro de radio $r$, mostrado en la figura 16-8, tiene velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$. Determine la velocidad y la aceleración de su centro $G$ si el cilindro rueda sin deslizar.

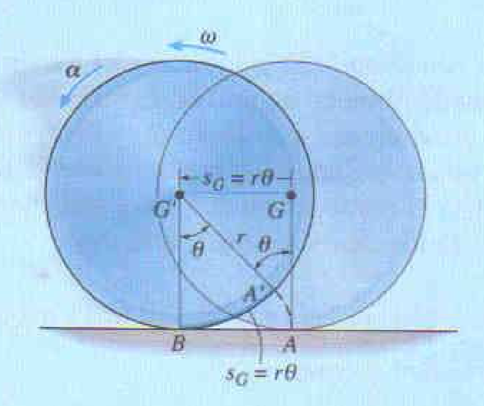



Fig. 16-8

### Solución

***Ecuación de la coordenada de posición.*** Por inspección, el punto $G$ se mueve *horizontalmente* hacia la izquierda desde $G$ hasta $G'$ conforme el cilindro rueda, figura 16-8. En consecuencia, su nueva ubicación $G'$ será especificada por la coordenada de posición *horizontal* $s_G$, la cual se mide desde la posición original ($G$) del centro del cilindro. Observe también que, al rodar el cilindro (sin deslizar), los puntos sobre su superficie entran en contacto con el suelo de tal forma que la longitud de arco $A'B$ de contacto debe ser igual a la distancia $s_G$. Por consiguiente, el movimiento requiere que la línea radial $GA$ gire $\theta$ a la posición $G'A'$. Como el arco $A'B = r\,\theta$, entonces $G$ viaja una distancia

$$s_G = r\theta$$

***Derivadas con respecto al tiempo.*** Tomando derivadas sucesivas con respecto al tiempo de esta ecuación y observando que $r$ es constante, $\omega = d\theta/dt$, y $\alpha = d\omega/dt$, obtenemos las relaciones necesarias:

$$s_G = r\theta$$

$$v_G = r\omega \qquad \textit{Resp.}$$

$$a_G = r\alpha \qquad \textit{Resp.}$$

Recuerde que esas relaciones son válidas sólo si el cilindro (disco, rueda, bola, etc.) rueda *sin* deslizar.

## EJEMPLO 16.5

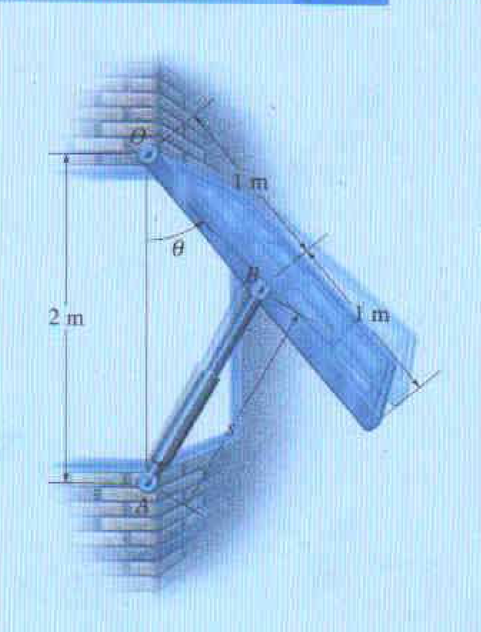



Fig. 16-9

La ventana larga mostrada en la figura 16-9 se abre usando un cilindro hidráulico $AB$. Si éste se extiende a razón constante de 0.5 m/s, determine la velocidad angular y la aceleración angular de la ventana en el instante $\theta = 30°$.

### Solución

***Ecuación de la coordenada de posición.*** El movimiento angular de la ventana se puede obtener usando la coordenada $\theta$, mientras que la extensión o el movimiento *a lo largo del cilindro hidráulico* es definido usando una coordenada $s$, la cual mide la longitud desde el punto fijo $A$ hasta el punto móvil $B$. Esas coordenadas se pueden relacionar usando la ley de los cosenos, esto es,

$$s^2 = (2\text{ m})^2 + (1\text{ m})^2 - 2(2\text{ m})(1\text{ m})\cos\theta$$

$$s^2 = 5 - 4\cos\theta \qquad (1)$$

Cuando $\theta = 30°$,

$$s = 1.239\text{ m}$$

***Derivadas con respecto al tiempo.*** Tomando las derivadas con respecto al tiempo de la ecuación 1, tenemos

$$2s\frac{ds}{dt} = 0 - 4(-\text{sen}\,\theta)\frac{d\theta}{dt}$$

$$s(v_s) = 2(\text{sen}\,\theta)\omega \qquad (2)$$

Como $v_s = 0.5$ m/s, entonces, en $\theta = 30°$,

$$(1.239\text{ m})(0.5\text{ m/s}) = 2\text{ sen }30°\omega$$

$$\omega = 0.620\text{ rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$

Tomando la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 2, resulta

$$\frac{ds}{dt}v_s + s\frac{dv_s}{dt} = 2(\cos\theta)\frac{d\theta}{dt}\omega + 2(\text{sen}\,\theta)\frac{d\omega}{dt}$$

$$v_s^2 + sa_s = 2(\cos\theta)\omega^2 + 2(\text{sen}\,\theta)\alpha$$

Como $a_s = dv_s/dt = 0$, entonces

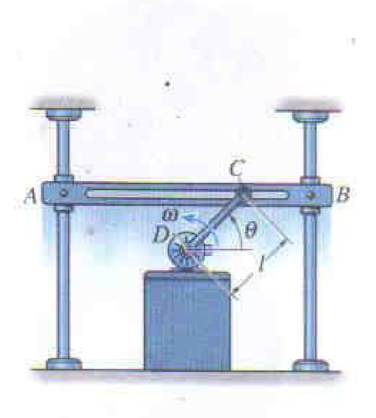
$$(0.5\text{ m/s})^2 + 0 = 2\cos 30°(0.620\text{ rad/s})^2 + 2\text{ sen }30°\alpha$$

$$\alpha = -0.415\text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

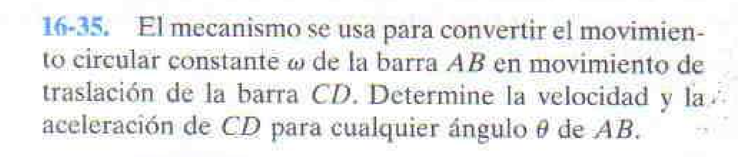
Como el resultado es negativo, ello indica que la ventana tiene desaceleración angular.

# PROBLEMAS

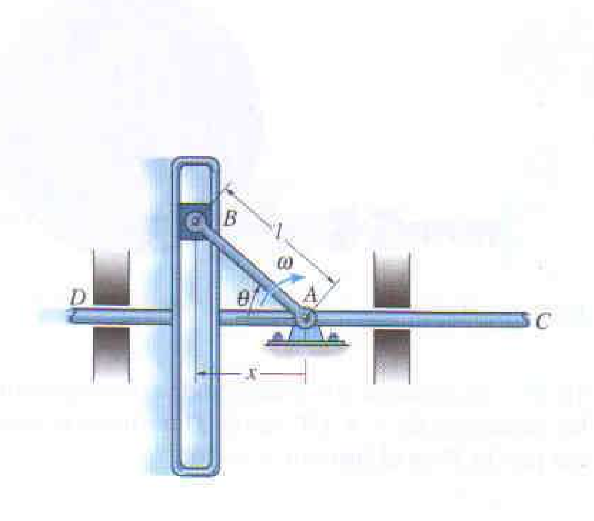
**16-33.** La barra $DC$ gira uniformemente alrededor de la flecha en el punto $D$ con velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$. Determine la velocidad y la aceleración de la barra $AB$, la cual está limitada por las guías a moverse verticalmente.




Prob. 16–33

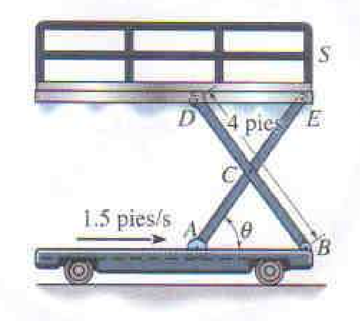


**16-35.** El mecanismo se usa para convertir el movimiento circular constante $\omega$ de la barra $AB$ en movimiento de traslación de la barra $CD$. Determine la velocidad y la aceleración de $CD$ para cualquier ángulo $\theta$ de $AB$.



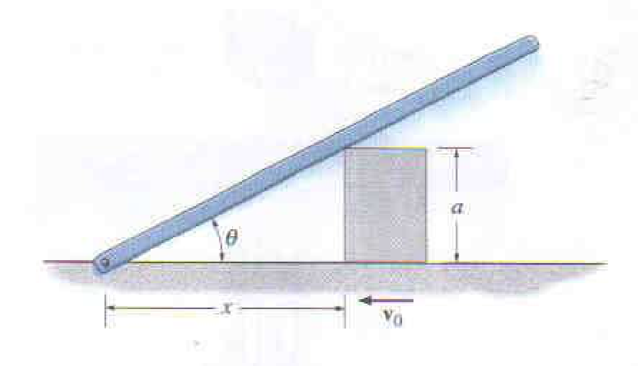

Prob. 16–35

**16-34.** El andamio $S$ es levantado hidráulicamente moviendo el rodillo instalado en $A$ hacia el pasador en $B$. Si $A$ se está acercando a $B$ con rapidez de 1.5 pies/s, determine la rapidez con que la plataforma se está levantando como una función de $\theta$. Los eslabones de 4 pies están conectados mediante un pasador en sus puntos medios.



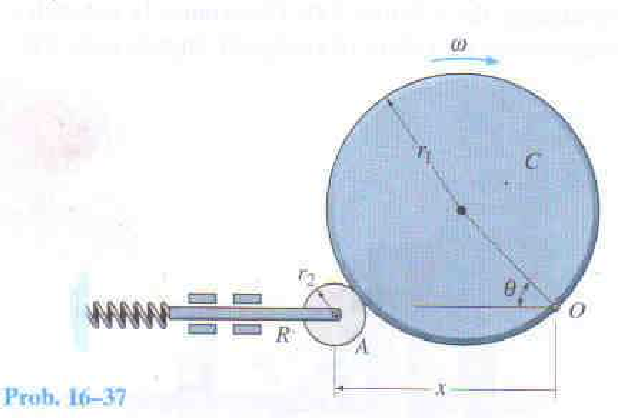

Prob. 16–34

***16-36.** El bloque se mueve hacia la izquierda con velocidad constante $\mathbf{v}_0$. Determine la velocidad angular y la aceleración angular de la barra en función de $\theta$.



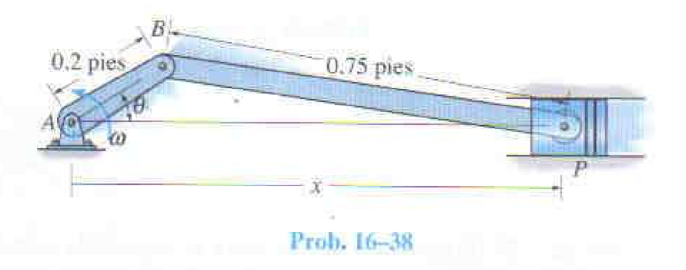

Prob. 16–36

**16-37.** Determine la velocidad de la barra $R$ para cualquier ángulo $\theta$ de la leva $C$ si ésta gira con velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$. La conexión de pasador en $O$ no ocasiona ninguna interferencia con el movimiento de $A$ sobre $C$.



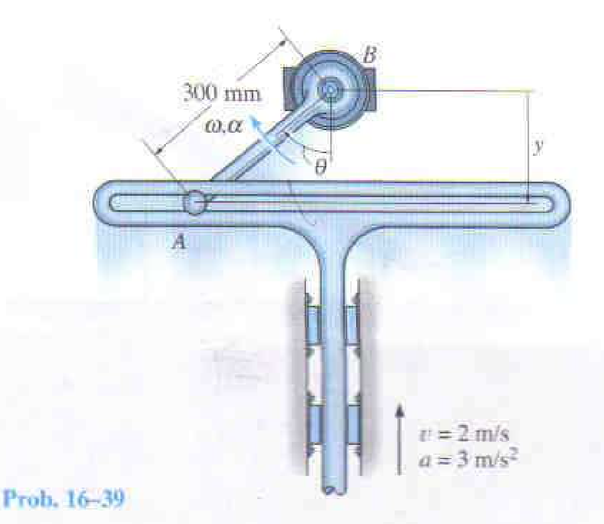

Prob. 16–37

**16-38.** El cigüeñal $AB$ está girando con velocidad angular constante de $\theta = 150$ rad/s. Determine la velocidad del pistón $P$ en el instante $\theta = 30°$.



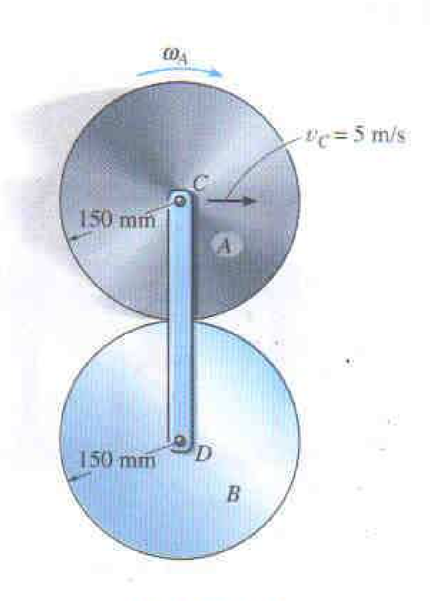

Prob. 16–38

**16-39.** En el instante $\theta = 50°$, la guía ranurada se está moviendo hacia arriba con aceleración de 3 m/s² y velocidad de 2 m/s. Determine la aceleración angular y la velocidad angular del eslabón $AB$ en este instante. *Nota:* El movimiento hacia arriba de la guía es en la dirección $y$ negativa.



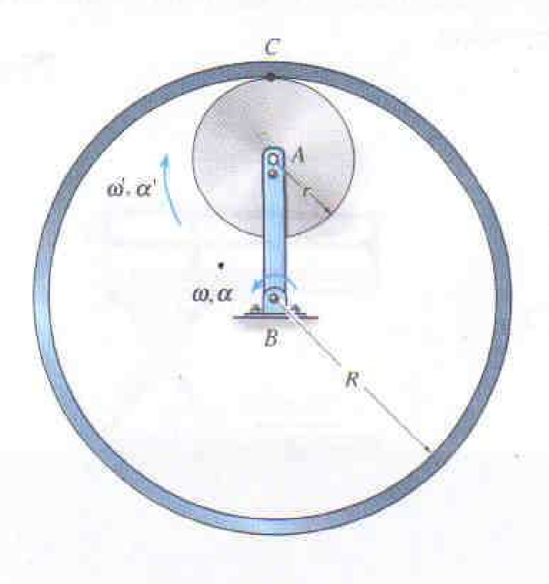

Prob. 16–39

***16-40.** El disco $A$ rueda sin deslizar sobre la superficie del cilindro *fijo* $B$. Determine la velocidad angular de $A$ si su centro $C$ tiene rapidez $v_C = 5$ m/s. ¿Cuántas revoluciones habrá efectuado $A$ alrededor de su centro justo después que el eslabón $DC$ ha completado una revolución?



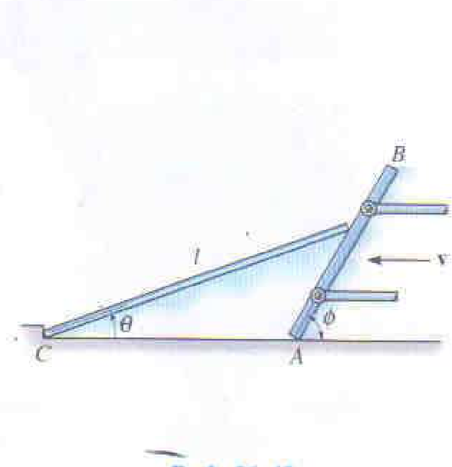

Prob. 16–40

**16-41.** El brazo $AB$ tiene velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$. Si no ocurre deslizamiento entre el disco y la superficie curva fija, determine la velocidad angular y la aceleración angular del disco.



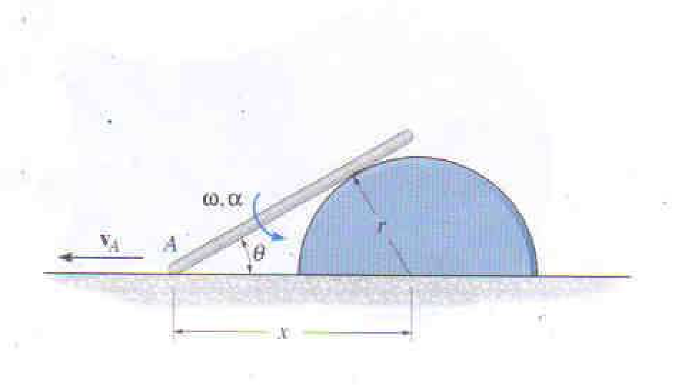

Prob. 16–41

**16-42.** La placa inclinada se mueve hacia la izquierda con velocidad constante **v**. Determine la velocidad angular y la aceleración angular de la barra esbelta de longitud $l$. La barra pivotea en el escalón localizado en $C$ al deslizarse sobre la placa.



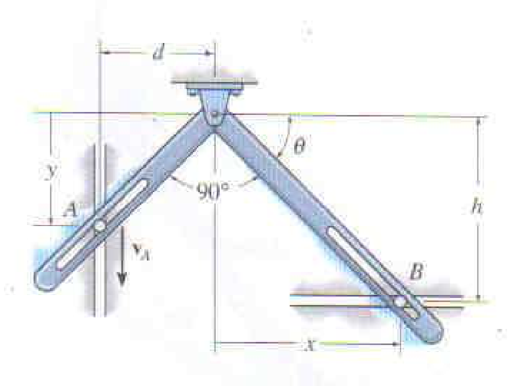

Prob. 16–42

**16-43.** El extremo $A$ de la barra se está moviendo hacia la izquierda con velocidad constante $\mathbf{v}_A$. Determine la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ de la barra en función de su posición $x$.



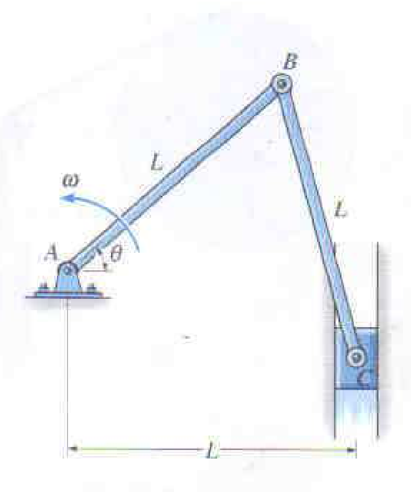

Prob. 16–43

***16-44.** Los pasadores ubicados en $A$ y $B$ están confinados para moverse en las guías vertical y horizontal. Si el brazo ranurado ocasiona que $A$ se mueva hacia abajo a $\mathbf{v}_A$, determine la velocidad de $B$ en el instante mostrado.



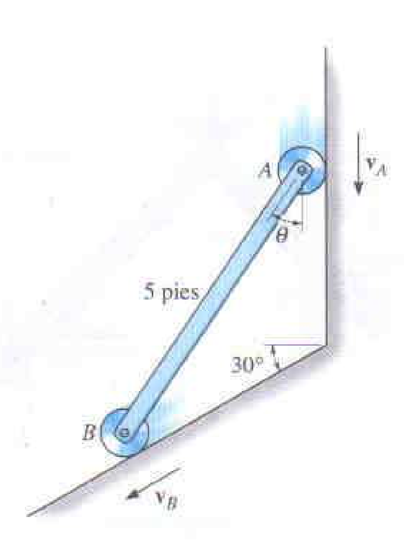

Prob. 16–44

**16-45.** La barra $AB$ gira uniformemente alrededor del pasador fijo $A$ con velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$. Determine la velocidad y la aceleración del bloque $C$ en el instante $\theta = 60°$.



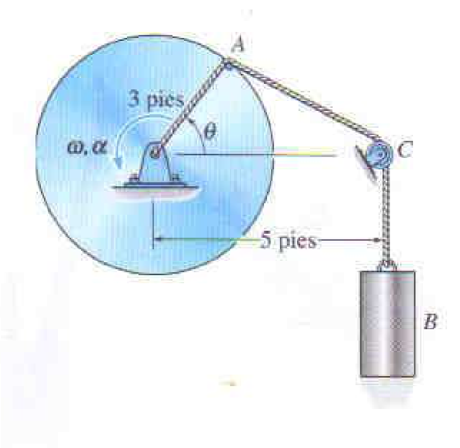

Prob. 16–45

**16-46.** La barra está confinada para moverse a lo largo de los planos vertical e inclinado. Si la velocidad del rodillo en $A$ es $v_A = 6$ pies/s cuando $\theta = 45°$, determine la velocidad angular de la barra y la velocidad del rodillo $B$ en este instante.



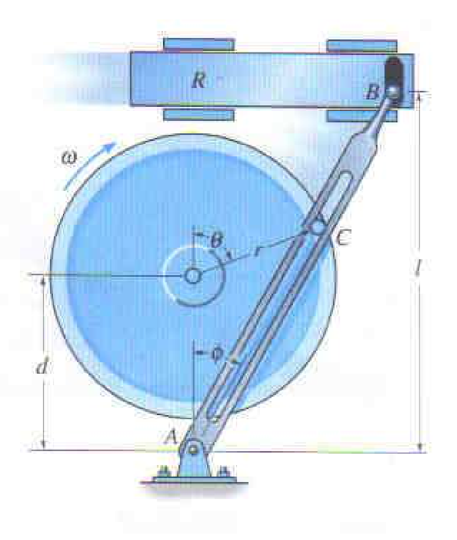

Prob. 16–46

**16-47.** El disco está girando con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y tiene aceleración angular de $\boldsymbol{\alpha}$. Determine la velocidad y la aceleración del cilindro $B$. Desprecie el tamaño de la polea en $C$.



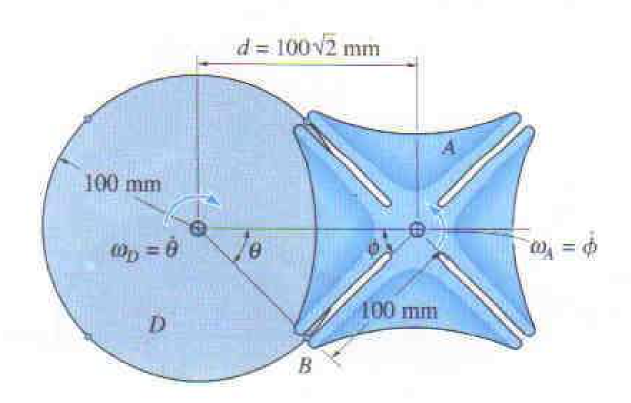

Prob. 16–47

***16-48.** La barra ranurada está articulada en el punto $A$ mientras que el extremo $B$ se usa para mover el pistón $R$ horizontalmente. Si el disco gira con velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$, determine la velocidad y la aceleración del pistón. El pasador $C$ está fijo al disco y gira con él.




Prob. 16–48

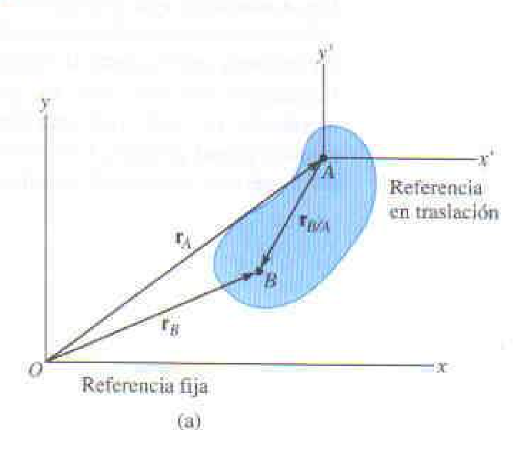
**16-49.** La cruz de Malta $A$ proporciona un movimiento rotatorio intermitente $\omega_A$ para un movimiento continuo $\omega_D = 2$ rad/s del disco $D$. Al elegir $d = 100\sqrt{2}$ mm, la rueda tiene velocidad angular cero en el instante en que el pasador $B$ entra a, o sale de, una de las cuatro ranuras. Determine la magnitud de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_A$ de la cruz de Malta para cualquier ángulo $\theta$ para el cual el pasador $B$ esté en contacto con la ranura.




Prob. 16–49

## 16.5 Análisis de movimiento relativo: Velocidad

El movimiento plano general de un cuerpo rígido puede ser descrito como una *combinación* de traslación y rotación. Para considerar esos movimientos de "componentes" *por separado*, usaremos un *análisis de movimiento relativo* implicando dos conjuntos de ejes coordenados. El sistema coordenado $x$, $y$ es fijo y mide la posición *absoluta* de dos puntos $A$ y $B$ sobre el cuerpo, figura 16-10*a*. El origen del sistema coordenado $x'$, $y'$ estará unido al "punto base" $A$ seleccionado, el cual generalmente tiene un movimiento *conocido*. Los ejes de este sistema coordenado no giran con el cuerpo, en lugar de ello sólo podrán *trasladarse* con respecto al marco fijo.



(a)

Fig. 16–10

**Posición.** El vector de posición $\mathbf{r}_A$ mostrado en la figura 16-10*a* especifica la ubicación del "punto base" $A$, y el vector de posición relativa $\mathbf{r}_{B/A}$ sitúa el punto $B$ con respecto al punto $A$. Por adición vectorial, la *posición* de $B$ es entonces

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A}$$

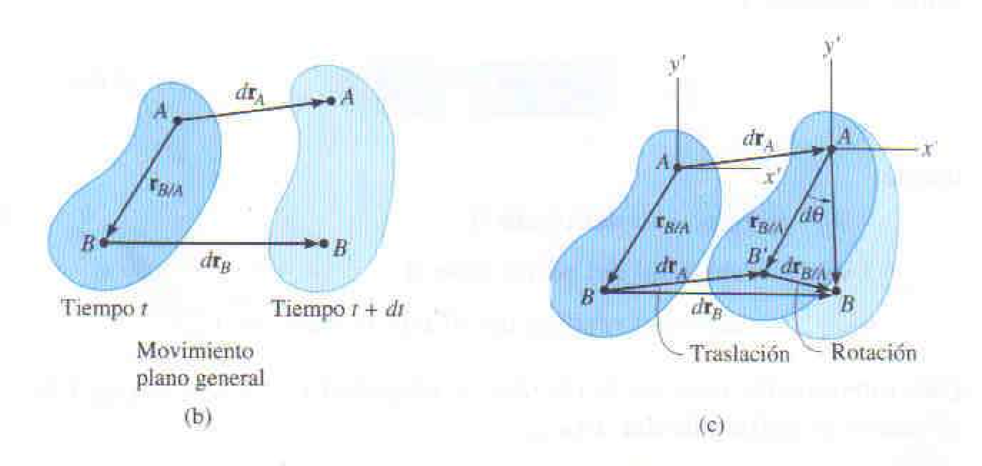
**Desplazamiento.** Durante un instante de tiempo $dt$, los puntos $A$ y $B$ experimentan desplazamientos $d\mathbf{r}_A$ y $d\mathbf{r}_B$ como se muestra en la figura 16-10*b*. Si consideramos el movimiento plano general por sus partes componentes, entonces *todo el cuerpo* se *traslada* primero una cantidad $d\mathbf{r}_A$ de manera que $A$, el punto base, se mueve a su *posición final* y el punto $B$ se mueve a $B'$, figura 16-10*c*. El cuerpo es entonces *girado* con respecto a $A$ una cantidad $d\theta$ de manera que $B'$ experimenta un *desplazamiento relativo* $d\mathbf{r}_{B/A}$, y se mueve así a su posición final $B$. Debido a la rotación con respecto a $A$, $dr_{B/A} = r_{B/A}\, d\theta$, y el desplazamiento de $B$ es

$$d\mathbf{r}_B = d\mathbf{r}_A + d\mathbf{r}_{B/A}$$

debido a rotación con respecto a $A$ ($d\mathbf{r}_{B/A}$)

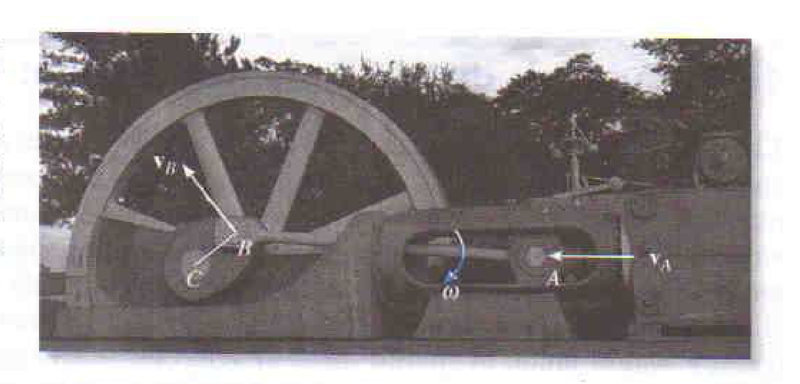
debido a traslación de $A$ ($d\mathbf{r}_A$)

debido a traslación y rotación ($d\mathbf{r}_B$)



(b) (c)

Al moverse horizontalmente hacia la izquierda con velocidad $\mathbf{v}_A$, el bloque deslizable $A$ ocasiona que el eslabón $CB$ gire en sentido contrario al de las manecillas del reloj, de tal manera que $\mathbf{v}_B$ esté dirigido tangente a su trayectoria circular, esto es, hacia arriba a la izquierda. La biela $AB$ está sometida a movimiento plano general, y en el instante mostrado tiene una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$.




**Velocidad.** Para determinar la relación entre las velocidades de los puntos $A$ y $B$, es necesario tomar las derivadas con respecto al tiempo de la ecuación de posición, o simplemente dividir la ecuación de desplazamiento entre $dt$. Esto da

$$\frac{d\mathbf{r}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{r}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt}$$

Los términos $d\mathbf{r}_B/dt = \mathbf{v}_B$ y $d\mathbf{r}_A/dt = \mathbf{v}_A$ son medidos desde los ejes fijos $x, y$ y representan las *velocidades absolutas* de los puntos $A$ y $B$, respectivamente. La magnitud del tercer término es $\mathbf{r}_{B/A}d\theta/dt = r_{B/A}\dot{\theta} = r_{B/A}\omega$, donde $\omega$ es la velocidad angular del cuerpo en el instante considerado. Denotaremos este término como la *velocidad relativa* $\mathbf{v}_{B/A}$, ya que representa la velocidad de $B$ con respecto a $A$ medida por un observador fijo a los ejes en traslación $x', y'$. Como el cuerpo es rígido, observe que este observador sólo ve al punto $B$ moverse por un *arco circular* que tiene radio de curvatura $r_{B/A}$. En otras palabras, *el cuerpo parece moverse como si estuviera girando con velocidad angular* $\boldsymbol{\omega}$ *con respecto al eje* $z'$ *que pasa por* $A$. En consecuencia, $\mathbf{v}_{B/A}$ tiene magnitud de $v_{B/A} = \omega r_{B/A}$ y una *dirección* que es perpendicular a $\mathbf{r}_{B/A}$. Por tanto, tenemos

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} \qquad (16\text{–}15)$$

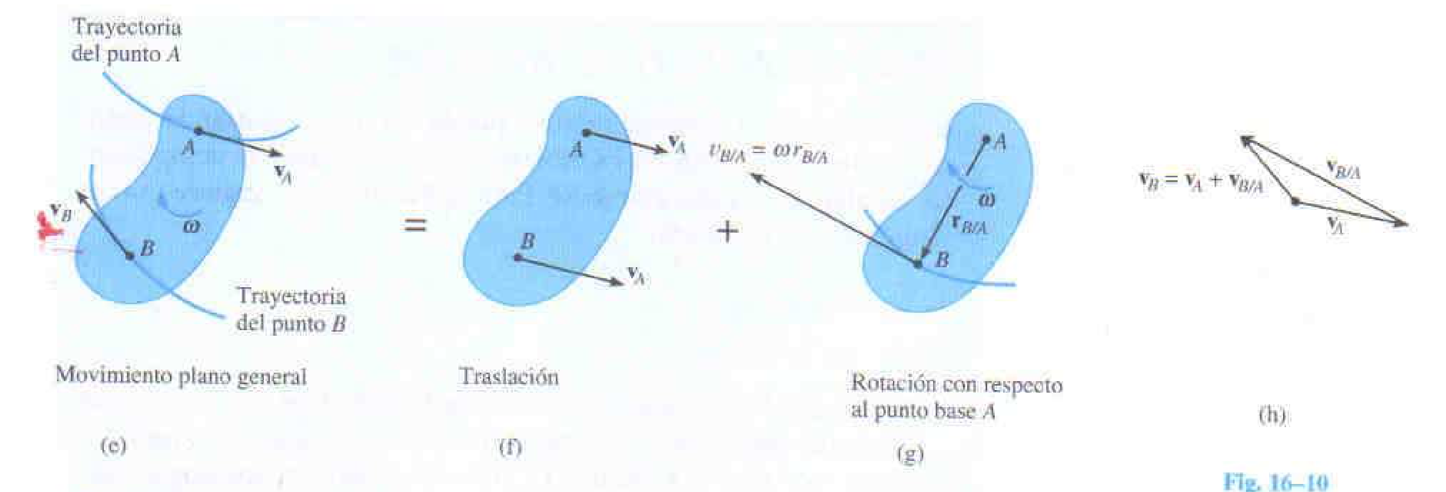
donde

$\mathbf{v}_B$ = velocidad del punto $B$

$\mathbf{v}_A$ = velocidad del punto base $A$

$\mathbf{v}_{B/A}$ = velocidad relativa de "$B$ con respecto a $A$"

Este movimiento relativo es *circular*, la *magnitud* es $v_{B/A} = \omega r_{B/A}$, y la *dirección* es perpendicular a $\mathbf{r}_{B/A}$.




Movimiento plano general

(e)

Traslación

(f)

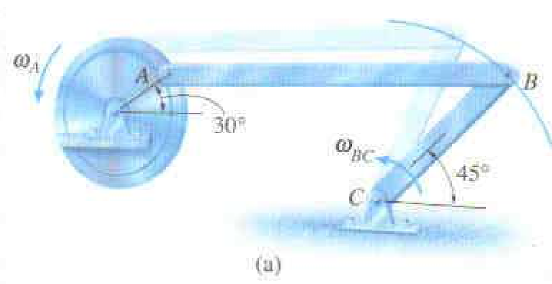
Rotación con respecto al punto base A

(g)

(h)

Fig. 16–10

Cada uno de los tres términos que aparecen en la ecuación 16-15 está representado gráficamente en los *diagramas cinemáticos* de las figuras 16-10*e*, 16-10*f* y 16-10*g*. Aquí se ve que la velocidad de $B$, figura 16-10*e*, es determinada considerando que todo el cuerpo se traslada con velocidad $\mathbf{v}_A$, figura 16-10*f*, y gira con respecto a $A$ con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, figura 16-10*g*. La adición vectorial de esos dos efectos, aplicada a $B$, resulta en $\mathbf{v}_B$, como se muestra en la figura 16-10*h*.



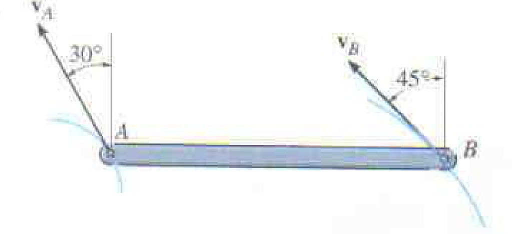

(a)

Ya que la velocidad relativa $\mathbf{v}_{B/A}$ representa el efecto de *movimiento circular*, con respecto a $A$, este término puede ser expresado mediante el producto cruz $\mathbf{v}_{B/A} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$, ecuación 16-9. Por consiguiente, para su aplicación, también podemos escribir la ecuación 16-15 como

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \qquad (16\text{–}16)$$

donde

$\mathbf{v}_B$ = velocidad de $B$
$\mathbf{v}_A$ = velocidad del punto base $A$
$\boldsymbol{\omega}$ = velocidad angular del cuerpo
$\mathbf{r}_{B/A}$ = vector de posición relativa dibujado desde $A$ hasta $B$




(b)

Fig. 16–11

Las ecuaciones de velocidad 16-15 o 16-16 pueden ser usadas de manera práctica para estudiar el movimiento plano general de un cuerpo rígido que está conectado mediante un pasador a, o en contacto con, otros cuerpos móviles. Al aplicar esta ecuación, los puntos $A$ y $B$ deben ser, generalmente, seleccionados como puntos sobre el cuerpo que están conectados mediante pasadores a otros cuerpos, o como puntos en contacto con cuerpos adyacentes que tienen un *movimiento conocido*. Por ejemplo, ambos puntos $A$ y $B$ sobre el eslabón $AB$, figura 16-11*a*, tienen trayectorias de movimiento circular ya que la rueda y el eslabón $CB$ se mueven en trayectorias circulares. Las *direcciones* de $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ pueden, por tanto, establecerse ya que son siempre *tangentes* a sus trayectorias de movimiento, figura 16-11*b*. En el caso de la rueda mostrada en la figura 16-12, que rueda sin deslizar, el punto $A$ puede ser seleccionado en el suelo. Aquí $A$ (momentáneamente) tiene velocidad cero ya que el suelo no se mueve. Además, el centro de la rueda, $B$, se mueve a lo largo de una trayectoria horizontal de manera que $\mathbf{v}_B$ es horizontal.

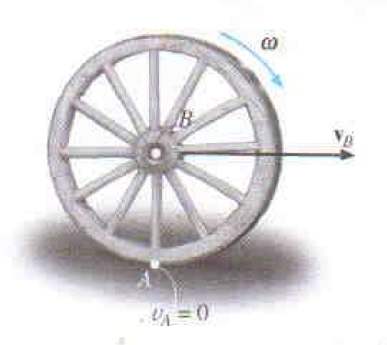



Fig. 16–12

## PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

La ecuación de velocidad relativa puede ser aplicada usando análisis vectorial cartesiano o escribiendo las ecuaciones de componentes escalares $x$ y $y$ directamente. Para aplicaciones, se sugiere usar el siguiente procedimiento.

### ANÁLISIS VECTORIAL

*Diagrama cinemático.*

- Establezca las direcciones de las coordenadas fijas $x, y$ y dibuje un diagrama cinemático del cuerpo. Indique en este diagrama las velocidades $\mathbf{v}_A, \mathbf{v}_B$ de los puntos $A$ y $B$, la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, y el vector de posición relativa $\mathbf{r}_{B/A}$.
- Si las magnitudes de $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{v}_B$, o $\boldsymbol{\omega}$ son desconocidas, el sentido de esos vectores puede ser supuesto.

*Ecuación de velocidad.*

- Para aplicar $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$, exprese los vectores en forma vectorial cartesiana y sustitúyalos en la ecuación. Evalúe el producto cruz y luego iguale las respectivas componentes $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ para obtener dos ecuaciones escalares.
- Si la solución da una respuesta *negativa* para una magnitud *desconocida*, ello indica que el sentido de dirección del vector es opuesto al mostrado en el diagrama cinemático.

### ANÁLISIS ESCALAR

*Diagrama cinemático.*

- Si la ecuación de velocidad va a ser aplicada en forma escalar, entonces la magnitud y la dirección de la velocidad relativa $\mathbf{v}_{B/A}$ deben ser establecidas. Dibuje un diagrama cinemático como se muestra en la figura 16-10*g*, la cual ilustra el movimiento relativo. Ya que el cuerpo se considera momentáneamente "articulado" en el punto base $A$, la magnitud es $v_{B/A} = \omega r_{B/A}$. El sentido de dirección de $\mathbf{v}_{B/A}$ se establece a partir del diagrama, de tal manera que $\mathbf{v}_{B/A}$ actúa perpendicularmente a $\mathbf{r}_{B/A}$ de acuerdo con el movimiento rotatorio $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo.*

*Ecuación de velocidad.*

- Escriba la ecuación 16-15 en forma simbólica, $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$, y debajo de cada uno de los términos represente gráficamente los vectores mostrando sus magnitudes y direcciones. Las ecuaciones escalares son determinadas a partir de las componentes $x$ y $y$ de estos vectores.

*La notación $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A(\text{pasador})}$ puede ser útil para recordar que $A$ está "articulado".

## EJEMPLO 16.6

El eslabón mostrado en la figura 16-13*a* es guiado por dos bloques ubicados en *A* y *B* que se mueven en las ranuras fijas. Si la velocidad de *A* es de 2 m/s hacia abajo, determine la velocidad de *B* en el instante $\theta = 45°$.

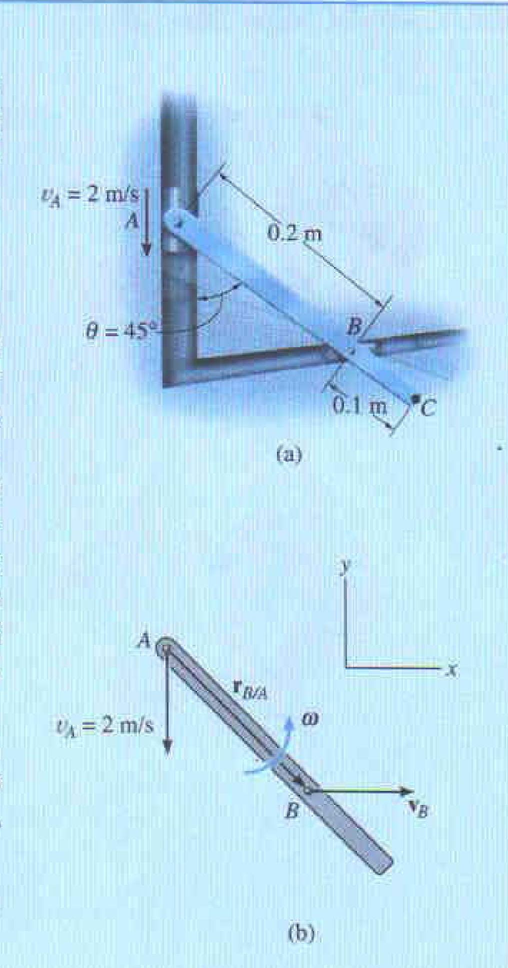



Fig. 16-13

### Solución (Análisis vectorial)

*Diagrama cinemático.* Como los puntos *A* y *B* están restringidos a moverse por las ranuras fijas y $\mathbf{v}_A$ está dirigida hacia abajo, la velocidad $\mathbf{v}_B$ debe estar dirigida horizontalmente hacia la derecha, figura 16-13*b*. Este movimiento ocasiona que el eslabón gire en sentido contrario al de las manecillas del reloj; esto es, por la regla de la mano derecha, la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ está dirigida hacia fuera, perpendicular al plano del movimiento. Conocida la magnitud y la dirección de $\mathbf{v}_A$ y las líneas de acción de $\mathbf{v}_B$ y $\boldsymbol{\omega}$, es posible aplicar la ecuación de velocidad $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$ a los puntos *A* y *B* para encontrar las dos magnitudes desconocidas $v_B$ y $\omega$. Como $\mathbf{r}_{B/A}$ es necesario, también se muestra en la figura 16-13*b*.

*Ecuación de velocidad.* Expresando cada uno de los vectores que aparecen en la figura 16-13*b* en términos de sus componentes **i**, **j**, **k**, y aplicando la ecuación 16-16 a *A*, el punto base, y *B*, tenemos

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$
$$v_B\mathbf{i} = -2\mathbf{j} + [\omega\mathbf{k} \times (0.2 \text{ sen } 45°\mathbf{i} - 0.2 \cos 45°\mathbf{j})]$$
$$v_B\mathbf{i} = -2\mathbf{j} + 0.2\omega \text{ sen } 45°\mathbf{j} + 0.2\omega \cos 45°\mathbf{i}$$

Igualando las componentes **i** y **j** obtenemos

$$v_B = 0.2\omega \cos 45° \qquad 0 = -2 + 0.2\omega \text{ sen } 45°$$

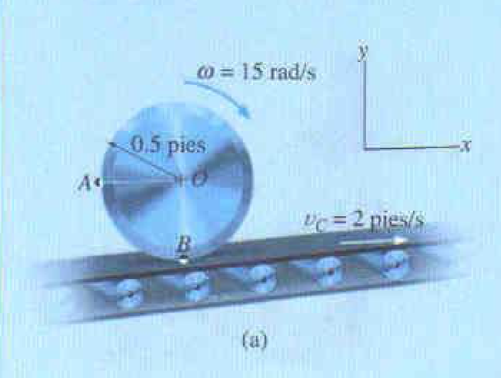
Entonces,

$$\omega = 14.1 \text{ rad/s} \circlearrowleft$$
$$v_B = 2 \text{ m/s} \rightarrow \qquad \textit{Resp.}$$

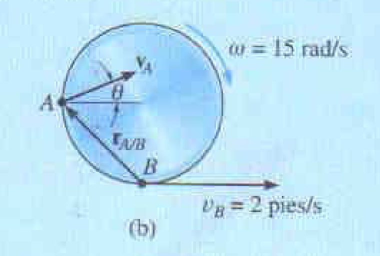
Como ambos resultados son *positivos*, las *direcciones* de $\mathbf{v}_B$ y $\boldsymbol{\omega}$ son *correctas* como se muestra en la figura 16-13*b*. Debe enfatizarse que esos resultados son *válidos sólo* en el instante $\theta = 45°$. Un nuevo cálculo para $\theta = 44°$ da $v_B = 2.07$ m/s y $\omega = 14.4$ rad/s; mientras que para $\theta = 46°$, $v_B = 1.93$ m/s y $\omega = 13.9$ rad/s, etcétera.

Ahora que la velocidad de un punto (*A*) sobre el eslabón y la velocidad angular son *conocidas*, la velocidad de cualquier otro punto sobre el eslabón puede ser determinada. Como un ejercicio, vea si puede aplicar la ecuación 16-16 a los puntos *A* y *C* o a los puntos *B* y *C* y muestre que cuando $\theta = 45°$, $v_C = 3.16$ m/s, dirigida a $\theta = 18.4°$ hacia arriba desde la horizontal.

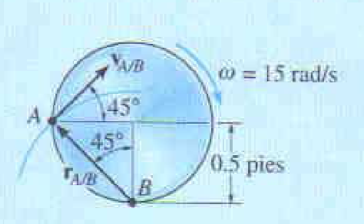
## EJEMPLO 16.7



(a)



(b)



Movimiento relativo
(c)

Fig. 16-14

El cilindro mostrado en la figura 16-14*a* rueda sin deslizar sobre la superficie de una banda transportadora que se mueve a 2 pies/s. Determine la velocidad del punto *A*. El cilindro tiene velocidad angular, en el sentido de las manecillas del reloj, $\omega = 15$ rad/s en el instante mostrado.

### Solución I (Análisis vectorial)

***Diagrama cinemático.*** Como no ocurre deslizamiento, el punto *B* sobre el cilindro tiene la misma velocidad que la banda transportadora, figura 16-14*b*. Además, la velocidad angular del cilindro es conocida, por lo que podemos aplicar la ecuación de velocidad a *B*, el punto base, y a *A* para determinar $\mathbf{v}_A$.

***Ecuación de velocidad.***

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{A/B}$$

$$(v_A)_x\mathbf{i} + (v_A)_y\mathbf{j} = 2\mathbf{i} + (-15\mathbf{k}) \times (-0.5\mathbf{i} + 0.5\mathbf{j})$$

$$(v_A)_x\mathbf{i} + (v_A)_y\mathbf{j} = 2\mathbf{i} + 7.50\mathbf{j} + 7.50\mathbf{i}$$

de manera que

$$(v_A)_x = 2 + 7.50 = 9.50 \text{ pies/s} \qquad (1)$$

$$(v_A)_y = 7.50 \text{ pies/s} \qquad (2)$$

Entonces,

$$v_A = \sqrt{(9.50)^2 + (7.50)^2} = 12.1 \text{ pies/s} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{7.50}{9.50} = 38.3° \qquad \textit{Resp.}$$

### Solución II (Análisis escalar)

Como un procedimiento alternativo, las componentes escalares de $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$ pueden obtenerse directamente. A partir del diagrama cinemático que muestra el movimiento relativo "circular" $\mathbf{v}_{A/B}$, figura 16-14*c*, tenemos

$$v_{A/B} = \omega r_{A/B} = (15 \text{ rad/s})\left(\frac{0.5 \text{ pies}}{\cos 45°}\right) = 10.6 \text{ pies/s} \measuredangle^{45°}$$

Así,

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{A/B}$$

$$\begin{bmatrix}(v_A)_x \\ \rightarrow\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}(v_A)_y \\ \uparrow\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 \text{ pies/s} \\ \rightarrow\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}10.6 \text{ pies/s} \\ \measuredangle^{45°}\end{bmatrix}$$

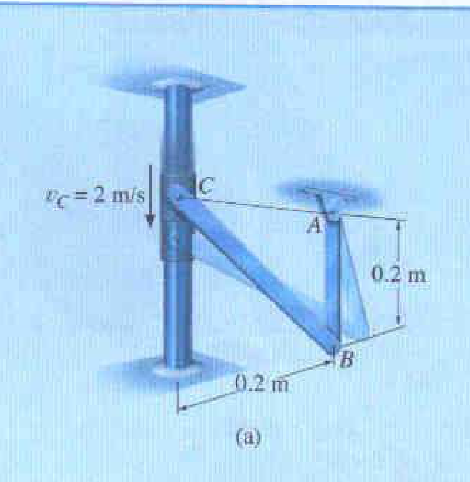
Al igualar las componentes *x* y *y* tenemos los mismos resultados que antes, esto es,

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad (v_A)_x = 2 + 10.6 \cos 45° = 9.50 \text{ pies/s}$$

$$(+\uparrow) \qquad (v_A)_y = 0 + 10.6 \operatorname{sen} 45° = 7.50 \text{ pies/s}$$

## EJEMPLO 16.8

El collar $C$ mostrado en la figura 16-15*a* se mueve hacia abajo con velocidad de 2 m/s. Determine las velocidades angulares de $CB$ y $AB$ en este instante.



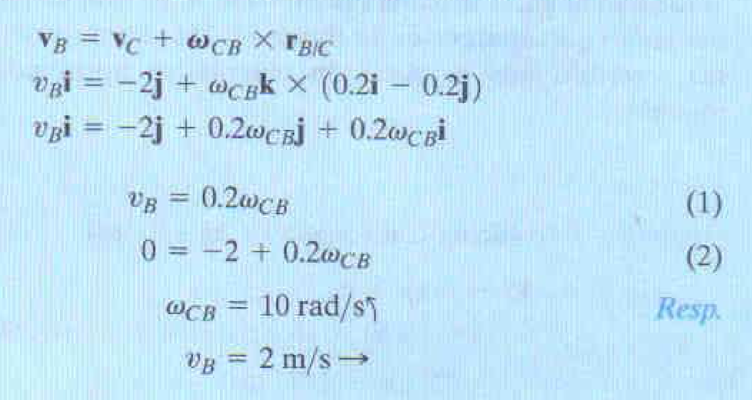
(a)

### Solución I (Análisis vectorial)

***Diagrama cinemático.*** El movimiento hacia abajo de $C$ ocasiona que $B$ se mueva hacia la derecha. Además, $CB$ y $AB$ giran en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Para encontrar la solución, escribiremos la ecuación cinemática apropiada para cada eslabón.

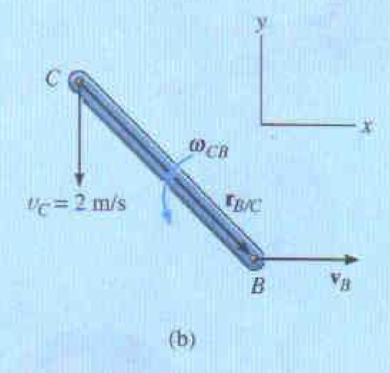
***Ecuación de velocidad.***

Eslabón $CB$ (movimiento plano general): Vea la figura 16-15b.



$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega}_{CB} \times \mathbf{r}_{B/C}$$
$$v_B\mathbf{i} = -2\mathbf{j} + \omega_{CB}\mathbf{k} \times (0.2\mathbf{i} - 0.2\mathbf{j})$$
$$v_B\mathbf{i} = -2\mathbf{j} + 0.2\omega_{CB}\mathbf{j} + 0.2\omega_{CB}\mathbf{i}$$

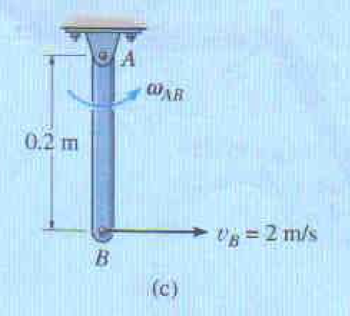
$$v_B = 0.2\omega_{CB} \qquad (1)$$
$$0 = -2 + 0.2\omega_{CB} \qquad (2)$$
$$\omega_{CB} = 10 \text{ rad/s} \circlearrowleft \qquad \textit{Resp.}$$
$$v_B = 2 \text{ m/s} \rightarrow$$



(b)

Eslabón $AB$ (rotación con respecto a un eje fijo): Vea la figura 16-15*c*.

$$\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_B$$
$$2\mathbf{i} = \omega_{AB}\mathbf{k} \times (-0.2\mathbf{j})$$
$$2 = 0.2\omega_{AB}$$
$$\omega_{AB} = 10 \text{ rad/s} \circlearrowleft \qquad \textit{Resp.}$$



(c)

### Solución II (Análisis escalar)

Las ecuaciones de componentes escalares de $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{B/C}$ pueden obtenerse directamente. El diagrama cinemático mostrado en la figura 16-15*d* muestra el movimiento relativo "circular" $\mathbf{v}_{B/C}$. Tenemos

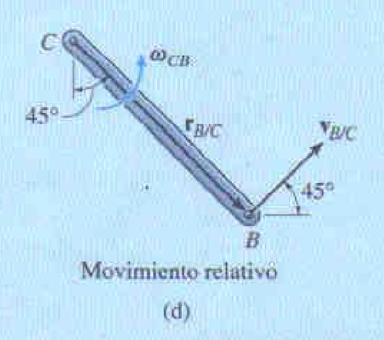
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_C + \mathbf{v}_{B/C}$$

$$\begin{bmatrix} v_B \\ \rightarrow \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \text{ m/s} \\ \downarrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \omega_{CB}(0.2\sqrt{2} \text{ m}) \\ \angle^{45^\circ} \end{bmatrix}$$

Resolviendo esos vectores en las direcciones $x$ y $y$ resulta

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad v_B = 0 + \omega_{CB}(0.2\sqrt{2}\cos 45^\circ)$$
$$(+\uparrow) \qquad 0 = -2 + \omega_{CB}(0.2\sqrt{2}\,\text{sen}\, 45^\circ)$$

que son los mismos resultados obtenidos con las ecuaciones 1 y 2.

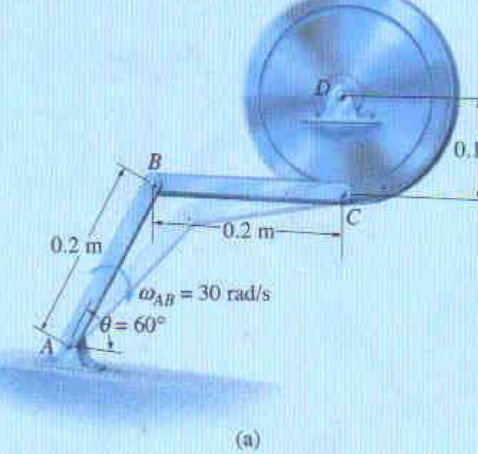


Movimiento relativo

(d)

**Fig. 16-15**

## EJEMPLO 16.9



(a)

La barra $AB$ del mecanismo mostrado en la figura 16-16*a* tiene velocidad angular, en el sentido de las manecillas del reloj, de 30 rad/s cuando $\theta = 60°$. Determine las velocidades angulares del miembro $BC$ y de la rueda en este instante.

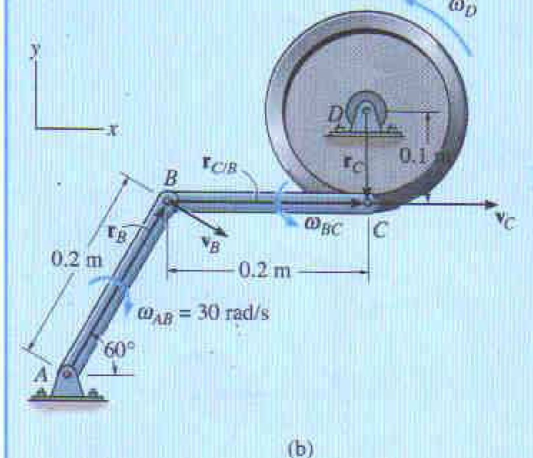
### Solución (Análisis vectorial)

***Diagrama cinemático.*** Por inspección, las velocidades de los puntos $B$ y $C$ son definidas mediante la rotación del eslabón $AB$ y de la rueda con respecto a sus ejes fijos. Los vectores de posición y la velocidad angular de cada miembro se muestran en el diagrama cinemático que aparece en la figura 16-16*b*. Para resolver el problema, escribiremos la ecuación cinemática apropiada para cada miembro.

***Ecuación de velocidad.***

Eslabón $AB$ (rotación con respecto a un eje fijo):

$$\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_B$$
$$= (-30\mathbf{k}) \times (0.2 \cos 60°\mathbf{i} + 0.2 \operatorname{sen} 60°\mathbf{j})$$
$$= \{5.20\mathbf{i} - 3.0\mathbf{j}\} \text{ m/s}$$



(b)

Fig. 16–16

Eslabón $BC$ (movimiento plano general):

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \boldsymbol{\omega}_{BC} \times \mathbf{r}_{C/B}$$
$$v_C\mathbf{i} = 5.20\mathbf{i} - 3.0\mathbf{j} + (\omega_{BC}\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{i})$$
$$v_C\mathbf{i} = 5.20\mathbf{i} + (0.2\omega_{BC} - 3.0)\mathbf{j}$$
$$v_C = 5.20 \text{ m/s}$$
$$0 = 0.2\omega_{BC} - 3.0$$
$$\omega_{BC} = 15 \text{ rad/s} \circlearrowleft \qquad \textit{Resp.}$$

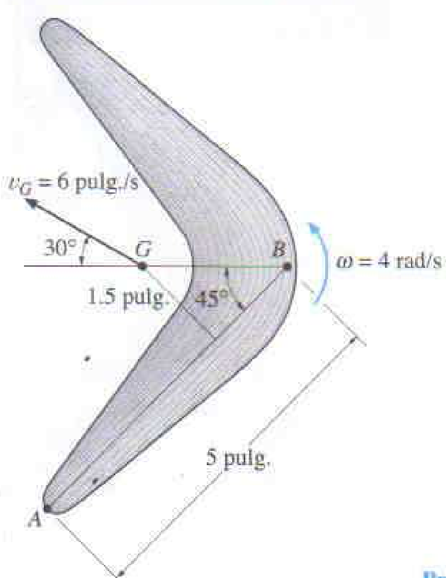
Rueda (rotación con respecto a un eje fijo):

$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega}_D \times \mathbf{r}_C$$
$$5.20\mathbf{i} = (\omega_D\mathbf{k}) \times (-0.1\mathbf{j})$$
$$5.20 = 0.1\omega_D$$
$$\omega_D = 52 \text{ rad/s} \circlearrowleft \qquad \textit{Resp.}$$

Observe que, por inspección, figura 16-16*a*, $v_B = (0.2)(30) = 6$ m/s, $\measuredangle^{30°}$ y $\mathbf{v}_C$ están dirigidas hacia la derecha. Como un ejercicio, use esta información y trate de obtener $\omega_{BC}$ aplicando $\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \mathbf{v}_{C/B}$ usando componentes escalares.

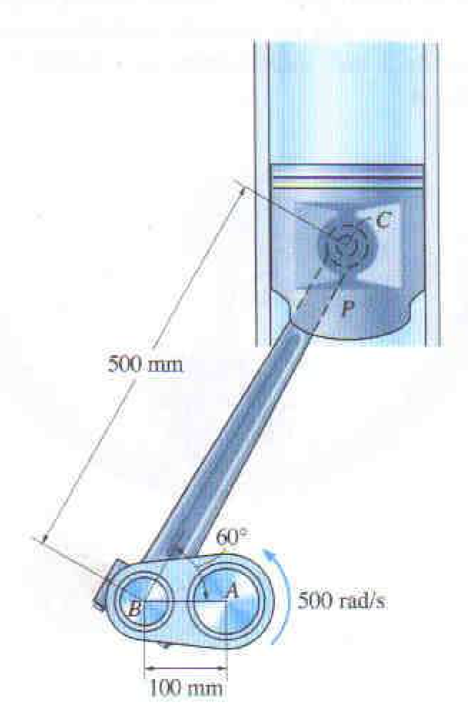
# PROBLEMAS

**16-50.** En el instante mostrado, el bumerang tiene velocidad angular $\omega = 4$ rad/s, y su centro de masa $G$ tiene velocidad $v_G = 6$ pulg./s. Determine la velocidad del punto $B$ en este instante.




Prob. 16–50

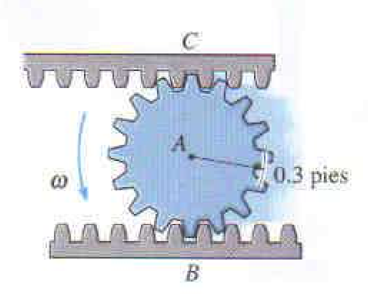
**16-51.** El cigüeñal $AB$ está girando a 500 rad/s alrededor de un eje fijo que pasa por $A$. Determine la rapidez del pistón $P$ en el instante que está en la posición mostrada.




Prob. 16–51

***16-52.** El engrane piñón $A$ rueda sobre la cremallera fija $B$ con velocidad angular $\omega = 4$ rad/s. Determine la velocidad de la cremallera $C$.

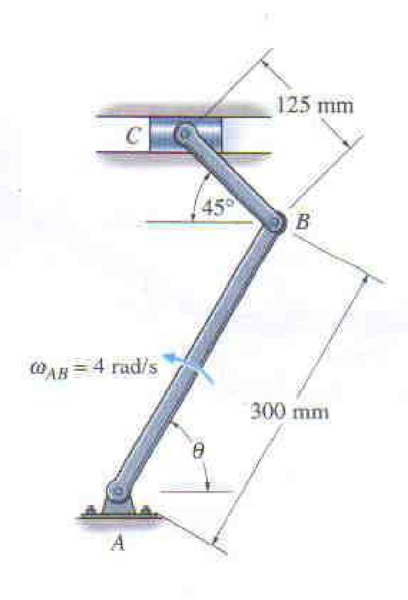
**16-53.** El engrane piñón $A$ rueda sobre cremalleras. Si $B$ se está moviendo hacia la derecha a 8 pies/s y $C$ se está moviendo hacia la izquierda a 4 pies/s, determine la velocidad angular del piñón y la velocidad de su centro $A$.




Probs. 16–52/53

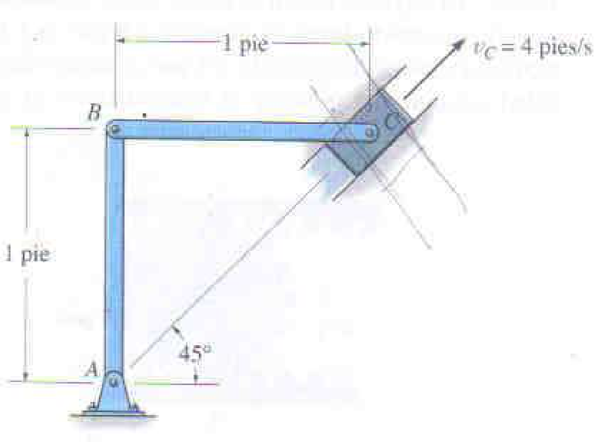
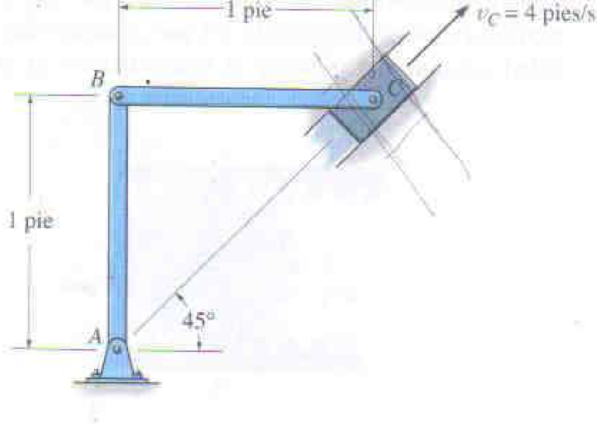
**16-54.** El mecanismo formador está diseñado para dar un golpe cortante lento y tener un rápido retorno a una hoja unida al deslizador colocado en $C$. Determine la velocidad del bloque deslizador $C$ en el instante $\theta = 60°$ si el eslabón $AB$ está girando a 4 rad/s.

**16-55.** Determine la velocidad del bloque deslizable ubicado en $C$ en el instante $\theta = 45°$, si el eslabón $AB$ está girando a 4 rad/s.



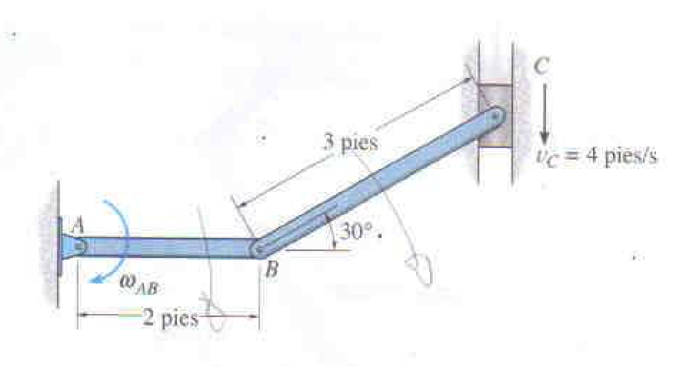

Probs. 16–54/55

***16-56.** La velocidad del bloque deslizable $C$ es de 4 pies/s hacia arriba por la ranura inclinada. Determine la velocidad angular de los eslabones $AB$ y $BC$ y la velocidad del punto $B$ en el instante mostrado.

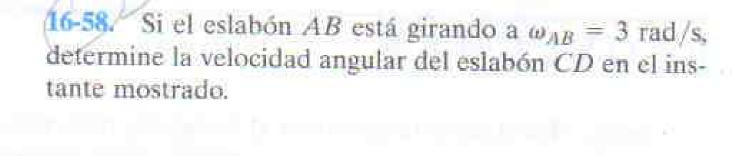




**Prob. 16–56**

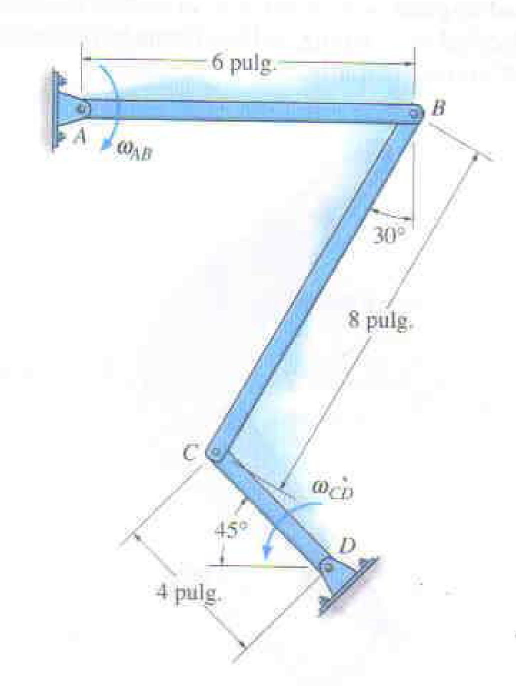
**16-57.** Si el bloque ubicado en $C$ se está moviendo hacia abajo a 4 pies/s, determine la velocidad angular de la barra $AB$ en el instante mostrado.




**Prob. 16–57**

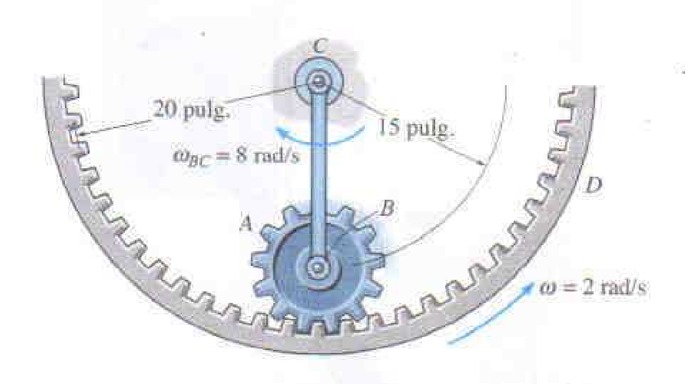


**16-58.** Si el eslabón $AB$ está girando a $\omega_{AB} = 3$ rad/s, determine la velocidad angular del eslabón $CD$ en el instante mostrado.



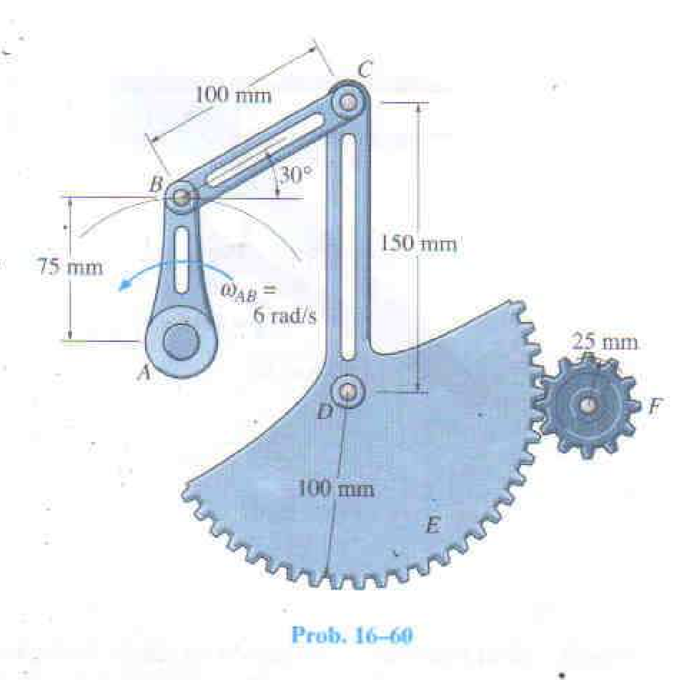

**Prob. 16–58**

**16-59.** El engrane planetario $A$ está articulado en $B$. El eslabón $BC$ gira en el sentido de las manecillas del reloj con velocidad angular de 8 rad/s, mientras que la cremallera exterior gira en sentido contrario con velocidad angular de 2 rad/s. Determine la velocidad angular del engrane $A$.




**Prob. 16–59**

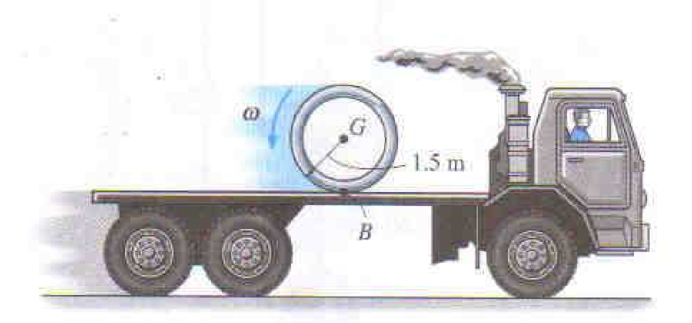
***16-60.** La rotación del eslabón $AB$ crea un movimiento oscilatorio del engrane $F$. Si $AB$ tiene velocidad angular de $\omega_{AB} = 6$ rad/s, determine la velocidad angular del engrane $F$ en el instante mostrado. El engrane $E$ está unido rígidamente al brazo $CD$ y articulado en $D$ a un punto fijo.




Prob. 16–60

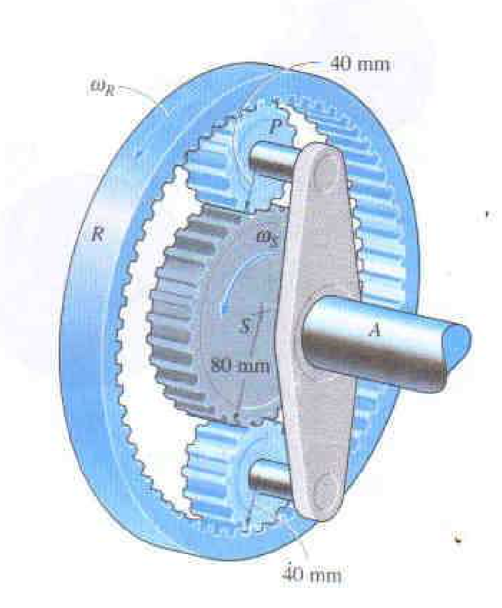
**16-61.** En el instante mostrado, el camión está viajando hacia la derecha a 3 m/s, mientras que el tubo está rodando en sentido contrario al de las manecillas del reloj a $\omega = 8$ rad/s sin deslizar en $B$. Determine la velocidad del centro $G$ del tubo.

**16-62.** En el instante mostrado, el camión está viajando hacia la derecha a 8 m/s. Si el carrete no resbala en $B$, determine su velocidad angular si su centro de masa $G$ parece permanecer estacionario a un observador apostado en el suelo.



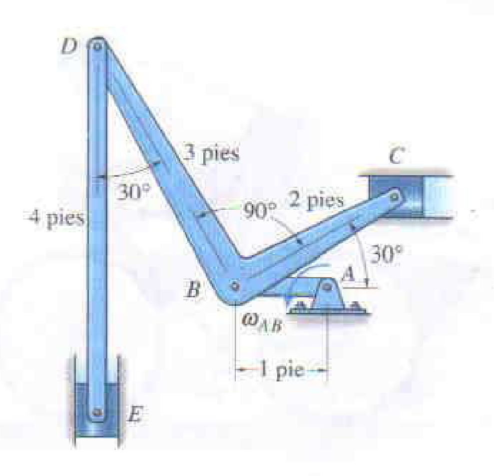

Probs. 16–61/62

**16-63.** El sistema planetario de engranes se usa en una transmisión automática para un automóvil. Bloqueando o liberando ciertos engranes, el sistema tiene la ventaja de poder operar el auto a diferente rapidez. Considere el caso donde el engrane anular $R$ se mantiene fijo, $\omega_R = 0$, y el engrane sol $S$ está girando a $\omega_S = 5$ rad/s. Determine la velocidad angular de cada uno de los engranes planetarios $P$ y de la flecha $A$.




Prob. 16–63

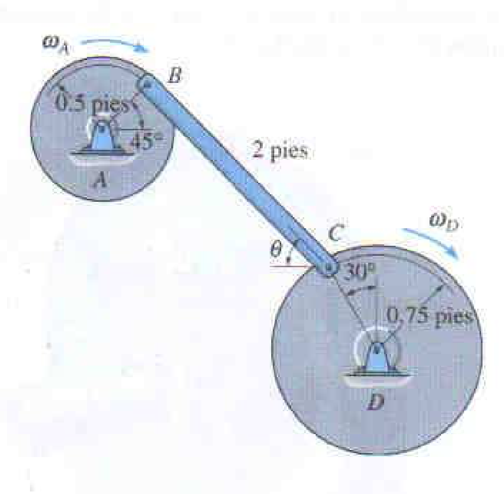
***16-64.** Si el eslabón $AB$ está girando alrededor del pasador ubicado en $A$ con velocidad angular $\omega_{AB} = 5$ rad/s, determine las velocidades de los bloques $C$ y $E$ en el instante mostrado.




Prob. 16–64

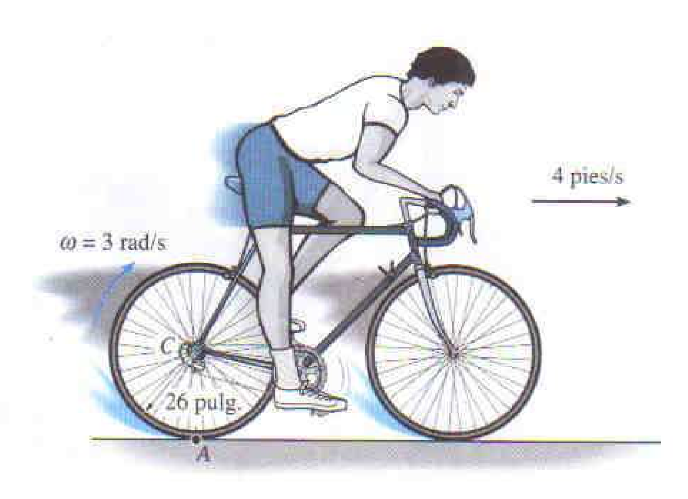
**16-65.** Si el disco $D$ tiene velocidad angular constante $\omega_D = 2$ rad/s, determine la velocidad angular del disco $A$ en el instante $\theta = 60°$.





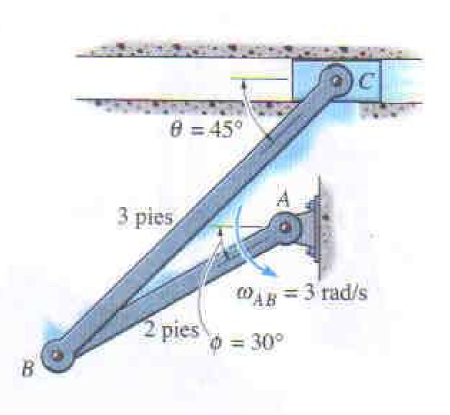

Prob. 16–65

**16-66.** La bicicleta tiene velocidad $v = 4$ pies/s, y en el mismo instante la rueda trasera tiene una velocidad angular, en el sentido de las manecillas del reloj, $\omega = 3$ rad/s que la hace deslizar en su punto de contacto $A$. Determine la velocidad del punto $A$.



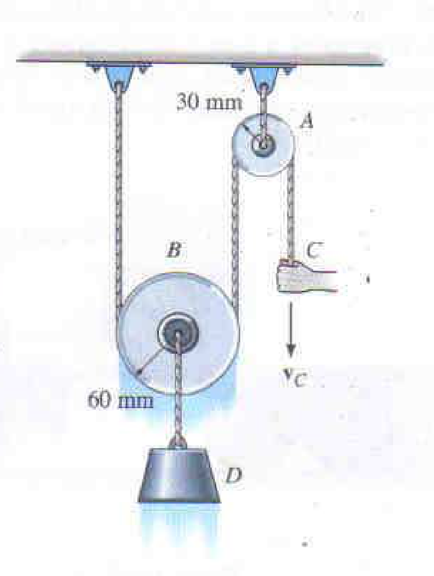

Prob. 16–66

**16-67.** Si la velocidad angular del eslabón $AB$ es $\omega_{AB} = 3$ rad/s, determine la velocidad del bloque en el punto $C$ y la velocidad angular del eslabón conector $CB$ en el instante $\theta = 45°$ y $\phi = 30°$.




Prob. 16–67

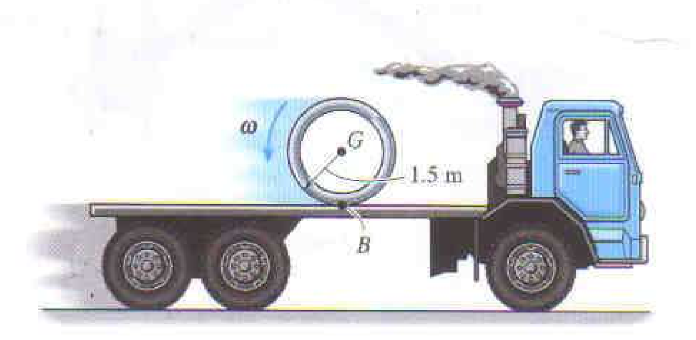
***16-68.** Si el extremo de la cuerda es jalado hacia abajo con rapidez $v_C = 120$ mm/s, determine las velocidades angulares de las poleas $A$ y $B$ y la rapidez del bloque $D$. Suponga que la cuerda no resbala sobre las poleas.




Prob. 16–68

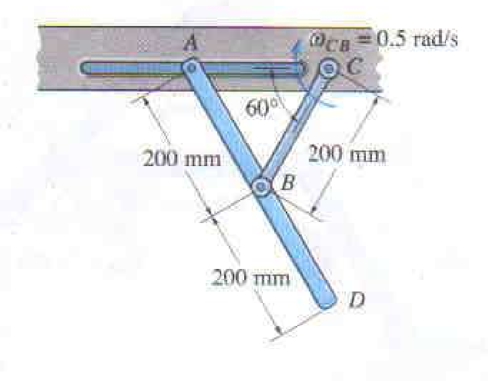
**16-69.** En el instante mostrado, el camión está viajando hacia la derecha a $8t$ m/s, mientras el tubo está rodando en sentido contrario al de las manecillas del reloj a $\omega = 2t$ rad/s sin deslizar en $B$, donde $t$ está en segundos. Determine la velocidad del centro $G$ del tubo como función del tiempo.

**16-70.** En el instante mostrado, el camión está viajando hacia la derecha a 12 m/s. Si el tubo no resbala en $B$, determine su velocidad angular si a un observador situado en el suelo le parece que su centro de masa $G$ se mueve hacia la derecha a 3 m/s.



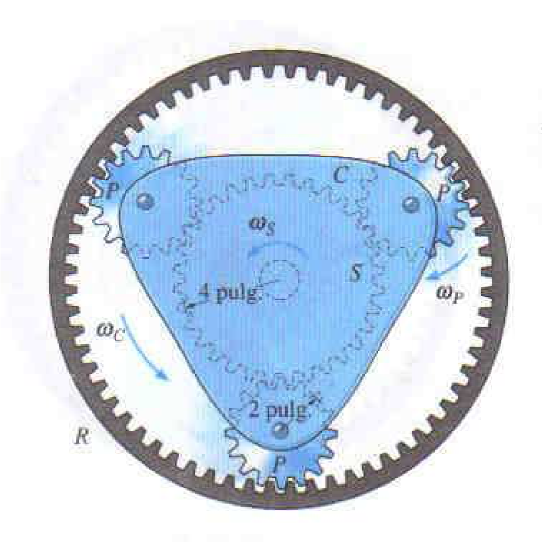

Probs. 16–69/70

**16-71.** En la figura se muestra la vista superior de una ventana de servicio automático en un restaurante de comida rápida. Durante la operación, un motor impulsa al eslabón $CB$, conectado mediante un pasador, con velocidad angular $\omega_{CB} = 0.5$ rad/s. Determine la velocidad del extremo $A$ en el instante mostrado, el extremo se mueve a lo largo de la guía ranurada.



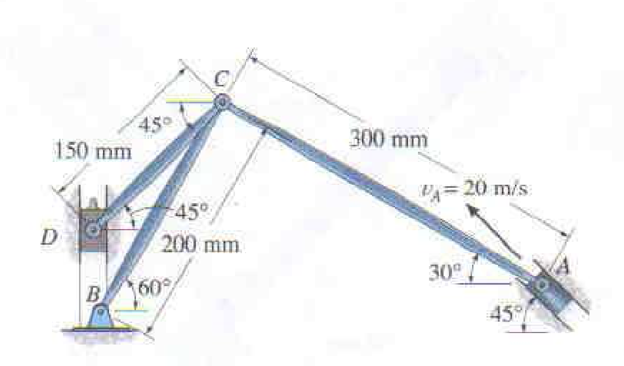

Prob. 16–71

*16-72. Parte de una transmision automática consta de un engrane anular fijo $R$, tres engranes planetarios iguales $P$, el engrane sol $S$, y el portador de planetas $C$, que se muestra sombreado. Si el engrane sol está girando a $\omega_s = 6$ rad/s, determine la velocidad angular $\omega_C$ del *portador de planetas*. Observe que $C$ está conectado por medio de un pasador al centro de cada uno de los engranes planetarios.



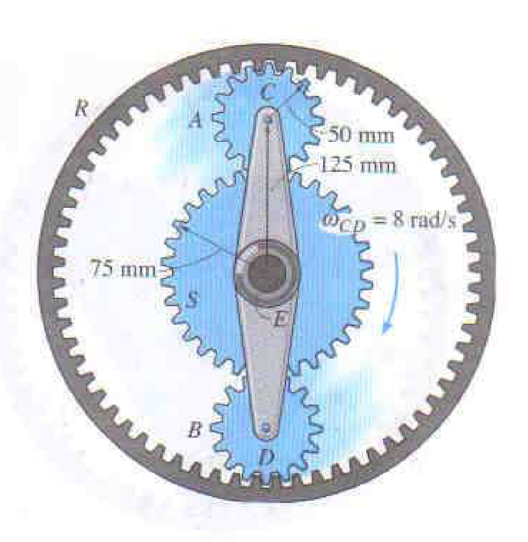

Prob. 16–72

**16-73.** El mecanismo que se muestra se usa en una máquina remachadora. Consta de un pistón impulsor $A$, tres eslabones y un remachador unido al bloque deslizable $D$. Determine la velocidad de $D$ en el instante mostrado, cuando el pistón instalado en $A$ está viajando a $v_A = 20$ m/s.



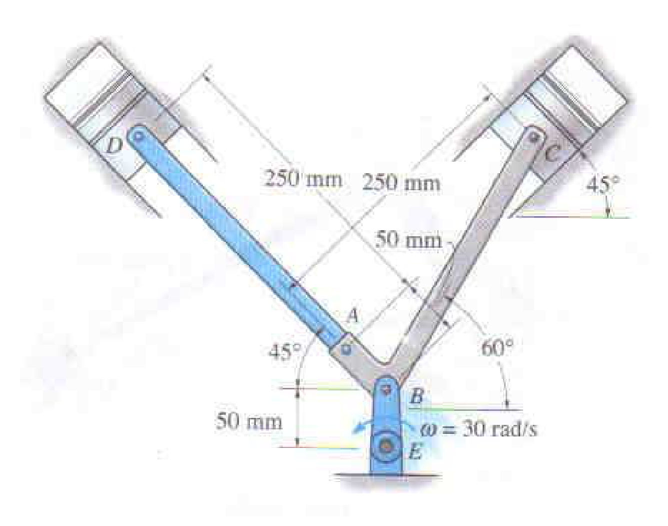

Prob. 16–73

**16-74.** En una transmisión de automóvil los piñones planetas $A$ y $B$ giran sobre flechas que están montadas sobre el portador $CD$ de los piñones planetas. Como se muestra, $CD$ está unido a una flecha en $E$ alineada con el centro del engrane sol *fijo* $S$. Esta flecha no está unida al engrane sol. Si $CD$ está girando a $\omega_{CD} = 8$ rad/s, determine la velocidad angular del engrane anular $R$.



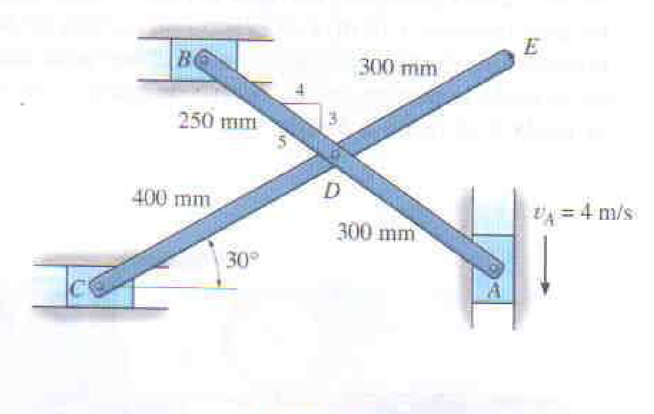

Prob. 16–74

**16-75.** El motor de dos cilindros está diseñado de manera que los pistones se conectan al cigüeñal $BE$ usando una barra maestra $ABC$ y una barra articulada $AD$. Si el cigüeñal está girando a $\omega = 30$ rad/s, determine las velocidades de los pistones $C$ y $D$ en el instante mostrado.



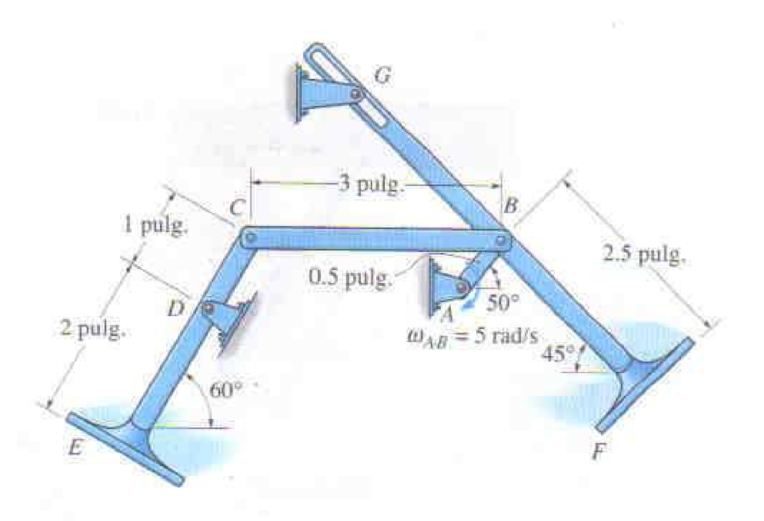

Prob. 16–75

***16-76.** Si el bloque deslizable $A$ se está moviendo hacia abajo a $v_A = 4$ m/s, determine las velocidades de los bloques $B$ y $C$ en el instante mostrado.




Prob. 16–76

**16-77.** Los animales mecánicos de juguete a menudo usan un mecanismo para caminar como el que se muestra idealizado en la figura. Si la manivela impulsora $AB$ es movida por un motor de resorte en tal forma que $\omega_{AB} = 5$ rad/s, determine la velocidad de la pata trasera $E$ en el instante mostrado. Aunque no es parte de este problema, el extremo superior de la pierna delantera tiene una guía ranurada que está constreñida por el pasador fijo en $G$.

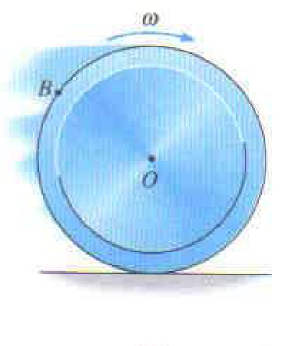



Prob. 16–77

## 16.6 Centro instantáneo de velocidad cero

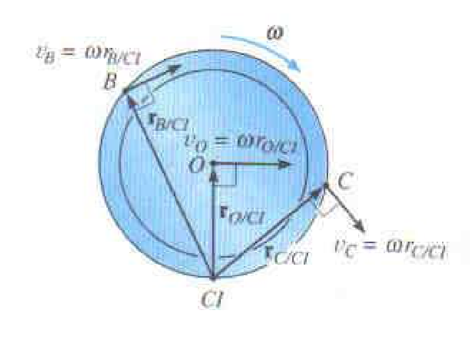
La velocidad de cualquier punto $B$ ubicado sobre un cuerpo rígido puede obtenerse en una manera muy directa si se elige el punto base $A$ como un punto que tiene *velocidad cero* en el instante considerado. En este caso, $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$, y por tanto la ecuación de velocidad, $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$, toma la forma $\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$. Para un cuerpo con movimiento plano general, el punto $A$ seleccionado de esta manera se llama *centro instantáneo de velocidad cero* ($CI$), y se encuentra sobre el *eje instantáneo de velocidad cero*. Este eje es siempre perpendicular al plano del movimiento, y la intersección del eje con este plano define la ubicación del $CI$. Como el punto $A$ coincide con el $CI$, entonces $\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/CI}$, y así el punto $B$ se mueve momentáneamente alrededor del $CI$ en una *trayectoria circular*; en otras palabras, el cuerpo parece girar con respecto al eje instantáneo. La *magnitud* de $\mathbf{v}_B$ es simplemente $v_B = \omega r_{B/CI}$, donde $\omega$ es la velocidad angular del cuerpo. Debido al movimiento circular, la *dirección* de $\mathbf{v}_B$ debe ser siempre *perpendicular* a $\mathbf{r}_{B/CI}$.

Por ejemplo, considere la rueda mostrada en la figura 16-17*a*. Si *rueda sin deslizar*, entonces el punto de *contacto* con el suelo tiene *velocidad cero*. Por tanto, este punto representa el $CI$ para la rueda, figura 16-17*b*. Si suponemos que la rueda está momentáneamente articulada en este punto, las velocidades de los puntos $B$, $C$, $O$, etc., pueden encontrarse usando $v = \omega r$. Aquí las distancias radiales $r_{B/CI}$, $r_{C/CI}$ y $r_{O/CI}$, mostradas en la figura 16-17*b*, deben ser determinadas partiendo de la geometría de la rueda.



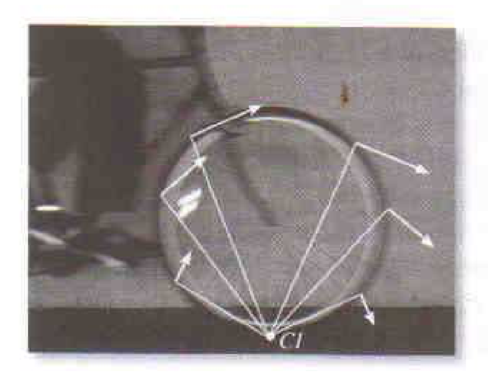


(a)




(b)

Fig. 16–17




El $CI$ para esta bicicleta está en el suelo. Ahí los rayos son algo visibles, mientras que en la parte superior de la rueda se ven borrosos. Observe también cómo los puntos sobre las porciones laterales de la rueda se mueven como lo muestran sus velocidades.

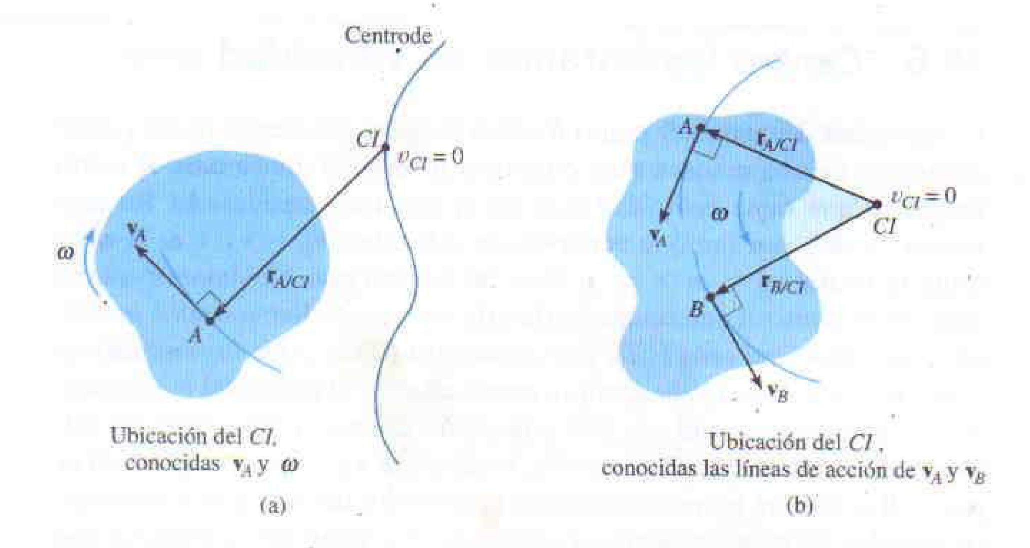



Fig. 16–18

**Ubicación del CI.** Para localizar el *CI* podemos usar el hecho de que la *velocidad* de un punto sobre el cuerpo es *siempre perpendicular* al *vector de posición relativa* que se extiende desde el *CI* hasta el punto. Existen varias posibilidades:

- *Dada la velocidad* $\mathbf{v}_A$ *de un punto A sobre el cuerpo, y la velocidad angular* $\boldsymbol{\omega}$ *del cuerpo*, figura 16-18*a*. En este caso, el *CI* está ubicado a lo largo de la línea dibujada perpendicularmente a $\mathbf{v}_A$ en *A*, de tal forma que la distancia desde *A* hasta el *CI* es $r_{A/CI} = v_A/\omega$. Observe que el *CI* se encuentra arriba a la derecha de *A* ya que $\mathbf{v}_A$ debe generar una velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ en el sentido de las manecillas del reloj con respecto al *CI*.

- *Dadas las líneas de acción de dos velocidades no paralelas* $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$, figura 16-18*b*. En los puntos *A* y *B*, estructure segmentos de línea que sean perpendiculares a $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$. La extensión de esas perpendiculares hasta su *punto de intersección*, como se muestra, localiza el *CI* en el instante considerado.

- *Dada la magnitud y la dirección de dos velocidades paralelas* $\mathbf{v}_A$ *y* $\mathbf{v}_B$. Aquí se determina la ubicación del *CI* por medio de triángulos semejantes. Se muestran ejemplos en las figuras 16-18*c* y *d*. En ambos casos $r_{A/CI} = v_{A/\omega}$ y $r_{B/CI} = v_{B/\omega}$. Si *d* es una distancia conocida entre los puntos *A* y *B*, entonces en la figura 16-18*c*, $r_{A/CI} + r_{B/CI} = d$, y en la figura 16-18*d*, $r_{B/CI} - r_{A/CI} = d$. Como un caso especial, observe que si el cuerpo se está *trasladando*, $\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B$, entonces el *CI* estará ubicado en el infinito, entonces $r_{A/CI} = r_{B/CI} \rightarrow \infty$. Si este es el caso, $\omega = (v_A/r_{A/CI}) = (v_B/r_{B/CI}) \rightarrow 0$, como se esperaba.

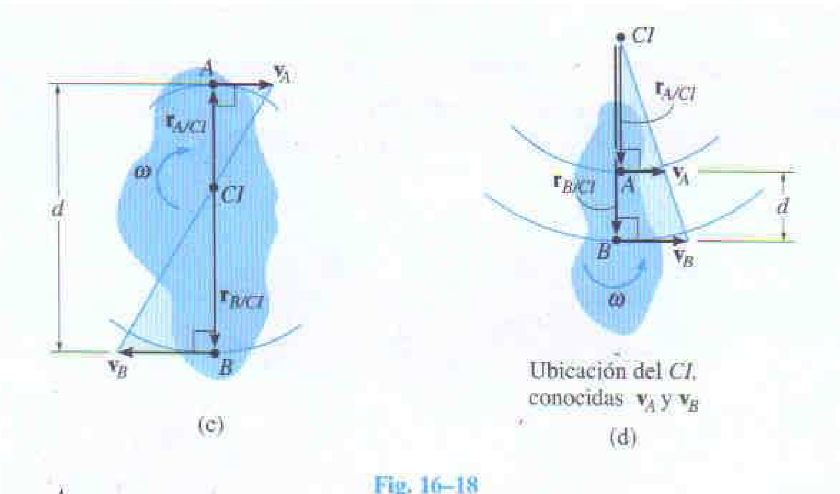
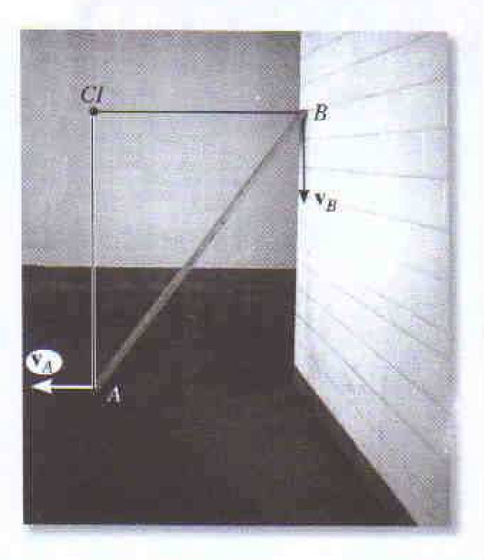



Fig. 16–18




Al deslizarse la tabla hacia abajo a la izquierda, queda sometida a un movimiento general plano. Como las direcciones de las velocidades de sus extremos $A$ y $B$ son conocidas, el $CI$ está ubicado como se muestra. En este instante, la tabla girará momentáneamente alrededor de este punto. Dibuje la tabla en diversas posiciones, establezca el $CI$ para cada caso, y esboce el centrode.

Observe que el punto elegido como centro instantáneo de velocidad cero para el cuerpo *sólo puede usarse para un instante de tiempo* ya que el cuerpo cambia su posición de un instante al siguiente. El lugar geométrico de los puntos que definen la ubicación del $CI$ durante el movimiento del cuerpo se llama *centrode*, figura 16-18*a*, y así cada punto del centrode actúa como $CI$ para el cuerpo sólo por un instante.

Aunque el $CI$ puede ser convenientemente usado para determinar la velocidad de cualquier punto en un cuerpo, *generalmente no tiene aceleración cero* y, por tanto, *no debe* usarse para encontrar las aceleraciones de puntos en un cuerpo.

## PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

La velocidad de un punto sobre un cuerpo sometido a movimiento plano general puede ser determinada con referencia a su centro instantáneo de velocidad cero siempre que la ubicación del $CI$ sea establecida primero usando uno de los tres métodos descritos arriba.

- Como se muestra en el diagrama cinemático en la figura 16-19, el cuerpo es supuesto como "extendido y articulado" en el $CI$ de tal manera que, en el instante considerado, gira con respecto a este pasador con su velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$.
- La *magnitud* de la velocidad para cada uno de los puntos arbitrarios $A$, $B$ y $C$ sobre el cuerpo puede ser determinada usando la ecuación $v = \omega r$, donde $r$ es la distancia radial desde el $CI$ hasta cada punto.
- La línea de acción de cada vector velocidad $\mathbf{v}$ es *perpendicular* a su línea radial asociada $\mathbf{r}$, y la velocidad tiene un *sentido de dirección* que tiende a mover el punto de manera consistente con la rotación angular $\boldsymbol{\omega}$ de la línea radial, figura 16-19.

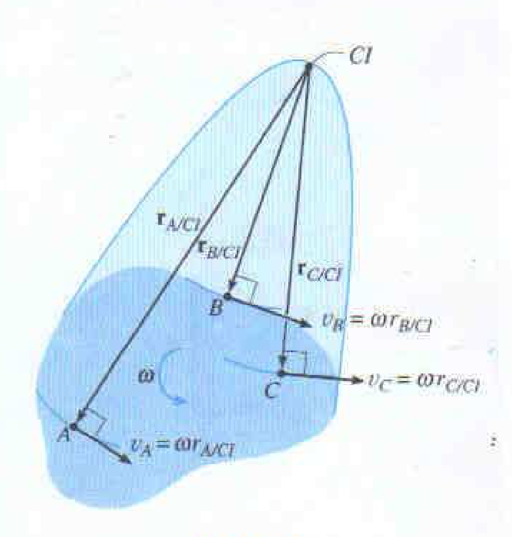



Fig. 16–19

## EJEMPLO 16.10

Muestre cómo determinar la ubicación del centro instantáneo de velocidad cero para (a) el miembro $BC$ mostrado en la figura 16-20$a$; y (b) para el eslabón $CB$ mostrado en la figura 16-20$b$.

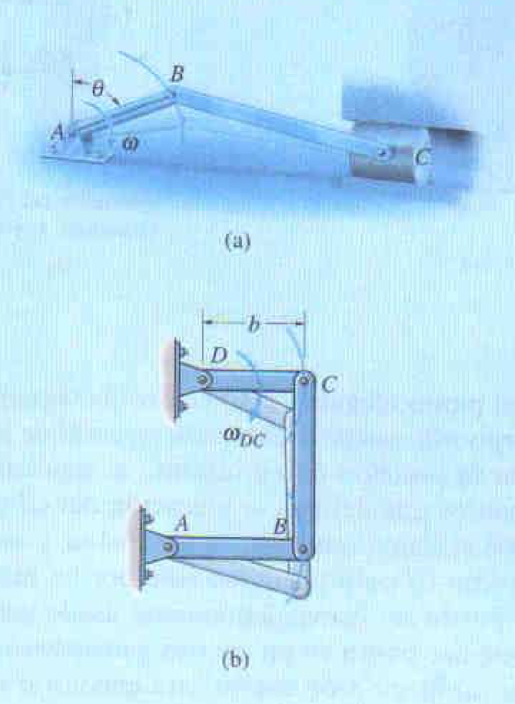
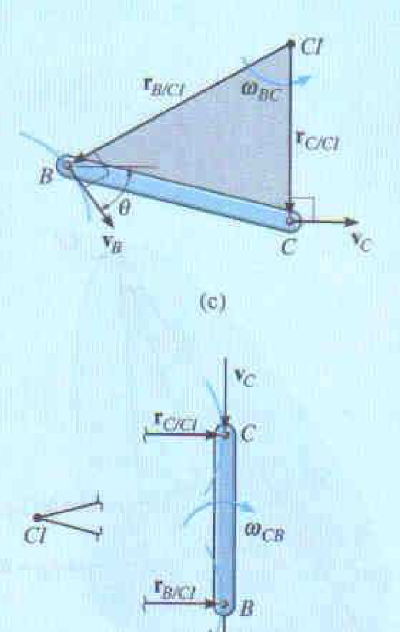



Fig. 16-20



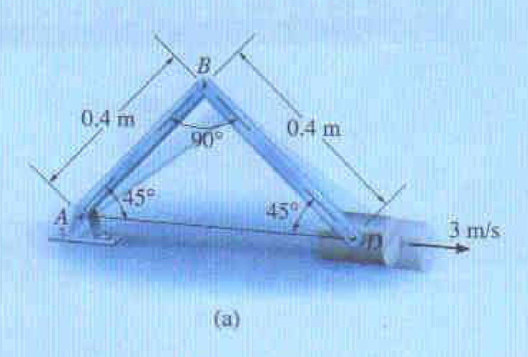

### Solución

*Parte (a).* Como se muestra en la figura 16-20$a$, el punto $B$ tiene una velocidad $\mathbf{v}_B$ que es causada por la rotación del eslabón $AB$ en el sentido de las manecillas del reloj. El punto $B$ se mueve en una trayectoria circular tal que $\mathbf{v}_B$ es perpendicular a $AB$, y actúa entonces a un ángulo $\theta$ con la horizontal como se muestra en la figura 16-20$c$. El movimiento del punto $B$ causa que el pistón se mueva *horizontalmente* hacia adelante con velocidad $\mathbf{v}_C$. Cuando se trazan líneas perpendiculares a $\mathbf{v}_B$ y $\mathbf{v}_C$, figura 16-20$c$, éstas se cortan en el $CI$.

*Parte (b).* Los puntos $B$ y $C$ siguen trayectorias circulares de movimiento ya que cada una de las barras $AB$ y $DC$ está sometida a rotación con respecto a un eje fijo, figura 16-20$b$. Como la velocidad es siempre tangente a la trayectoria, en el instante considerado, $\mathbf{v}_C$ sobre la barra $DC$ y $\mathbf{v}_B$ sobre la barra $AB$ están dirigidas verticalmente hacia abajo, a lo largo del eje del eslabón $CB$, figura 16-20$d$. Líneas radiales dibujadas perpendicularmente a esas dos velocidades forman líneas paralelas que se cortan en el "infinito", esto es $r_{C/CI} \rightarrow \infty$ y $r_{B/CI} \rightarrow \infty$. Entonces, $\omega_{CB} = (v_C/r_{C/CI}) = \rightarrow 0$. En consecuencia, la barra $CB$ se *traslada* momentáneamente. Sin embargo, un instante después, $CB$ se moverá a una posición inclinada, causando que el centro instantáneo se traslade a alguna ubicación finita.

## EJEMPLO 16.11

El bloque $D$ mostrado en la figura 16-21$a$ se mueve con rapidez de 3 m/s. Determine las velocidades angulares de los eslabones $BD$ y $AB$, en el instante mostrado.

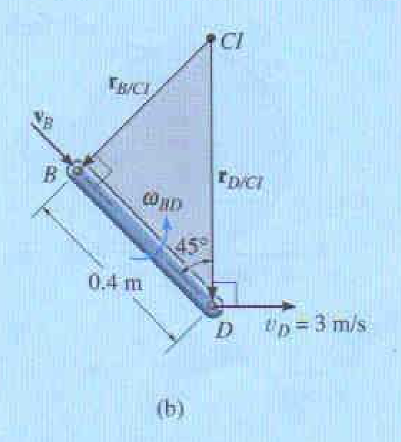



(a)

Fig. 16–21

### Solución

Conforme $D$ se mueve hacia la derecha, causa que el brazo $AB$ gire en el sentido de las manecillas del reloj con respecto al punto $A$. Por tanto, $\mathbf{v}_B$ está dirigido perpendicularmente a $AB$. El centro instantáneo de velocidad cero para $BD$ se localiza en la intersección de la línea de segmentos dibujada perpendicularmente a $\mathbf{v}_B$ y $\mathbf{v}_D$, figura 16-21$b$. Por geometría,




(b)

$$r_{B/CI} = 0.4 \tan 45° \text{m} = 0.4 \text{ m}$$

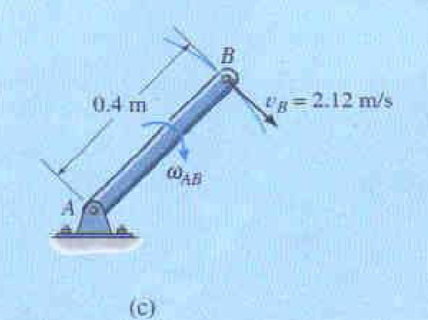
$$r_{D/CI} = \frac{0.4 \text{ m}}{\cos 45°} = 0.566 \text{ m}$$

Como la magnitud de $\mathbf{v}_D$ es conocida, la velocidad angular del eslabón $BD$ es

$$\omega_{BD} = \frac{v_D}{r_{D/CI}} = \frac{3 \text{ m/s}}{0.566 \text{ m}} = 5.30 \text{ rad/s} \circlearrowleft \qquad \textit{Resp.}$$

La velocidad de $B$ es, por tanto,

$$v_B = \omega_{BD}(r_{B/CI}) = 5.30 \text{ rad/s}(0.4 \text{ m}) = 2.12 \text{ m/s} \measuredangle^{45°}$$



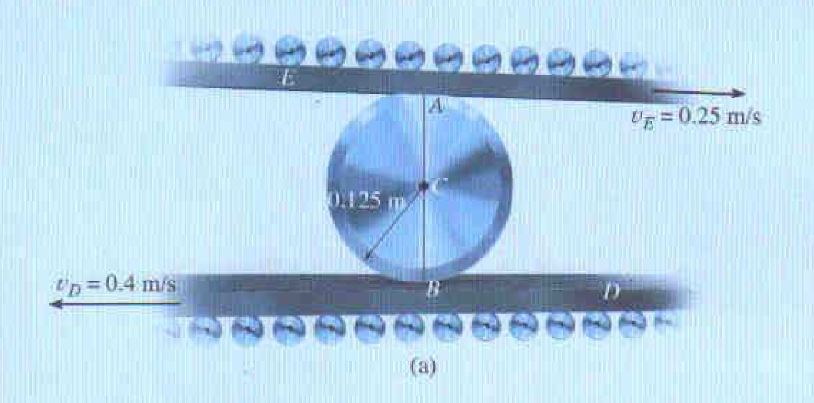

(c)

A partir de la figura 16-21$c$, la velocidad angular de $AB$ es

$$\omega_{AB} = \frac{v_B}{r_{B/A}} = \frac{2.12 \text{ m/s}}{0.4 \text{ m}} = 5.30 \text{ rad/s} \circlearrowright \qquad \textit{Resp.}$$

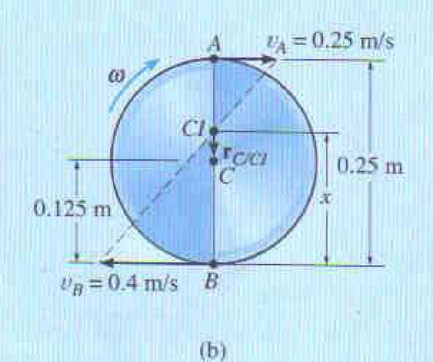
## EJEMPLO 16.12

El cilindro mostrado en la figura 16-22*a* rueda sin deslizar entre las dos placas móviles *E* y *D*. Determine la velocidad angular del cilindro y la velocidad de su centro *C* en el instante mostrado.



(a)

Fig. 16–22



(b)

### Solución

Como no ocurre ningún deslizamiento, los puntos de contacto *A* y *B* sobre el cilindro tienen las mismas velocidades que las placas *E* y *D*, respectivamente. Además, las velocidades $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ son *paralelas*, de modo que, por la proporcionalidad de los triángulos rectos, el *CI* está ubicado en un punto sobre la línea *AB*, figura 16-22*b*. Suponiendo que este punto está a una distancia *x* de *B*, tenemos

$$v_B = \omega x; \qquad 0.4 \text{ m/s} = \omega x$$

$$v_A = \omega(0.25 \text{ m} - x); \qquad 0.25 \text{ m/s} = \omega(0.25 \text{ m} - x)$$

Dividiendo una ecuación entre la otra se elimina $\omega$ y se obtiene

$$0.4(0.25 - x) = 0.25x$$

$$x = \frac{0.1}{0.65} = 0.154 \text{ m}$$

Por consiguiente, la velocidad angular del cilindro es

$$\omega = \frac{v_B}{x} = \frac{0.4 \text{ m/s}}{0.154 \text{ m}} = 2.60 \text{ rad/s} \circlearrowright \qquad \textit{Resp.}$$

La velocidad del punto *C* es, por tanto,

$$v_C = \omega r_{C/CI} = 2.60 \text{ rad/s}(0.154 \text{ m} - 0.125 \text{ m})$$
$$= 0.0750 \text{ m/s} \leftarrow \qquad \textit{Resp.}$$

# PROBLEMAS

**16-78.** Resuelva el problema 16-51 usando el método del centro instantáneo de velocidad cero.

**16-79.** Resuelva el problema 16-54 usando el método del centro instantáneo de velocidad cero.

***16-80.** Resuelva el problema 16-60 usando el método del centro instantáneo de velocidad cero.

**16-81.** Resuelva el problema 16-61 usando el método del centro instantáneo de velocidad cero.

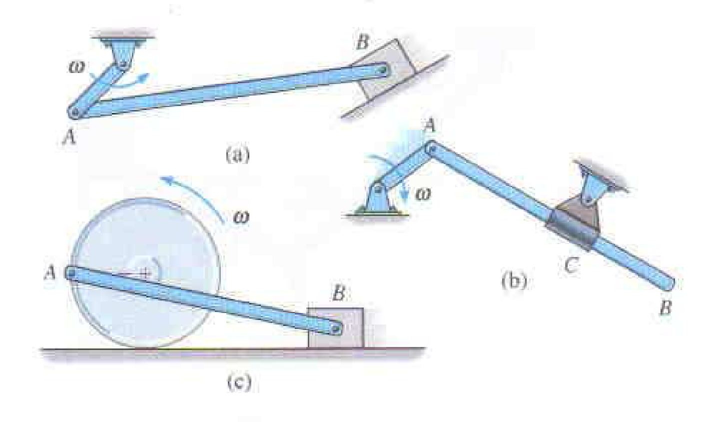
**16-82.** Resuelva el problema 16-62 usando el método del centro instantáneo de velocidad cero.

**16-83.** Resuelva el problema 16-63 usando el método del centro instantáneo de velocidad cero.

***16-84.** Resuelva el problema 16-65 usando el método del centro instantáneo de velocidad cero.

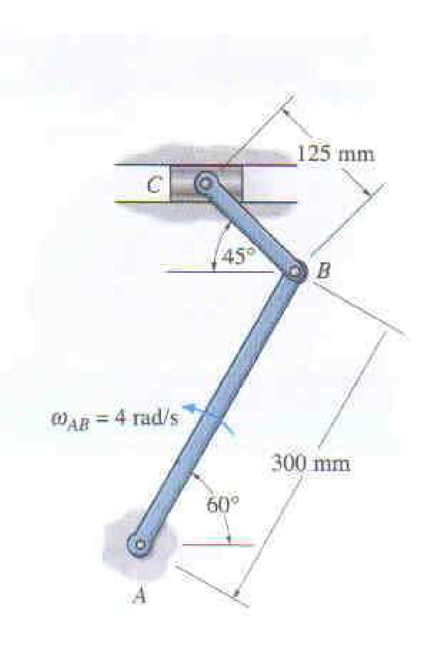
**16-85.** Resuelva el problema 16-66 usando el método del centro instantáneo de velocidad cero.

**16-86.** En cada caso muestre gráficamente cómo localizar el centro instantáneo de velocidad cero del eslabón $AB$. Suponga que se conoce la geometría.




Prob. 16–86

**16-87.** El mecanismo de retorno rápido está diseñado para dar un golpe cortante lento y tener un rápido retorno a una hoja unida al deslizador colocado en $C$. Determine la velocidad angular del eslabón $CB$ en el instante mostrado si el eslabón $AB$ está girando a 4 rad/s.

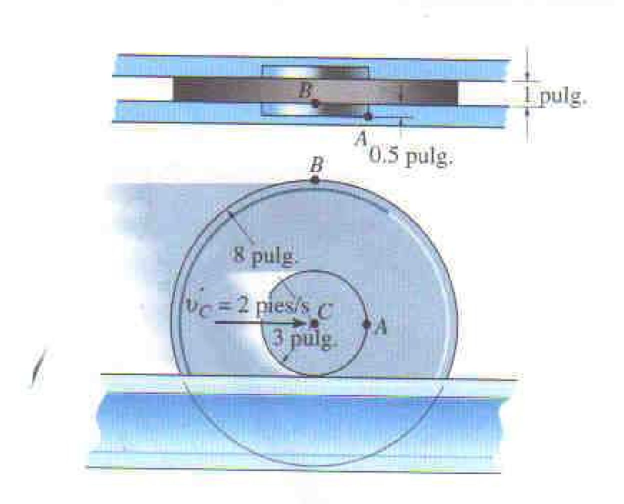



Prob. 16–87

***16-88.** En el instante mostrado, el disco está girando a $\omega$ = 4 rad/s. Determine las velocidades de los puntos $A$, $B$ y $C$.

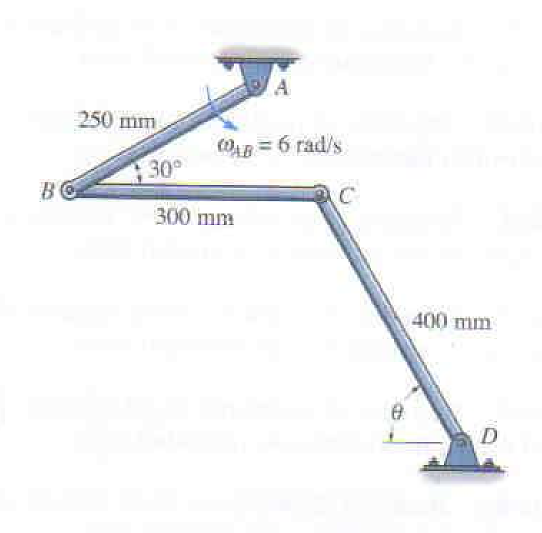
Prob. 16–88

**16-89.** Los rodillos ruedan sobre sus cubos sin deslizar sobre la superficie horizontal. Si la velocidad del centro de la rueda es $v_C = 2$ pies/s hacia la derecha, determine las velocidades de los puntos $A$ y $B$ en el instante mostrado.



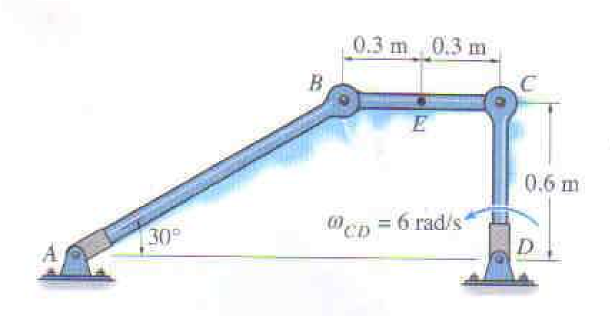

Prob. 16–89

**16-91.** Si el eslabón $AB$ está girando a $\omega_{AB} = 6$ rad/s, determine las velocidades angulares de los eslabones $BC$ y $CD$ en el instante $\theta = 60°$.



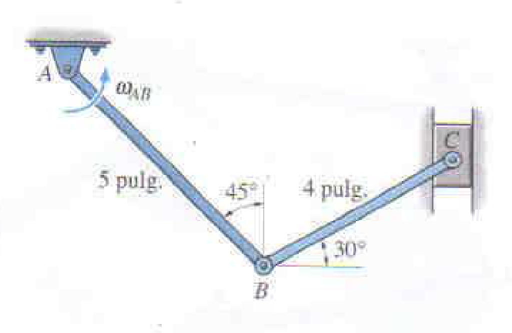

Prob. 16–91

**16-90.** Si el eslabón $CD$ tiene velocidad angular $\omega_{CD} = 6$ rad/s, determine la velocidad del punto $E$ sobre el eslabón $BC$ y la velocidad angular del eslabón $AB$ en el instante mostrado.




Prob. 16–90

***16-92.** Determine la velocidad angular del eslabón $AB$ en el instante mostrado si el bloque $C$ se está moviendo hacia arriba a 12 pulg./s.




Prob. 16–92

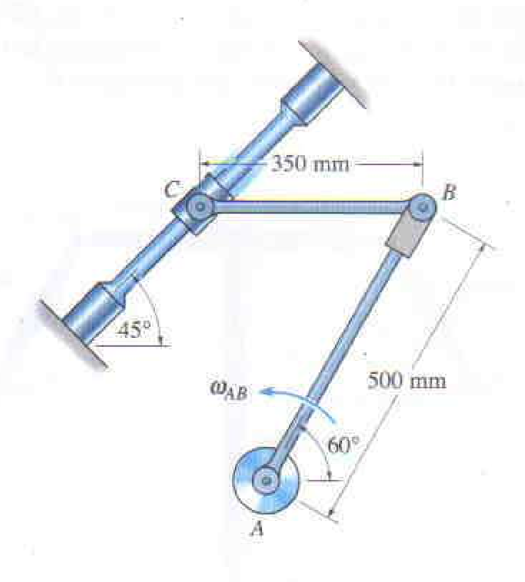
**16-93.** Al viajar el auto hacia delante a 80 pies/s sobre un camino mojado, debido al deslizamiento, las ruedas traseras tienen velocidad angular $\omega = 100$ rad/s. Determine la rapidez de los puntos $A$, $B$ y $C$ causada por el movimiento.




**Prob. 16–93**

**16-94.** Se sabe que la velocidad angular del eslabón $AB$ es $\omega_{AB} = 4$ rad/s. Determine la velocidad del collar en el punto $C$ y la velocidad angular del eslabón $CB$ en el instante mostrado. El eslabón $CB$ está en posición horizontal en este instante.

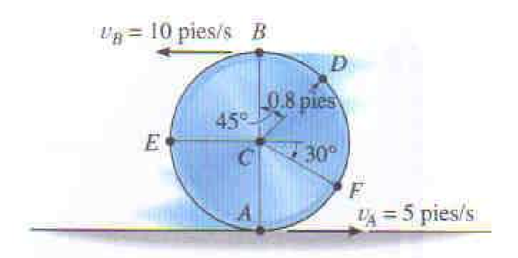
**16-95.** Si el collar instalado en $C$ se está moviendo hacia abajo y a la izquierda a $v_C = 8$ m/s, determine la velocidad angular del eslabón $AB$ en el instante mostrado.




**Probs. 16–94/95**

***16-96.** Debido al deslizamiento, los puntos $A$ y $B$ sobre el borde del disco tienen las velocidades mostradas. Determine las velocidades del punto $C$ central y del punto $D$ en este instante.

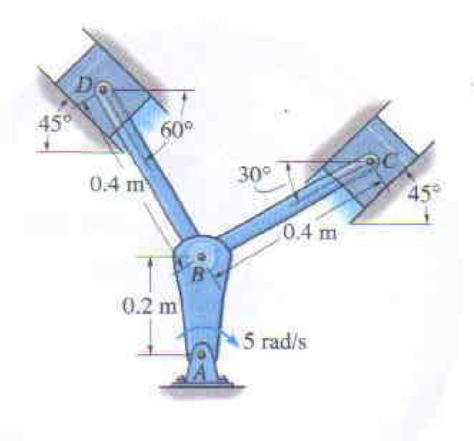
**16-97.** Debido al deslizamiento, los puntos $A$ y $B$ sobre el borde del disco tienen las velocidades mostradas. Determine las velocidades del punto central $C$ y del punto $E$ en este instante.




**Probs. 16–96/97**

**16-98.** El mecanismo usado en un motor marino consta de un solo cigüeñal $AB$ y dos bielas $BC$ y $BD$. Determine la velocidad del pistón colocado en $C$ cuando el cigüeñal está en la posición mostrada y tiene velocidad angular de 5 rad/s.

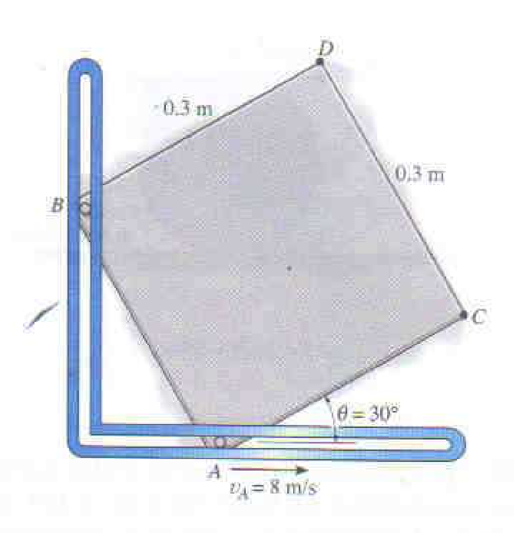
**16-99.** El mecanismo usado en un motor marino consta de un solo cigüeñal $AB$ y dos bielas $BC$ y $BD$. Determine la velocidad del pistón colocado en $D$ cuando el cigüeñal está en la posición mostrada y tiene velocidad angular de 5 rad/s.




**Probs. 16–98/99**

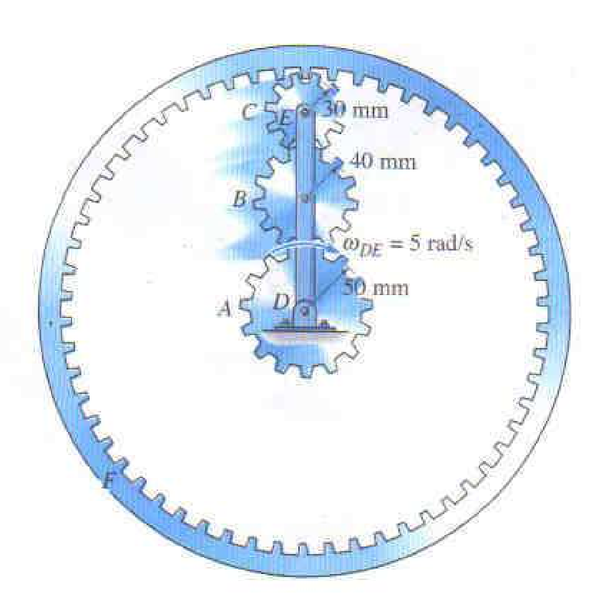
***16-100.** La placa cuadrada está confinada dentro de las ranuras en los puntos $A$ y $B$. Cuando $\theta = 30°$, el punto $A$ se está moviendo a $v_A = 8$ m/s. Determine la velocidad del punto $C$ en este instante.

**16-101.** La placa cuadrada está confinada dentro de las ranuras en los puntos $A$ y $B$. Cuando $\theta = 30°$, el punto $A$ se está moviendo a $v_A = 8$ m/s. Determine la velocidad del punto $D$ en este instante.



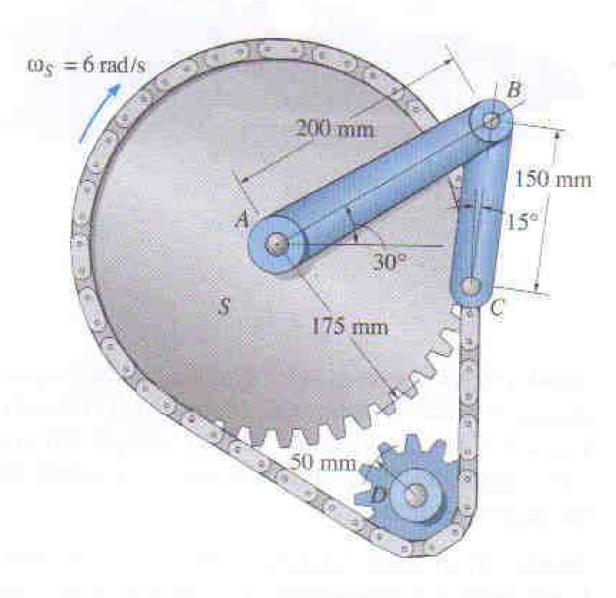

**Probs. 16–100/101**

**16-102.** El tren epicíclico de engranes es impulsado por el eslabón giratorio $DE$, que tiene velocidad angular $\omega_{DE} = 5$ rad/s. Si el engrane anular $F$ está fijo, determine las velocidades angulares de los engranes $A$, $B$ y $C$.



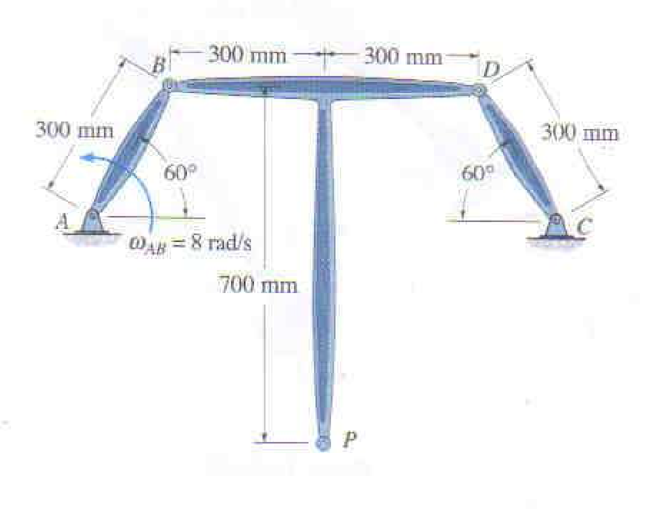

**Prob. 16–102**

**16-103.** El mecanismo produce un movimiento intermitente del eslabón $AB$. Si la rueda dentada $S$ está girando con velocidad angular $\omega_s = 6$ rad/s, determine la velocidad angular del eslabón $AB$ en este instante. La rueda dentada $S$ se encuentra montada sobre una flecha que está separada de una flecha colineal unida a $AB$ en $A$. El pasador situado en $C$ está unido a uno de los eslabones de la cadena.




**Prob. 16–103**

***16-104.** Los eslabones similares $AB$ y $CD$ giran con respecto a los pasadores fijos en $A$ y $C$. Si $AB$ tiene velocidad angular $\omega_{AB} = 8$ rad/s, determine la velocidad angular de $BDP$ y la velocidad del punto $P$.




**Prob. 16–104**

## 16.7 Análisis de movimiento relativo: Aceleración

Una ecuación que relaciona las aceleraciones de dos puntos sobre un cuerpo rígido sometido a movimiento plano general puede ser determinada diferenciando la ecuación de velocidad $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$ con respecto al tiempo. Esto da

$$\frac{d\mathbf{v}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{v}_{B/A}}{dt}$$

Los términos $d\mathbf{v}_B/dt = \mathbf{a}_B$ y $d\mathbf{v}_A/dt = \mathbf{a}_A$ son medidos desde un conjunto de *ejes fijos x, y*, y representan las *aceleraciones absolutas* de los puntos $B$ y $A$. El último término representa la aceleración de $B$ con respecto a $A$ medida por un observador fijo a los ejes en traslación $x'$, $y'$ que tienen su origen en el punto base $A$. En la sección 16.5 se mostró que a este observador le parece que el punto $B$ se mueve por un *arco circular* que tiene radio de curvatura $r_{B/A}$. En consecuencia, $\mathbf{a}_{B/A}$ puede ser expresada en términos de sus componentes de movimiento tangencial y normal; esto es, $\mathbf{a}_{B/A} = (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n$, donde $(a_{B/A})_t = \alpha r_{B/A}$ y $(a_{B/A})_n = \omega^2 r_{B/A}$. Por consiguiente, la ecuación de la aceleración relativa puede ser escrita en la forma

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n \qquad (16\text{–}17)$$

donde

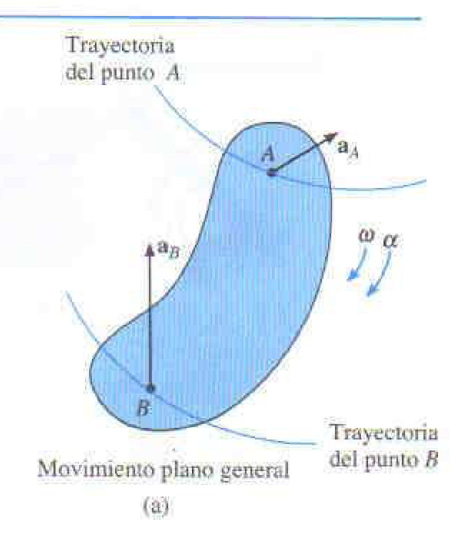
$\mathbf{a}_B$ = aceleración del punto $B$

$\mathbf{a}_A$ = aceleración del punto $A$

$(\mathbf{a}_{B/A})_t$ = componente de aceleración tangencial relativa de "$B$ con respecto a $A$". La *magnitud* es $(a_{B/A})_t = \alpha r_{B/A}$, y la *dirección* es perpendicular a $\mathbf{r}_{B/A}$.

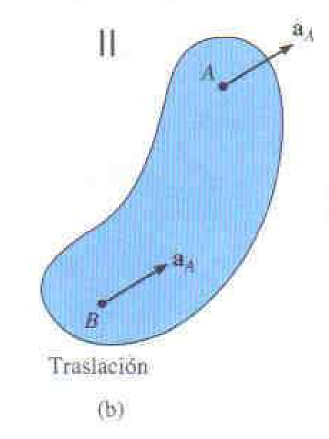
$(\mathbf{a}_{B/A})_n$ = componente de aceleración normal relativa de "$B$ con respecto a $A$". La *magnitud* es $(a_{B/A})_n = \omega^2 r_{B/A}$, y la *dirección* es siempre de $B$ hacia $A$.

Cada uno de los cuatro términos que aparecen en la ecuación 16-17 está representado gráficamente en los *diagramas cinemáticos* mostrados en la figura 16-23. Aquí se ve que en un instante dado la aceleración de $B$, figura 16-23*a*, es determinada considerando que el cuerpo se traslada con aceleración $\mathbf{a}_A$, figura 16-23*b*, y gira simultáneamente con respecto al punto base $A$ a velocidad angular instantánea $\boldsymbol{\omega}$ y aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$, figura 16-23*c*. La adición vectorial de esos dos efectos, aplicados a $B$, resulta en $\mathbf{a}_B$, como se muestra en la figura 16-23*d*. En la figura 16-23*a* debe observarse que, como los puntos $A$ y $B$ se mueven de acuerdo con *trayectorias curvas*, las aceleraciones de esos puntos tendrán *componentes tangencial y normal*. (Recuerde que la aceleración de un punto es *tangente a la trayectoria sólo* cuando la trayectoria es *rectilínea* o cuando se trata de un punto de inflexión sobre una curva.)



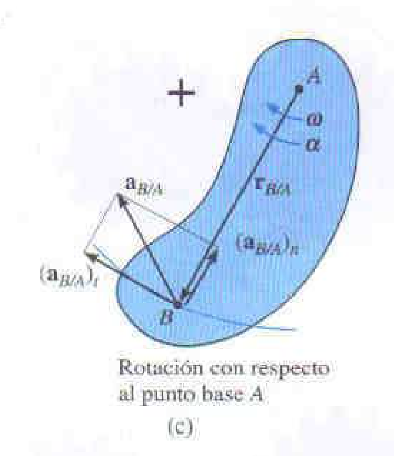

Movimiento plano general

(a)



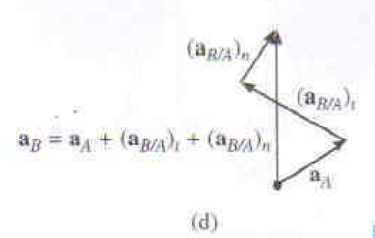

Traslación

(b)




Rotación con respecto al punto base A

(c)




(d)

**Fig. 16–23**

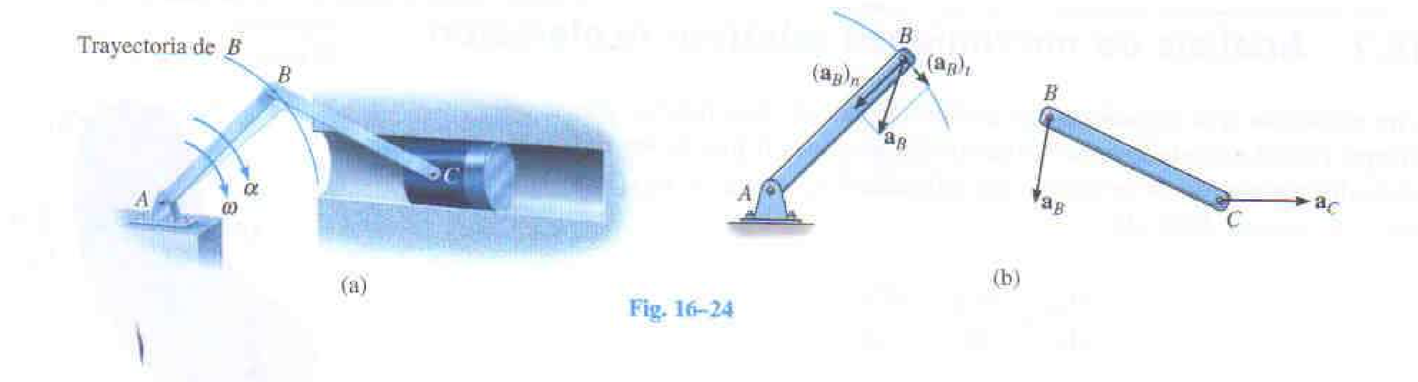



Fig. 16–24

Como las componentes de aceleración relativa representan el efecto de *movimiento circular* observado desde los ejes en traslación con origen en el punto base $A$, estos términos pueden ser expresados como $(\mathbf{a}_{B/A})_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A}$ y $(\mathbf{a}_{B/A})_n = -\omega^2 \mathbf{r}_{B/A}$, ecuación 16-14. Por consiguiente, la ecuación 16-17 toma la forma

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/A} \tag{16–18}$$

donde

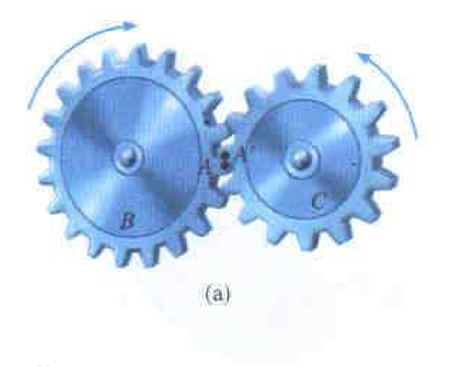
$\mathbf{a}_B$ = aceleración del punto $B$

$\mathbf{a}_A$ = aceleración del punto base $A$

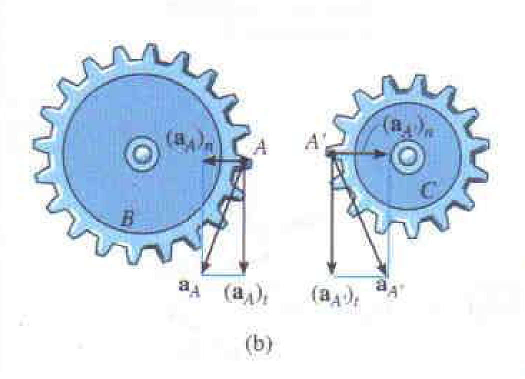
$\boldsymbol{\alpha}$ = aceleración angular del cuerpo

$\boldsymbol{\omega}$ = velocidad angular del cuerpo

$\mathbf{r}_{B/A}$ = vector de posición relativa dibujado de $A$ a $B$




(a)




(b)

Fig. 16–25

Si las ecuaciones 16-17 o 16-18 son aplicadas de manera práctica al estudio del movimiento acelerado de un cuerpo rígido que está conectado mediante un pasador a dos otros cuerpos, debe observarse que los puntos que *coinciden en el pasador* se mueven con la *misma aceleración*, ya que la trayectoria del movimiento sobre la que viajan es la *misma*. Por ejemplo, el punto $B$ sobre la barra $AB$, o $BC$, del mecanismo mostrado en la figura 16-24*a* tiene la misma aceleración, ya que las barras están conectadas mediante un pasador colocado en $B$. Aquí el movimiento de $B$ es conforme a una *trayectoria curva*, por lo que $\mathbf{a}_B$ puede ser expresada en términos de sus componentes tangencial y normal. En el otro extremo de la barra $BC$, el punto $C$ se mueve a lo largo de una *trayectoria de línea recta*, la cual está definida por el pistón. Por consiguiente, $\mathbf{a}_C$ es horizontal, figura 16-24*b*.

Si dos cuerpos están en contacto uno con otro *sin deslizar*, y los *puntos en contacto* se mueven a lo largo de *trayectorias diferentes*, las *componentes* de aceleración *tangencial* de los puntos serán las *mismas*; sin embargo, las *componentes normales no* serán las mismas. Por ejemplo, considere los dos engranes acoplados que muestra la figura 16-25*a*. El punto $A$ está ubicado sobre el engrane $B$ y un punto coincidente $A'$ se localiza sobre el engrane $C$. Debido al movimiento rotatorio, $(\mathbf{a}_A)_t = (\mathbf{a}_{A'})_t$; sin embargo, como ambos puntos siguen trayectorias curvas diferentes, $(\mathbf{a}_A)_n \neq (\mathbf{a}_{A'})_n$, y por tanto $\mathbf{a}_A \neq \mathbf{a}_{A'}$, figura 16-25*b*.

## PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

La ecuación de la aceleración relativa puede ser aplicada entre dos puntos cualesquiera, $A$ y $B$, sobre un cuerpo usando análisis cartesiano vectorial, o escribiendo directamente las ecuaciones de componentes escalares $x$ y $y$.

### *Análisis de velocidad.*

- Determine la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo usando un análisis de velocidad como el presentado en las secciones 16.5 o 16.6. Determine también las velocidades $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{v}_B$ de los puntos $A$ y $B$ *si estos puntos se mueven por trayectorias curvas.*

#### ANÁLISIS VECTORIAL

### *Diagrama cinemático.*

- Establezca las direcciones de las coordenadas fijas $x$, $y$ y dibuje el diagrama cinemático del cuerpo. Indique en éste $\mathbf{a}_A$, $\mathbf{a}_B$, $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\alpha}$, y $\mathbf{r}_{B/A}$.
- Si los puntos $A$ y $B$ se mueven por *trayectorias curvas*, entonces sus aceleraciones deben ser indicadas en términos de sus componentes tangencial y normal, esto es, $\mathbf{a}_A = (\mathbf{a}_A)_t + (\mathbf{a}_A)_n$ y $\mathbf{a}_B = (\mathbf{a}_B)_t + (\mathbf{a}_B)_n$.

### *Ecuación de la aceleración.*

- Para aplicar $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2\mathbf{r}_{B/A}$, exprese los vectores en forma cartesiana y sustitúyalos en la ecuación. Evalúe el producto cruz y luego iguale las respectivas componentes $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ para obtener dos ecuaciones escalares.
- Si la solución proporciona una respuesta *negativa* para una magnitud *desconocida*, ello indica que el sentido de dirección del vector es opuesto al mostrado en el diagrama cinemático.

#### ANÁLISIS ESCALAR

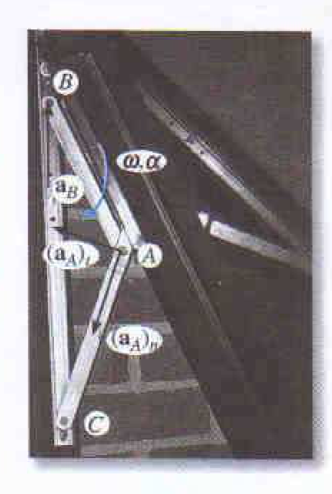
### *Diagrama cinemático.*

- Si la ecuación $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n$ es aplicada, entonces las magnitudes y direcciones de las componentes de aceleración relativa $(\mathbf{a}_{B/A})_t$ y $(\mathbf{a}_{B/A})_n$ deben ser establecidas. Para hacer esto, dibuje un diagrama cinemático como el mostrado en la figura 16-23*c*. Ya que el cuerpo se considera momentáneamente "articulado" en el punto base $A$, las *magnitudes* son $(a_{B/A})_t = \alpha r_{B/A}$ y $(a_{B/A})_n = \omega^2 r_{B/A}$. Su *sentido de dirección* se establece a partir del diagrama de tal manera que $(\mathbf{a}_{B/A})_t$ actúe perpendicularmente a $\mathbf{r}_{B/A}$, de acuerdo con el movimiento rotatorio $\boldsymbol{\alpha}$ del cuerpo, y $(\mathbf{a}_{B/A})_n$ esté dirigido de $B$ hacia $A$.*

### *Ecuación de la aceleración.*

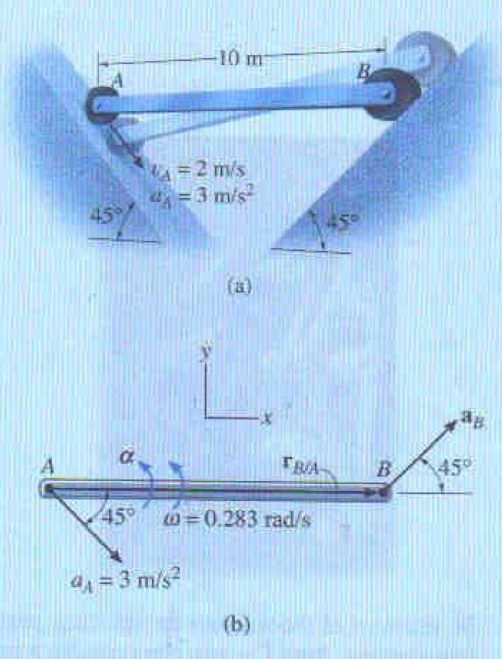
- Represente gráficamente los vectores en $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n$ mostrando sus magnitudes y direcciones debajo de cada término. Las ecuaciones escalares son determinadas a partir de las componentes $x$ y $y$ de estos vectores.

*La notación $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A(\text{pasador})})_t + (\mathbf{a}_{B/A(\text{pasador})})_n$ puede ser útil para recordar que $A$ se supone articulado.




Se muestra el mecanismo de apertura para una ventana. Aquí $CA$ gira con respecto a un eje fijo que pasa por $C$, y $AB$ experimenta un movimiento plano general. Como el punto $A$ se mueve por una trayectoria curva, tiene dos componentes de aceleración, mientras que el punto $B$ se mueve a lo largo de una guía recta y la dirección de su aceleración está especificada.

## EJEMPLO 16.13




La barra $AB$ mostrada en la figura 16-26$a$ está confinada a moverse a lo largo de los planos inclinados en $A$ y $B$. Si el punto $A$ tiene aceleración de 3 m/s$^2$ y velocidad de 2 m/s, ambas dirigidas hacia abajo por el plano en el instante en que la barra está horizontal, determine la aceleración angular de la barra en este instante.

### Solución I (Análisis vectorial)

Aplicaremos la ecuación de la aceleración a los puntos $A$ y $B$ sobre la barra. Para esto, primero es necesario determinar la velocidad angular de la barra. Muestre que es $\omega = 0.283$ rad/s ↷ usando la ecuación de velocidad o el método de los centros instantáneos.

***Diagrama cinemático.*** Como los puntos $A$ y $B$ se mueven ambos a lo largo de trayectorias rectas, *no* tienen componentes de aceleración normal a las trayectorias. Hay dos incógnitas en la figura 16-26$b$, esto es, $a_B$ y $\alpha$.

***Ecuación de la aceleración.*** Aplicando la ecuación 16-18 a los puntos $A$ y $B$ sobre la barra, y expresando cada uno de los vectores en forma cartesiana, tenemos

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/A}$$

$$a_B \cos 45^\circ \mathbf{i} + a_B \operatorname{sen} 45^\circ \mathbf{j} = 3 \cos 45^\circ \mathbf{i} - 3 \operatorname{sen} 45^\circ \mathbf{j} + (\alpha \mathbf{k}) \times (10\mathbf{i}) - (0.283)^2(10\mathbf{i})$$

Efectuando los productos cruz e igualando las componentes **i** y **j** resulta

$$a_B \cos 45^\circ = 3 \cos 45^\circ - (0.283)^2(10) \qquad (1)$$

$$a_B \operatorname{sen} 45^\circ = -3 \operatorname{sen} 45^\circ + \alpha(10) \qquad (2)$$

Resolviendo las ecuaciones obtenemos

$$a_B = 1.87 \text{ m/s}^2 \angle^{45^\circ}$$

$$\alpha = 0.344 \text{ rad/s}^2 ↶ \qquad \textit{Resp.}$$

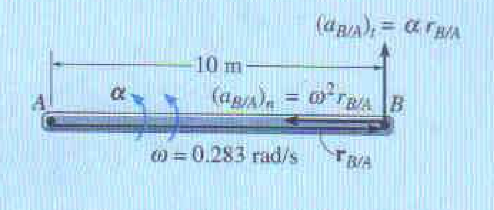



**Fig. 16-26**

### Solución II (Análisis escalar)

Como procedimiento alternativo, las ecuaciones de componentes escalares 1 y 2 se pueden obtener directamente. A partir del diagrama cinemático, que muestra las componentes de aceleración relativa $(\mathbf{a}_{B/A})_t$ y $(\mathbf{a}_{B/A})_n$, figura 16-26$c$, tenemos

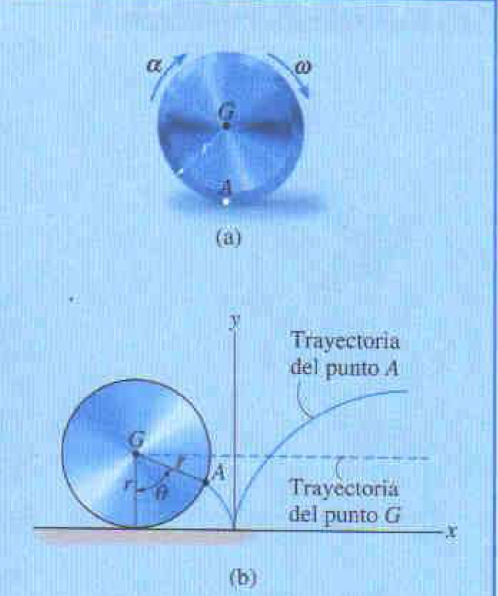
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n$$

$$\begin{bmatrix} a_B \\ \measuredangle^{45^\circ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \text{ m/s}^2 \\ \searrow 45^\circ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha(10 \text{ m}) \\ \uparrow \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (0.283 \text{ rad/s})^2(10 \text{ m}) \\ \leftarrow \end{bmatrix}$$

Igualando las componentes $x$ y $y$ se obtienen las ecuaciones 1 y 2, y la solución procede como antes.

EJEMPLO 16.14

En un instante dado, el cilindro de radio $r$, mostrado en la figura 16-27$a$, tiene velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$. Determine la velocidad y la aceleración de su centro $G$ si rueda sin deslizar.




### Solución (Análisis vectorial)

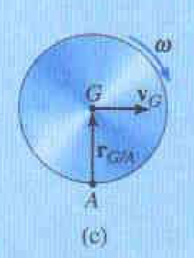
Al rodar el cilindro, el punto $G$ se mueve a lo largo de una línea recta, y el punto $A$, ubicado sobre el borde del cilindro, se mueve por una trayectoria curva llamada *cicloide*, figura 16-27$b$. Aplicaremos las ecuaciones de velocidad y aceleración a esos dos puntos.

***Análisis de velocidad.*** Como no ocurre deslizamiento, en el instante en que $A$ toca el suelo, $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$. Así, a partir del diagrama cinemático mostrado en la figura 16-27$c$, tenemos

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{G/A}$$

$$v_G\mathbf{i} = \mathbf{0} + (-\omega\mathbf{k}) \times (r\mathbf{j})$$

$$v_G = \omega r \qquad (1) \qquad \textit{Resp.}$$




Este mismo resultado también se puede obtener directamente al advertir que el punto $A$ representa el centro instantáneo de velocidad cero.

***Diagrama cinemático.*** La aceleración del punto $G$ es horizontal ya que éste se mueve a lo largo de una *trayectoria de línea recta. Justo antes* que el punto $A$ toque el suelo, su velocidad está dirigida hacia abajo a lo largo del eje $y$, figura 16-27$b$, y justo después del contacto, su velocidad está dirigida *hacia arriba*. Por esta razón, el punto $A$ empieza a acelerar hacia arriba cuando deja el suelo, figura 16-27$d$. Las magnitudes de $\mathbf{a}_A$ y $\mathbf{a}_G$ son desconocidas.

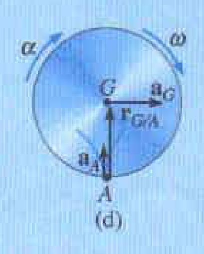



Fig. 16-27

***Ecuación de la aceleración.***

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{G/A} - \omega^2\mathbf{r}_{G/A}$$

$$a_G\mathbf{i} = a_A\mathbf{j} + (-\alpha\mathbf{k}) \times (r\mathbf{j}) - \omega^2(r\mathbf{j})$$

Evaluando el producto cruz e igualando las componentes $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ obtenemos

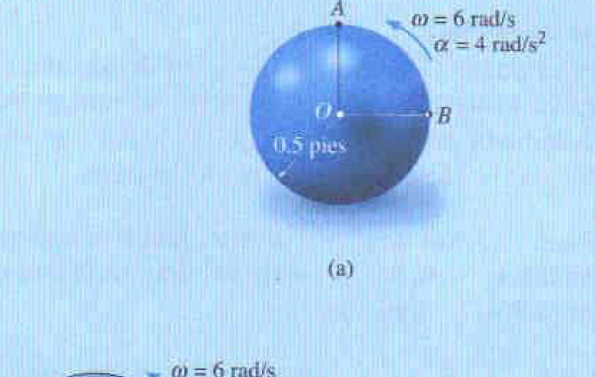
$$a_G = \alpha r \qquad (2) \qquad \textit{Resp.}$$

$$a_A = \omega^2 r \qquad (3)$$

Estos importantes resultados, es decir, $v_G = \omega r$ y $a_G = \alpha r$, también fueron obtenidos en el ejemplo 16.4. Se aplican a cualquier objeto circular, tal como una bola, una polea, un disco, etc., que rueda *sin deslizar*. Además, el hecho de que $a_A = \omega^2 r$, indica que el centro instantáneo de velocidad cero, o punto $A$, *no es* un punto de aceleración cero.

## EJEMPLO 16.15

La bola rueda sin deslizar y tiene el movimiento angular mostrado en la figura 16-28*a*. Determine las aceleraciones de los puntos *B* y *A* en este instante.



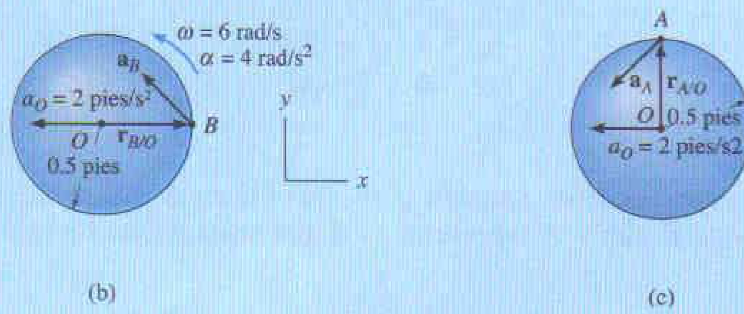




Fig. 16-28

### Solución (Análisis vectorial)

***Diagrama cinemático.*** Usando los resultados del ejemplo previo, el centro de la bola tiene una aceleración de $a_O = \alpha r = (4 \text{ rad/s}^2)(0.5 \text{ pies}) = 2 \text{ pies/s}^2$. Aplicaremos la ecuación de la aceleración a los puntos *O* y *B* y a los puntos *O* y *A*.

***Ecuación de la aceleración.***

Para el punto *B*, figura 16-28*b*,

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/O} - \omega^2 \mathbf{r}_{B/O}$$

$$\mathbf{a}_B = -2\mathbf{i} + (4\mathbf{k}) \times (0.5\mathbf{i}) - (6)^2(0.5\mathbf{i})$$

$$\mathbf{a}_B = \{-20\mathbf{i} + 2\mathbf{j}\} \text{ pies/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Para el punto *A*, figura 16-28*c*,

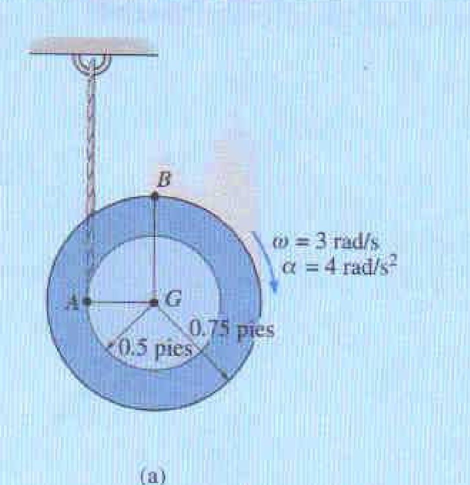
$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{A/O} - \omega^2 \mathbf{r}_{A/O}$$

$$\mathbf{a}_A = -2\mathbf{i} + (4\mathbf{k}) \times (0.5\mathbf{j}) - (6)^2(0.5\mathbf{j})$$

$$\mathbf{a}_A = \{-4\mathbf{i} - 18\mathbf{j}\} \text{ pies/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

## EJEMPLO 16.16

El carrete que aparece en la figura 16-29*a* se desenrolla de la cuerda, de tal modo que en el instante mostrado tiene velocidad angular de 3 rad/s y aceleración angular de 4 rad/s². Determine la aceleración del punto *B*.




(a)

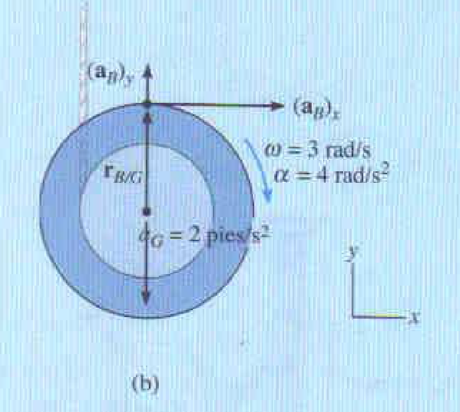
### Solución I (Análisis vectorial)

El carrete "parece" estar rodando hacia abajo sin deslizar en el punto *A*. Por tanto, podemos usar los resultados del ejemplo 16.14 para determinar la aceleración del punto *G*, esto es,

$$a_G = \alpha r = 4\text{ rad/s}^2(0.5\text{ pies}) = 2\text{ pies/s}^2$$

Aplicaremos la ecuación de la aceleración en los puntos *G* y *B*.

***Diagrama cinemático.*** El punto *B* se mueve por una *trayectoria curva* con radio de curvatura *desconocido*.* Su aceleración será representada por sus componentes *x* y *y* desconocidas como se muestra en la figura 16-29*b*.




(b)

***Ecuación de la aceleración.***

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_G + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/G} - \omega^2\mathbf{r}_{B/G}$$

$$(a_B)_x\mathbf{i} + (a_B)_y\mathbf{j} = -2\mathbf{j} + (-4\mathbf{k}) \times (0.75\mathbf{j}) - (3)^2(0.75\mathbf{j})$$

Igualando los términos **i** y **j**, las ecuaciones componentes son

$$(a_B)_x = 4(0.75) = 3\text{ pies/s}^2 \rightarrow \quad (1)$$

$$(a_B)_y = -2 - 6.75 = -8.75\text{ pies/s}^2 = 8.75\text{ pies/s}^2\downarrow \quad (2)$$

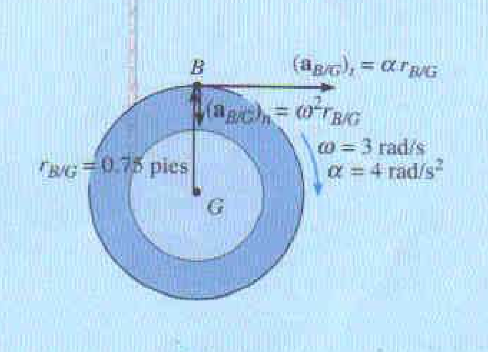
La magnitud y la dirección de $\mathbf{a}_B$ son, por tanto,

$$a_B = \sqrt{(3)^2 + (8.75)^2} = 9.25\text{ pies/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

$$\theta = \tan^{-1}\frac{8.75}{3} = 71.1° \qquad \textit{Resp.}$$

### Solución II (Análisis escalar)

Este problema puede ser resuelto escribiendo las ecuaciones de componentes escalares directamente. El diagrama cinemático de la figura 16-29*c* muestra las componentes de aceleración relativa $(\mathbf{a}_{B/G})_t$ y $(\mathbf{a}_{B/G})_n$. Entonces,




(c)

**Fig. 16-29**

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_G + (\mathbf{a}_{B/G})_t + (\mathbf{a}_{B/G})_n$$

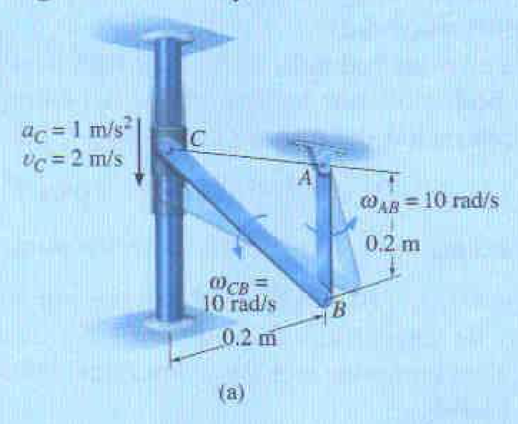
$$\begin{bmatrix}(a_B)_x\\ \rightarrow\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}(a_B)_y\\ \uparrow\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\text{ pies/s}^2\\ \downarrow\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}4\text{ rad/s}^2(0.75\text{ pies})\\ \rightarrow\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}(3\text{ rad/s})^2(0.75\text{ pies})\\ \downarrow\end{bmatrix}$$

Las componentes *x* y *y* dan las ecuaciones 1 y 2 anteriores.

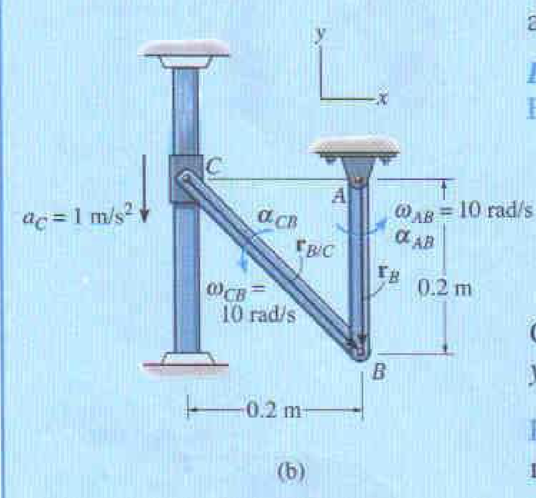
*Observe que el radio de curvatura $\rho$ de la trayectoria *no* es igual al radio del carrete ya que el carrete *no* está girando con respecto al punto *G*. Además, $\rho$ *no* es definido como la distancia desde *A* (*CI*) hasta *B*, ya que la ubicación del *CI* depende sólo de la velocidad de un punto y *no* de la geometría de su trayectoria.

## EJEMPLO 16.17

El collar $C$ que aparece en la figura 16-30$a$ se está moviendo hacia abajo con aceleración de 1 m/s$^2$. En el instante mostrado, tiene una rapidez de 2 m/s que le imprime a los eslabones $CB$ y $AB$ una velocidad angular $\omega_{AB} = \omega_{CB} = 10$ rad/s. (Vea el Ej. 16.8.) Determine las aceleraciones angulares de $CB$ y $AB$ en este instante.




(a)




(b)

Fig. 16-30

### Solución (Análisis vectorial)

***Diagrama cinemático.*** Los diagramas cinemáticos de los eslabones $AB$ y $CB$ se muestran en la figura 16-30$b$. Para encontrar la solución, aplicaremos la ecuación cinemática apropiada a cada eslabón.

***Ecuación de la aceleración.***

Eslabón $AB$ (rotación con respecto a un eje fijo):

$$\mathbf{a}_B = \boldsymbol{\alpha}_{AB} \times \mathbf{r}_B - \omega_{AB}^2 \mathbf{r}_B$$

$$\mathbf{a}_B = (\alpha_{AB}\mathbf{k}) \times (-0.2\mathbf{j}) - (10)^2(-0.2\mathbf{j})$$

$$\mathbf{a}_B = 0.2\alpha_{AB}\mathbf{i} + 20\mathbf{j}$$

Observe que $\mathbf{a}_B$ tiene dos componentes ya que se mueve por una *trayectoria curva*.

Eslabón $BC$ (movimiento plano general): Usando el resultado obtenido para $\mathbf{a}_B$ y aplicando la ecuación 16-18, tenemos

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_C + \boldsymbol{\alpha}_{CB} \times \mathbf{r}_{B/C} - \omega_{CB}^2 \mathbf{r}_{B/C}$$

$$0.2\alpha_{AB}\mathbf{i} + 20\mathbf{j} = -1\mathbf{j} + (\alpha_{CB}\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{i} - 0.2\mathbf{j}) - (10)^2(0.2\mathbf{i} - 0.2\mathbf{j})$$

$$0.2\alpha_{AB}\mathbf{i} + 20\mathbf{j} = -1\mathbf{j} + 0.2\alpha_{CB}\mathbf{j} + 0.2\alpha_{CB}\mathbf{i} - 20\mathbf{i} + 20\mathbf{j}$$

Así,

$$0.2\alpha_{AB} = 0.2\alpha_{CB} - 20$$

$$20 = -1 + 0.2\alpha_{CB} + 20$$

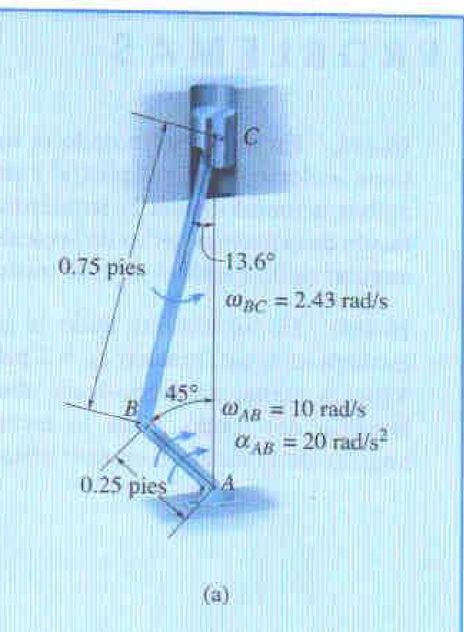
Despejando los valores,

$$\alpha_{CB} = 5 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft \qquad \textit{Resp.}$$

$$\alpha_{AB} = -95 \text{ rad/s}^2 = 95 \text{ rad/s}^2 \circlearrowright \qquad \textit{Resp.}$$

## EJEMPLO 16.18

El cigüeñal $AB$ de un motor gira con aceleración angular constante de 20 rad/s², en el sentido de las manecillas del reloj, figura 16-31*a*. Determine la aceleración del pistón en el instante en que $AB$ está en la posición mostrada. En este instante, $\omega_{AB} = 10$ rad/s y $\omega_{BC} = 2.43$ rad/s.




(a)

### Solución (Análisis vectorial)

***Diagrama cinemático.*** Los diagramas cinemáticos para $AB$ y $BC$ se muestran en la figura 16-31*b*. Aquí $\mathbf{a}_C$ es vertical ya que $C$ se mueve a lo largo de una trayectoria en línea recta.

***Ecuación de la aceleración.*** Expresando cada uno de los vectores de posición en forma vectorial cartesiana,

$$\mathbf{r}_B = \{-0.25 \text{ sen } 45°\mathbf{i} + 0.25 \cos 45°\mathbf{j}\} \text{ pies} = \{-0.177\mathbf{i} + 0.177\mathbf{j}\} \text{ pies}$$

$$\mathbf{r}_{C/B} = \{0.75 \text{ sen } 13.6°\mathbf{i} + 0.75 \cos 13.6°\mathbf{j}\} \text{ pies} = \{0.176\mathbf{i} + 0.729\mathbf{j}\} \text{ pies}$$

Cigüeñal $AB$ (rotación con respecto a un eje fijo):

$$\mathbf{a}_B = \boldsymbol{\alpha}_{AB} \times \mathbf{r}_B - \omega_{AB}^2 \mathbf{r}_B$$

$$= (-20\mathbf{k}) \times (-0.177\mathbf{i} + 0.177\mathbf{j}) - (10)^2(-0.177\mathbf{i} + 0.177\mathbf{j})$$

$$= \{21.21\mathbf{i} - 14.14\mathbf{j}\} \text{ pies/s}^2$$

Biela $BC$ (movimiento plano general): Usando el resultado para $\mathbf{a}_B$ y observando que $\mathbf{a}_C$ tiene dirección vertical, tenemos

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\alpha}_{BC} \times \mathbf{r}_{C/B} - \omega_{BC}^2 \mathbf{r}_{C/B}$$

$$a_C\mathbf{j} = 21.21\mathbf{i} - 14.14\mathbf{j} + (\alpha_{BC}\mathbf{k}) \times (0.176\mathbf{i} + 0.729\mathbf{j}) - (2.43)^2(0.176\mathbf{i} + 0.729\mathbf{j})$$

$$a_C\mathbf{j} = 21.21\mathbf{i} - 14.14\mathbf{j} + 0.176\alpha_{BC}\mathbf{j} - 0.729\alpha_{BC}\mathbf{i} - 1.04\mathbf{i} - 4.30\mathbf{j}$$

$$0 = 20.17 - 0.729\alpha_{BC}$$

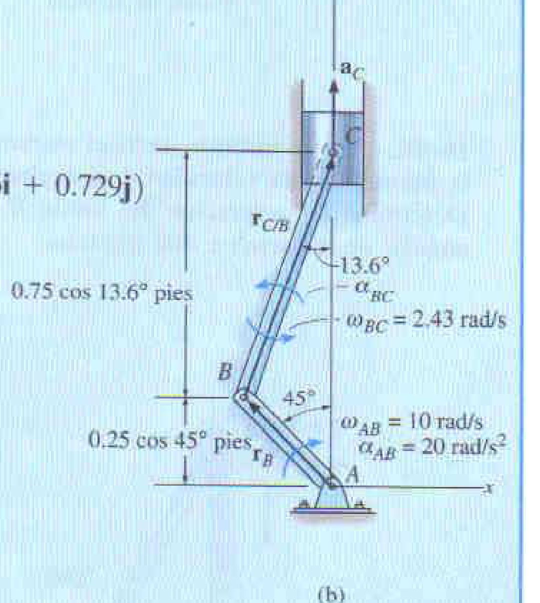
$$a_C = 0.176\alpha_{BC} - 18.45$$

Resolviendo obtenemos

$$\alpha_{BC} = 27.7 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft$$

$$a_C = -13.6 \text{ pies/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Como el pistón se está moviendo hacia arriba, el signo negativo para $a_C$ indica que se encuentra desacelerando, es decir, $\mathbf{a}_C = \{-13.6\mathbf{j}\}$ pies/s². Esto causa que la rapidez del pistón disminuya hasta que $AB$ resulte vertical, en donde el pistón está momentáneamente en reposo.



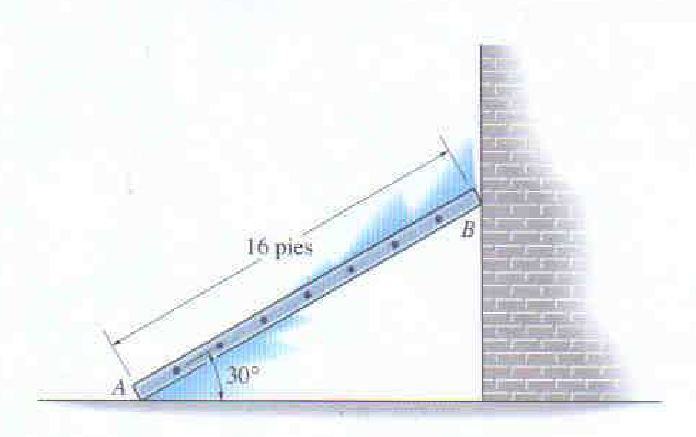

(b)

**Fig. 16-31**

# PROBLEMAS

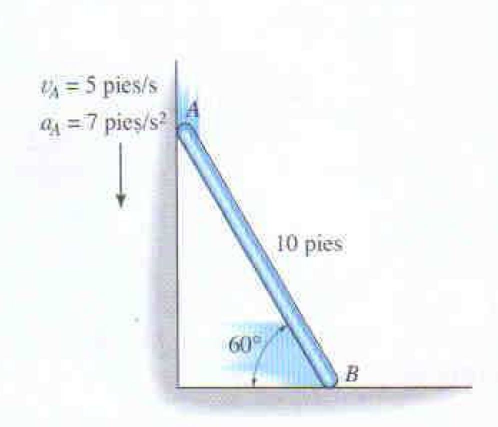
**16-105.** En un instante dado el fondo $A$ de la escalera tiene aceleración $a_A = 4$ pies/s$^2$ y velocidad $v_A = 6$ pies/s, ambas actuando hacia la izquierda. Determine la aceleración de la parte superior de la escalera, $B$, y la aceleración angular de la escalera en este mismo instante.

**16-106.** En un instante dado, la parte superior $B$ de la escalera tiene aceleración $a_B = 2$ pies/s$^2$ y velocidad $v_B = 4$ pies/s, ambas actuando hacia abajo. Determine la aceleración del fondo $A$ de la escalera y la aceleración angular de la escalera en este instante.



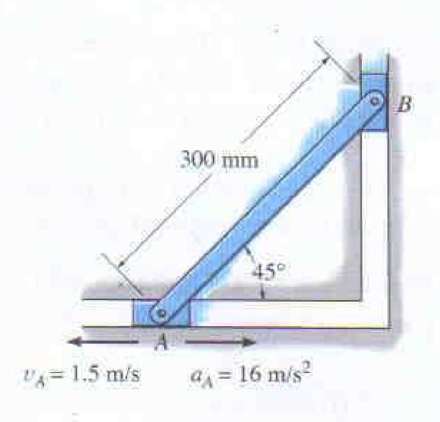

**Probs. 16–105/106**

**16-107.** En un instante dado, el extremo superior $A$ de la barra tiene la velocidad y la aceleración mostradas. Determine la aceleración del fondo $B$ y la aceleración angular de la barra en este instante.



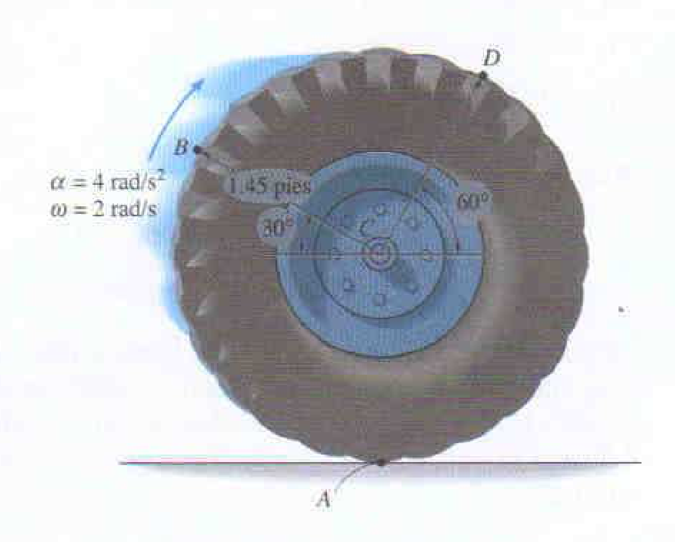

**Prob. 16–107**

***16-108.** En un instante dado, el bloque deslizable $A$ tiene la velocidad y la aceleración mostradas. Determine la aceleración del bloque $B$ y la aceleración angular del eslabón en este instante.



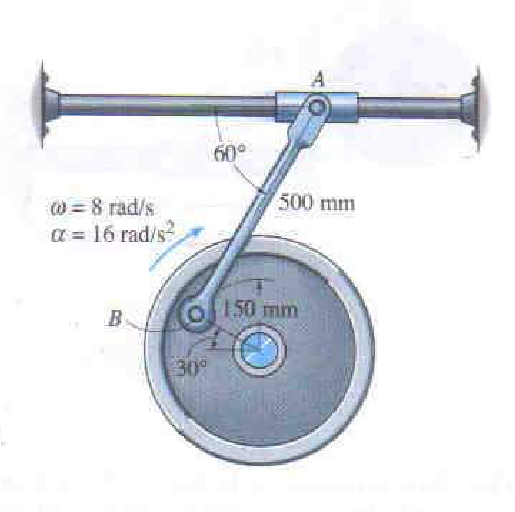

**Prob. 16–108**

**16-109.** La rueda se está moviendo hacia la derecha en tal forma que tiene velocidad angular $\omega = 2$ rad/s y aceleración angular $\alpha = 4$ rad/s$^2$ en el instante mostrado. Si no hay deslizamiento en $A$, determine la aceleración del punto $B$.



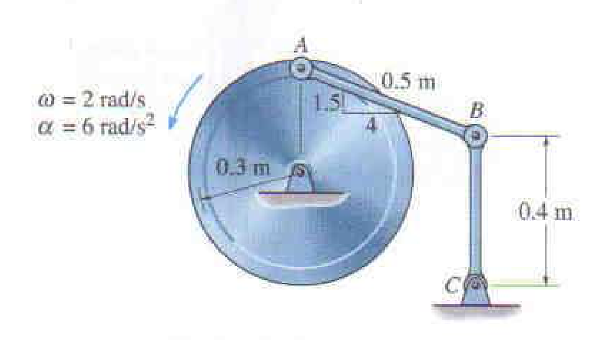

**Prob. 16–109**

**16-110.** En un instante dado la rueda está girando con los movimientos angulares mostrados. Determine la aceleración del collar en $A$ en este instante.



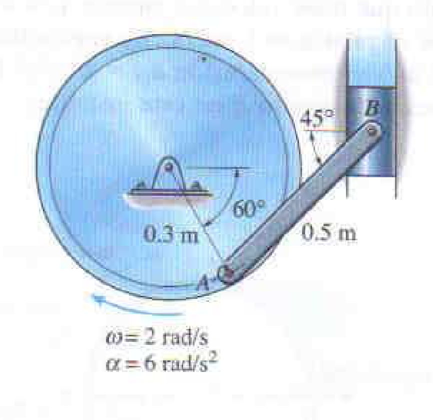

Prob. 16–110

**16-111.** El volante gira con velocidad angular $\omega = 2$ rad/s y aceleración angular $\alpha = 6$ rad/s$^2$. Determine la aceleración angular de los eslabones $AB$ y $BC$ en este instante. La pendiente de la línea desde $A$ hasta $B$ es de $-3/4$.




Prob. 16–111

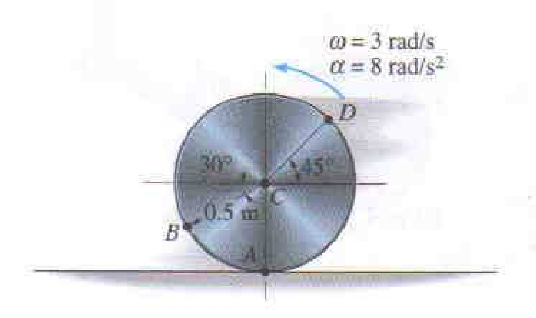
***16-112.** En un instante dado la rueda está girando con la velocidad angular y la aceleración angular mostradas. Determine la aceleración del bloque $B$ en este instante.




Prob. 16–112

**16-113.** El disco se está moviendo hacia la izquierda en tal forma que tiene aceleración angular $\alpha = 8$ rad/s$^2$ y velocidad angular $\omega = 3$ rad/s en el instante mostrado. Si el disco no resbala en $A$, determine la aceleración del punto $B$.

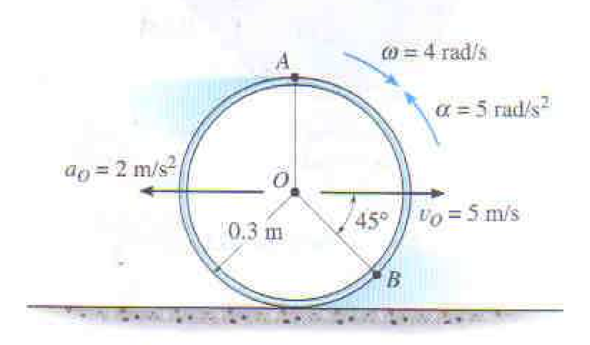
**16-114.** El disco se está moviendo hacia la izquierda en tal forma que tiene aceleración angular $\alpha = 8$ rad/s$^2$ y velocidad angular $\omega = 3$ rad/s en el instante mostrado. Si el disco no resbala en $A$, determine la aceleración del punto $D$.




Probs. 16–113/114

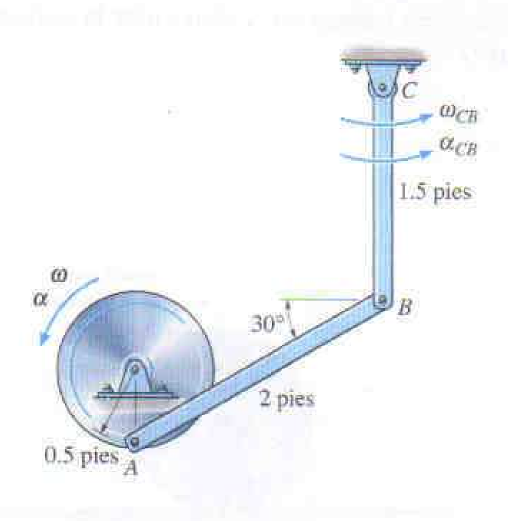
**16-115.** El aro es lanzado sobre la superficie rugosa de tal modo que su velocidad angular es $\omega = 4$ rad/s y su aceleración angular es $\alpha = 5$ rad/s$^2$. Su centro tiene velocidad $v_O = 5$ m/s y desaceleración $a_O = 2$ m/s$^2$. Determine la aceleración del punto $A$ en este instante.

***16-116.** El aro es lanzado sobre la superficie rugosa de tal modo que tiene velocidad angular $\omega = 4$ rad/s y aceleración angular $\alpha = 5$ rad/s$^2$. Su centro tiene velocidad $v_O = 5$ m/s y desaceleración $a_O = 2$ m/s$^2$. Determine la aceleración del punto $B$ en este instante.



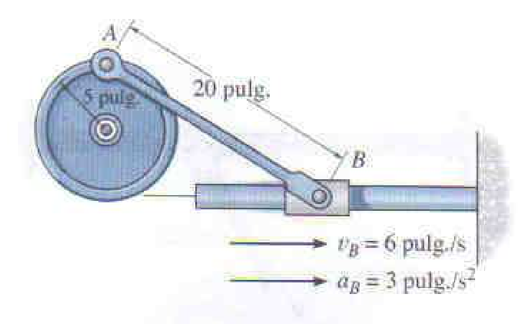

Probs. 16–115/116

**16-117.** El disco gira con velocidad angular $\omega = 5$ rad/s y aceleración angular $\alpha = 6$ rad/s$^2$. Determine la aceleración angular del eslabón $CB$ en este instante.



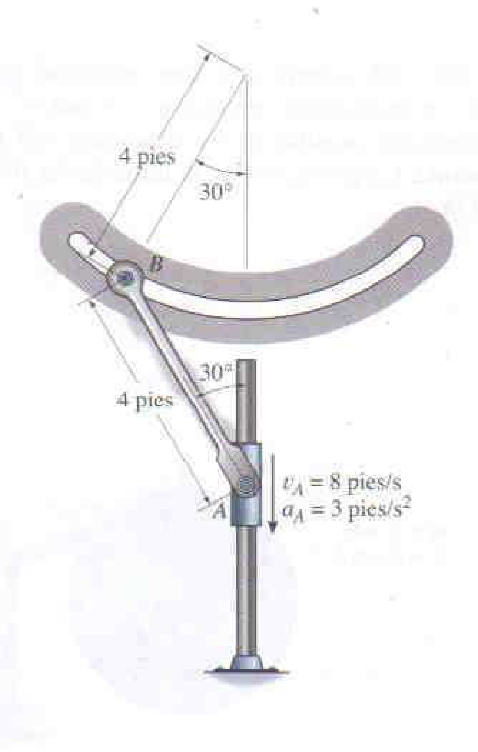

Prob. 16–117

**16-118.** En un instante dado, el bloque deslizable $B$ está viajando hacia la derecha con la velocidad y la aceleración mostradas. Determine la aceleración angular de la rueda en este instante.



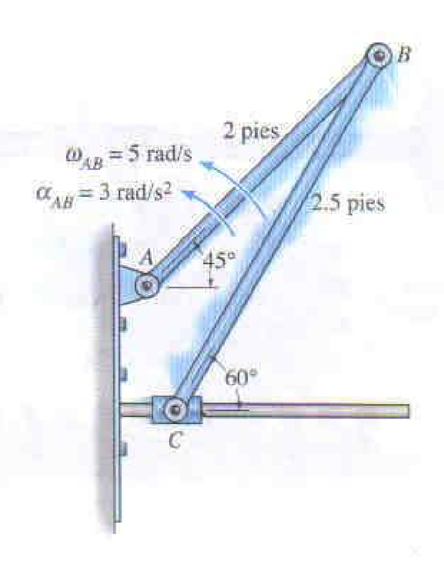

Prob. 16–118

**16-119.** Los extremos de la barra $AB$ están confinados a moverse a lo largo de las trayectorias mostradas. En un instante dado, $A$ tiene velocidad de 8 pies/s y aceleración de 3 pies/s$^2$. Determine la velocidad angular y la aceleración angular de $AB$ en este instante.



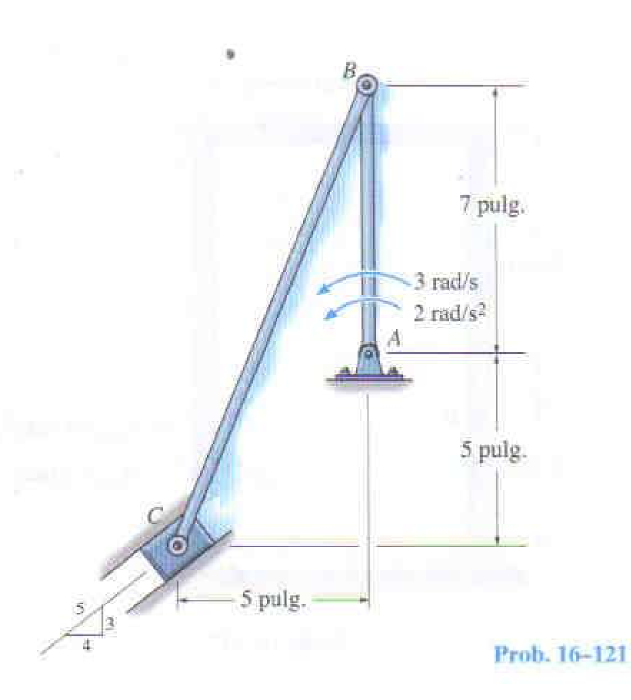

Prob. 16–119

*16-120. La barra $AB$ tiene el movimiento angular mostrado. Determine la aceleración del collar $C$ en este instante.



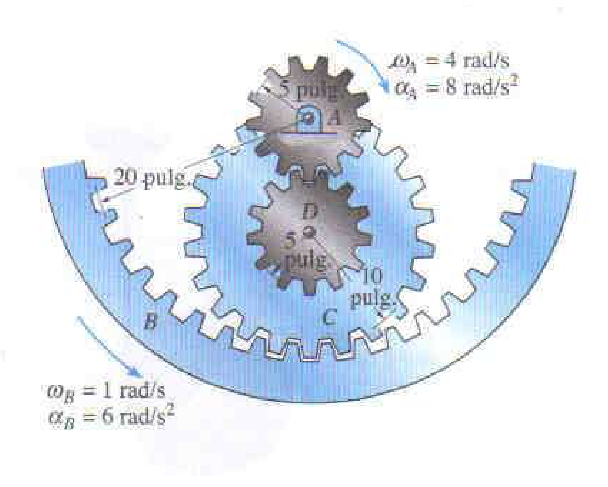

Prob. 16–120

16-121. En el instante dado el miembro $AB$ tiene los movimientos angulares mostrados. Determine la velocidad y la aceleración del bloque deslizable $C$ en este instante.



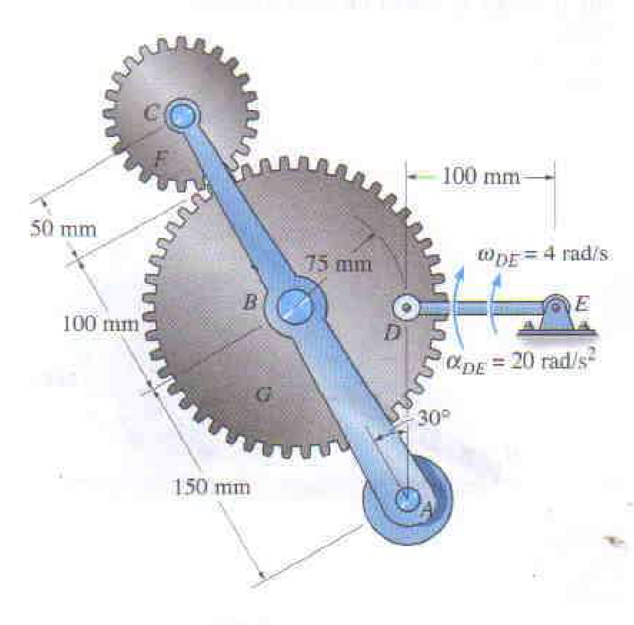

Prob. 16–121

16-122. En un instante dado, los engranes $A$ y $B$ tienen los movimientos angulares mostrados. Determine la aceleración angular del engrane $C$ y la aceleración de su punto central $D$ en este instante. Observe que el cubo interior del engrane $C$ está acoplado con el engrane $A$, y su borde exterior está acoplado con el engrane $B$.



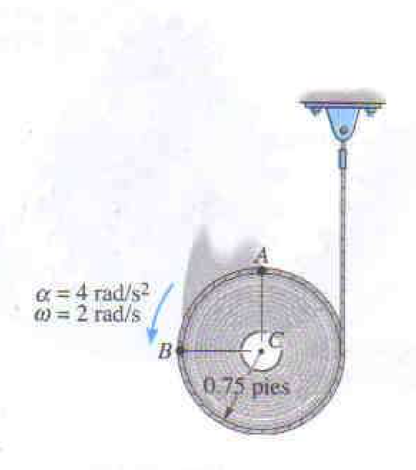

Prob. 16–122

16-123. El mecanismo de engranes y manivela unidos imprime un movimiento de mecedora a la manivela $AC$ que es necesario para operar una prensa impresora. Si el eslabón $DE$ tiene el movimiento angular mostrado, determine las velocidades angulares respectivas del engrane $F$ y la manivela $AC$ en este instante, y la aceleración angular de la manivela $AC$.



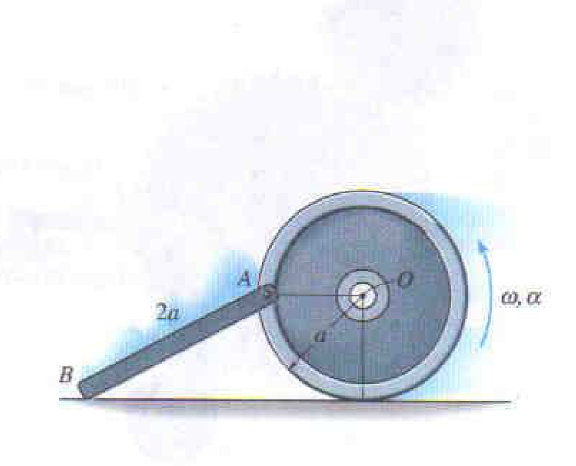

Prob. 16–123

*16-124. Al desenrollarse la cuerda del cilindro, éste tiene una aceleración angular de $\alpha = 4 \text{ rad/s}^2$ y velocidad angular de $\omega = 2$ rad/s en el instante mostrado. Determine las aceleraciones de los puntos $A$ y $B$ en este instante.



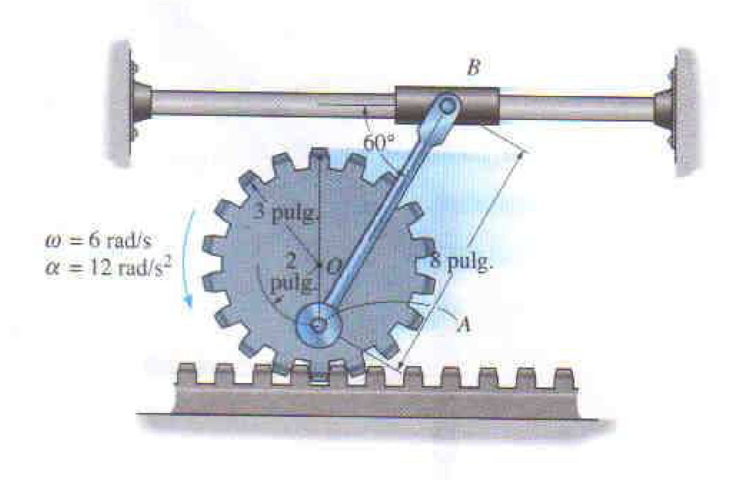

Prob. 16–124

16-125. La rueda gira sin deslizar de manera que en el instante mostrado tiene velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$. Determine la velocidad y la aceleración del punto $B$ sobre la barra en este instante.



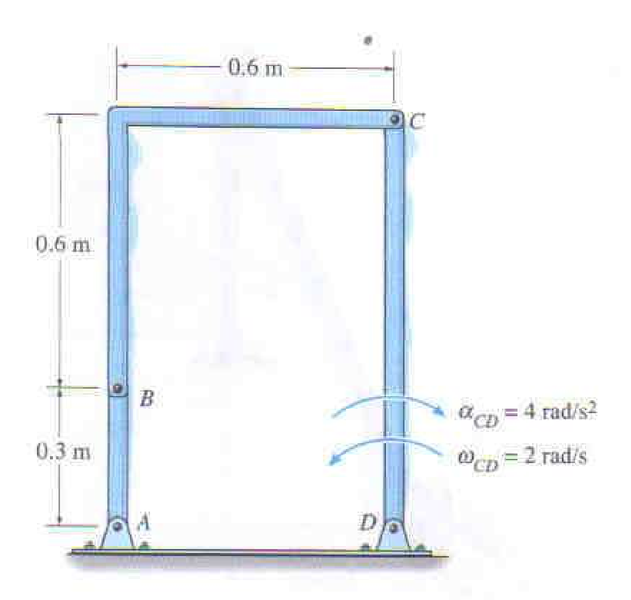

Prob. 16–125

16-126. En un instante dado, el engrane tiene el movimiento angular que se muestra. Determine las aceleraciones de los puntos $A$ y $B$ sobre el eslabón y la aceleración angular del eslabón en este instante.



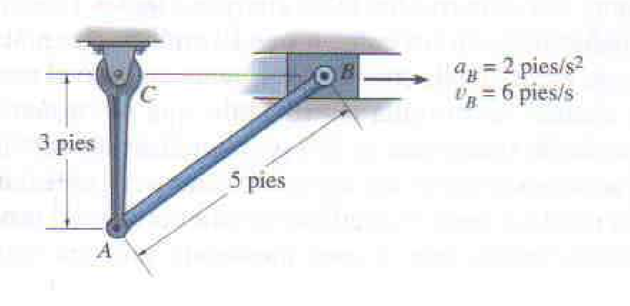

Prob. 16–126

16-127. Determine la aceleración angular del eslabón $AB$ si el eslabón $CD$ tiene la velocidad angular y la desaceleración angular mostradas.



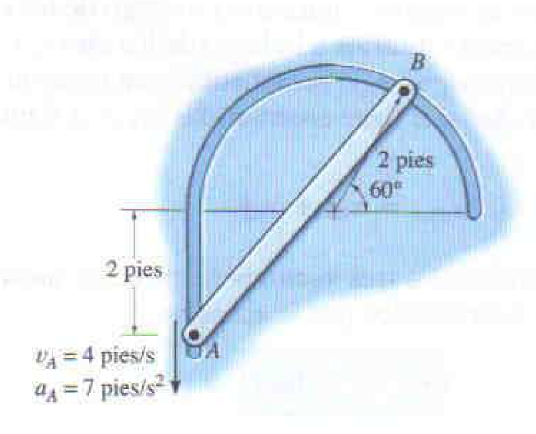

Prob. 16–127

*16-128. El bloque deslizable $B$ se está moviendo hacia la derecha con aceleración de 2 pies/s$^2$. En el instante mostrado, su velocidad es de 6 pies/s. Determine la aceleración angular del eslabón $AB$ y la aceleración del punto $A$ en este instante.



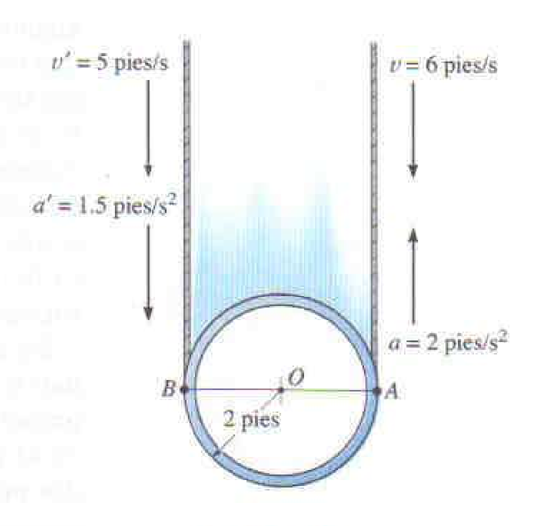

Prob. 16–128

16-129. Los extremos de la barra $AB$ están confinados a moverse a lo largo de las trayectorias mostradas. En un instante dado, $A$ tiene velocidad $v_A = 4$ pies/s y aceleración $a_A = 7$ pies/s$^2$. Determine la velocidad angular y la aceleración angular de $AB$ en este instante.




Prob. 16–129

16-130. En un instante dado, los cables que soportan el tubo tienen los movimientos mostrados. Determine la velocidad angular y la aceleración angular del tubo, y la velocidad y la aceleración del punto $B$ ubicado sobre el tubo.

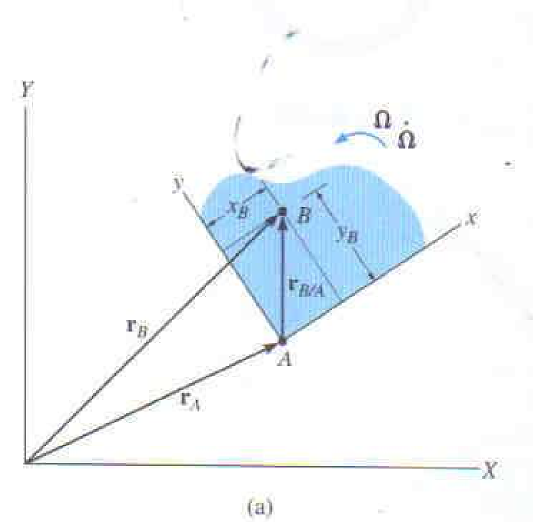



Prob. 16–130

## 16.8 Análisis de movimiento relativo usando ejes en rotación

En la sección previa, el análisis del movimiento relativo para velocidad y aceleración fue descrito usando un sistema coordenado en traslación. Este tipo de análisis es útil para determinar el movimiento de puntos sobre el *mismo* cuerpo rígido, o el movimiento de puntos ubicados sobre varios cuerpos rígidos conectados mediante pasadores. Sin embargo, en algunos problemas son construidos tales cuerpos rígidos (mecanismos) que ocurrirá *deslizamiento* en sus conexiones. El análisis cinemático para ese tipo de casos se efectúa más convenientemente cuando el movimiento es estudiado usando un sistema coordenado que se *traslada* y *gira*. Además, este marco de referencia es útil para analizar los movimientos de dos puntos que se encuentran en un mecanismo pero *no* están sobre el *mismo* cuerpo rígido, y para especificar la cinemática del movimiento de una partícula cuando ésta se está moviendo por una trayectoria rotatoria.

En el siguiente análisis son desarrolladas dos ecuaciones que relacionan la velocidad y la aceleración de dos puntos, uno de los cuales es el origen de un marco de referencia móvil sometido a traslación y a rotación en el plano.* Debido a la generalidad en la derivación que sigue, esos dos puntos pueden representar dos partículas cualesquiera moviéndose independientemente una de otra o dos puntos ubicados sobre el mismo (o diferente) cuerpo rígido.



(a)

Fig. 16–32

**Posición.** Considere los dos puntos $A$ y $B$ mostrados en la figura 16-32*a*. Su ubicación es especificada por los vectores de posición $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$, los cuales se miden desde el sistema coordenado fijo $X$, $Y$, $Z$. Como se muestra en la figura, el "punto base" $A$ representa el origen del sistema coordenado $x$, $y$, $z$, que se supone en traslación y rotación con respecto al sistema $X$, $Y$, $Z$. La posición de $B$ con respecto a $A$ se especifica mediante el vector de posición relativa $\mathbf{r}_{B/A}$. Las componentes de este vector pueden ser expresadas en términos de vectores unitarios a lo largo de los ejes $X$, $Y$, esto es, $\mathbf{I}$ y $\mathbf{J}$, o por vectores unitarios a lo largo de los ejes $x$, $y$, es decir, $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$. Para el desarrollo que sigue, $\mathbf{r}_{B/A}$ será medido con relación al marco móvil de referencia $x$, $y$. Así, si $B$ tiene coordenadas $(x_B, y_B)$, figura 16-32*a*, entonces

$$\mathbf{r}_{B/A} = x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j}$$

Usando la suma vectorial, los tres vectores de posición mostrados en la figura 16-32*a* están relacionados por la ecuación

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A} \qquad (16\text{–}19)$$

En el instante considerado, el punto $A$ tiene velocidad $\mathbf{v}_A$ y aceleración $\mathbf{a}_A$, mientras que la velocidad angular y la aceleración angular de los ejes $x$, $y$ son $\boldsymbol{\Omega}$ y $\dot{\boldsymbol{\Omega}} = d\boldsymbol{\Omega}/dt$, respectivamente. Todos esos vectores son

*El movimiento tridimensional más general de los puntos es desarrollado en la sección 20.4.

medidos desde el marco de referencia $X$, $Y$, $Z$, aunque pueden ser expresados en términos de componentes $\mathbf{I}$, $\mathbf{J}$, $\mathbf{K}$, o $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$. Como se especifica un movimiento plano, por la regla de la mano derecha, $\mathbf{\Omega}$ y $\dot{\mathbf{\Omega}}$ están dirigidos siempre *perpendicularmente* al plano de movimiento de referencia, mientras que $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{a}_A$ se encuentran en este plano.

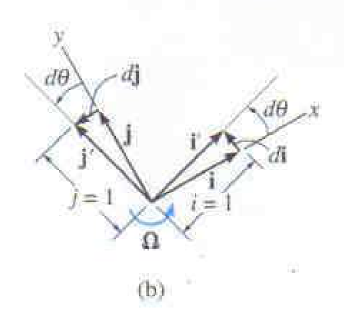
**Velocidad.** La velocidad del punto $B$ es determinada tomando la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 16-19, lo que da

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} \qquad (16\text{–}20)$$

El último término en esta ecuación es evaluado como sigue:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} &= \frac{d}{dt}(x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j})\\ &= \frac{dx_B}{dt}\mathbf{i} + x_B\frac{d\mathbf{i}}{dt} + \frac{dy_B}{dt}\mathbf{j} + y_B\frac{d\mathbf{j}}{dt}\\ &= \left(\frac{dx_B}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy_B}{dt}\mathbf{j}\right) + \left(x_B\frac{d\mathbf{i}}{dt} + y_B\frac{d\mathbf{j}}{dt}\right) \qquad (16\text{–}21)\end{aligned}$$

Los dos términos en el primer conjunto de paréntesis representan las componentes de la velocidad del punto $B$ medida por un observador unido al sistema de coordenadas móviles $x$, $y$, $z$. Estos términos serán denotados mediante el vector $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$. En el segundo conjunto de paréntesis la razón instantánea de cambio con respecto al tiempo de los vectores unitarios $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ es medida por un observador ubicado en el sistema coordenado $X$, $Y$, $Z$ fijo. Estos cambios, $d\mathbf{i}$ y $d\mathbf{j}$, son debidos *sólo* a la *rotación* instantánea $d\theta$ de los ejes $x$, $y$, $z$, causando que $\mathbf{i}$ se convierta en $\mathbf{i}' = \mathbf{i} + d\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ se convierta en $\mathbf{j}' = \mathbf{j} + d\mathbf{j}$, figura 16-32*b*. Como se muestra, las *magnitudes* de $d\mathbf{i}$ y $d\mathbf{j}$ son iguales a 1 ($d\theta$), ya que $i = i' = j = j' = 1$. La *dirección* de $d\mathbf{i}$ es definida mediante $+\mathbf{j}$, ya que $d\mathbf{i}$ es tangente a la trayectoria descrita por la cabeza de flecha de $\mathbf{i}$ en el límite cuando $\Delta t \to dt$. De la misma manera, $d\mathbf{j}$ actúa en la dirección $-\mathbf{i}$, figura 16-32*b*. Por consiguiente,

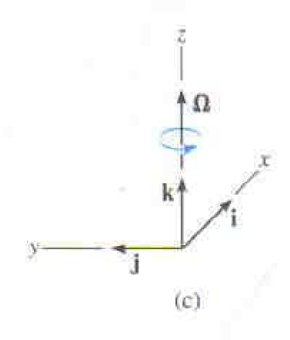


(b)

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}(\mathbf{j}) = \Omega\mathbf{j} \qquad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \frac{d\theta}{dt}(-\mathbf{i}) = -\Omega\mathbf{i}$$

Viendo los ejes en tres dimensiones, figura 16-32*c*, y observando que $\mathbf{\Omega} = \Omega\mathbf{k}$, podemos expresar las derivadas anteriores en términos del producto cruz como

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{i} \qquad \frac{d\mathbf{j}}{dt} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{j} \qquad (16\text{–}22)$$



(c)

Fig. 16–32

Sustituyendo estos resultados en la ecuación 16-21 y usando la propiedad distributiva del producto cruz, obtenemos

$$\frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times (x_B\mathbf{i} + y_B\mathbf{j}) = (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \quad (16\text{–}23)$$

Por consiguiente, la ecuación 16-20 toma la forma

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} \tag{16–24}$$

donde

$\mathbf{v}_B$ = velocidad de $B$, medida desde la referencia $X, Y, Z$

$\mathbf{v}_A$ = velocidad del origen $A$ de la referencia $x, y, z$, medida desde la referencia $X, Y, Z$

$(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ = velocidad relativa de "$B$ con respecto a $A$", medida por un observador unido a la referencia *giratoria* $x, y, z$

$\boldsymbol{\Omega}$ = velocidad angular de la referencia $x, y, z$, medida desde la referencia $X, Y, Z$

$\mathbf{r}_{B/A}$ = posición relativa de "$B$ con respecto a $A$"

Comparando la ecuación 16-24 con la 16-16, $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$, que es válida para un marco de referencia en traslación, se puede ver que la única diferencia entre las ecuaciones está representada por el término $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$.

Al aplicar la ecuación 16-24, a menudo es útil entender qué representa cada uno de los términos. En orden de aparición, son como sigue:

$\mathbf{v}_B$ {velocidad absoluta de $B$} {movimiento de $B$ observado desde el marco $X, Y, Z$}

(es igual a)

$\mathbf{v}_A$ {velocidad absoluta del origen del marco $x, y, z$}

(más)

$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$ {efecto de velocidad angular causado por la rotación del marco $x, y, z$}

{movimiento del marco $x, y, z$ observado desde el marco $X, Y, Z$}

(más)

$(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ {velocidad relativa de $B$ con respecto a $A$} {movimiento de $B$ observado desde el marco $x, y, z$}

**Aceleración.** La aceleración de $B$, observada desde el sistema coordenado $X, Y, Z$, puede ser expresada en términos de su movimiento medido con respecto al sistema de coordenadas en rotación o móvil tomando la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 16-24, esto es,

$$\frac{d\mathbf{v}_B}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_A}{dt} + \frac{d\mathbf{\Omega}}{dt} \times \mathbf{r}_{B/A} + \mathbf{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} + \frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \mathbf{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} + \frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} \qquad (16\text{–}25)$$

Aquí $\dot{\mathbf{\Omega}} = d\mathbf{\Omega}/dt$ es la aceleración angular del sistema coordenado $x, y, z$. Para movimiento plano, $\mathbf{\Omega}$ es siempre perpendicular al plano del movimiento, y por tanto $\dot{\mathbf{\Omega}}$ mide *sólo el cambio en magnitud* de $\mathbf{\Omega}$. La derivada $d\mathbf{r}_{B/A}/dt$ en la ecuación 16-25 es definida mediante la ecuación 16-23, por lo que

$$\mathbf{\Omega} \times \frac{d\mathbf{r}_{B/A}}{dt} = \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) \qquad (16\text{–}26)$$

Encontramos la derivada con respecto al tiempo de $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} = (v_{B/A})_x\mathbf{i} + (v_{B/A})_y\mathbf{j}$,

$$\frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} = \left[\frac{d(v_{B/A})_x}{dt}\mathbf{i} + \frac{d(v_{B/A})_y}{dt}\mathbf{j}\right] + \left[(v_{B/A})_x\frac{d\mathbf{i}}{dt} + (v_{B/A})_y\frac{d\mathbf{j}}{dt}\right]$$

Los dos términos en el primer conjunto de corchetes representan las componentes de la aceleración del punto $B$ medidas por un observador unido al sistema coordenado móvil. Estos términos serán denotados por $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$. Los términos en el segundo conjunto de corchetes pueden ser simplificados usando las ecuaciones 16-22.

$$\frac{d(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}}{dt} = (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

Sustituyendo esto y la ecuación 16-26 en la ecuación 16-25, y reordenando términos,

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz} \qquad (16\text{–}27)$$

donde

$\mathbf{a}_B$ = aceleración de $B$, medida desde la referencia $X, Y, Z$

$\mathbf{a}_A$ = aceleración del origen $A$ de la referencia $x, y, z$, medida desde la referencia $X, Y, Z$

$(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}, (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ = aceleración relativa y velocidad relativa de "$B$ con respecto a $A$", medidas por un observador unido a la referencia $x, y, z$ en *rotación*

$\dot{\mathbf{\Omega}}, \mathbf{\Omega}$ = aceleración angular y velocidad angular de la referencia $x, y, z$, medidas desde la referencia $X, Y, Z$

$\mathbf{r}_{B/A}$ = posición relativa de "$B$ con respecto a $A$"

Si la ecuación 16-27 es comparada con la 16-18, escrita en la forma $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$, la cual es válida para un marco de referencia en traslación, puede verse que la diferencia entre las ecuaciones está representada por los términos $2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ y $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$. En particular, $2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ es llamada *aceleración de Coriolis*, en honor del ingeniero francés G. C. Coriolis, quien fue el primero en determinarla. Este término representa la diferencia en la aceleración de $B$ medida desde ejes $x$, $y$, $z$ no giratorios y giratorios. Como está indicado por el producto vectorial cruz, la aceleración de Coriolis *siempre* será perpendicular a $\mathbf{\Omega}$ y a $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$. Esta aceleración es una componente importante que debe ser considerada siempre que se usen marcos de referencia giratorios. Por ejemplo, esto ocurre a menudo al estudiar las aceleraciones y fuerzas que actúan sobre cohetes, proyectiles de largo alcance, y otros cuerpos que tengan movimientos cuyas mediciones son afectadas considerablemente por la rotación de la Tierra.

La siguiente interpretación de los términos que aparecen en la ecuación 16-27 puede ser útil al aplicar esta ecuación a la solución de problemas.

| | | |
|---|---|---|
| $\mathbf{a}_B$ | aceleración absoluta de $B$ | movimiento de $B$ observado desde el marco $X, Y, Z$ |
| | (es igual a) | |
| $\mathbf{a}_A$ | aceleración absoluta del origen del marco $x, y, z$ | movimiento del marco $x, y, z$ observado desde el marco $X, Y, Z$ |
| | (más) | |
| $\dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A}$ | efecto de aceleración angular causado por la rotación del marco $x, y, z$ | |
| | (plus) | |
| $\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$ | efecto de velocidad angular causado por la rotación del marco $x, y, z$ | |
| | (más) | |
| $2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ | efecto combinado de $B$ moviéndose con respecto a coordenadas $x, y, z$ y rotación del marco $x, y, z$ | movimiento interactuante |
| | (más) | |
| $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$ | aceleración relativa de $B$ con respecto a $A$ | movimiento de $B$ observado desde el marco $x, y, z$ |

## PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

Las ecuaciones 16-24 y 16-27 pueden ser aplicadas a la solución de problemas que implican el movimiento plano de partículas o de cuerpos rígidos usando el siguiente procedimiento.

*Ejes coordenados.*

- Elija una ubicación apropiada para el origen, y la orientación adecuada de los ejes para el marco $X, Y, Z$ y el marco de referencia móvil $x, y, z$.
- Muy a menudo las soluciones se obtienen fácilmente si en el instante considerado:

  (1) los orígenes coinciden
  (2) los ejes correspondientes son colineales
  (3) los ejes correspondientes son paralelos

- El marco móvil debe seleccionarse fijo al cuerpo o dispositivo a lo largo del cual ocurre el movimiento relativo.

*Ecuaciones cinemáticas.*

- Después de definir el origen $A$ de la referencia móvil y especificar el punto móvil $B$, las ecuaciones 16-24 y 16-27 deben escribirse en forma simbólica

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$$

- Las componentes cartesianas de todos estos vectores pueden ser expresadas a lo largo de los ejes $X, Y, Z$ o de los ejes $x, y, z$. La opción es arbitraria siempre que se use un conjunto consistente de vectores unitarios.
- El movimiento de la referencia móvil es expresado por $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{a}_A$, $\mathbf{\Omega}$, y $\dot{\mathbf{\Omega}}$; y el movimiento de $B$ con respecto a la referencia móvil se expresa mediante $\mathbf{r}_{B/A}$, $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$, y $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$.




La rotación del contenedor del camión con respecto al punto $C$ es operada por medio de la extensión del cilindro hidráulico $AB$. Para determinar la rotación del contenedor debida a esta extensión, podemos usar las ecuaciones de movimiento relativo y fijar los ejes $x, y$ al cilindro de manera que el movimiento relativo de la extensión del cilindro ocurra a lo largo del eje $y$.

## EJEMPLO 16.19

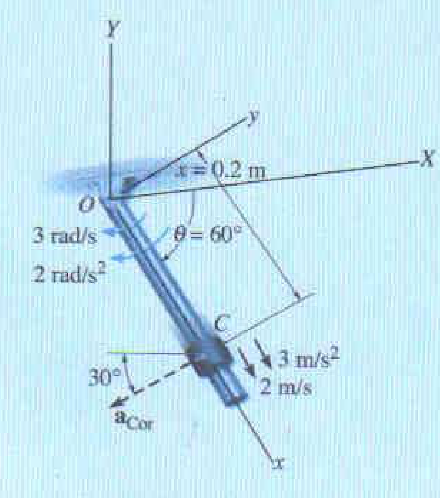



Fig. 16–33

En el instante $\theta = 60°$, la barra mostrada en la figura 16-33 tiene velocidad angular de 3 rad/s y aceleración angular de 2 rad/s$^2$. En este mismo instante, el collar $C$ está viajando hacia fuera a lo largo de la barra de tal forma que cuando $x = 0.2$ m, la velocidad es de 2 m/s y la aceleración de 3 m/s$^2$, ambas medidas con respecto a la barra. Determine la aceleración de Coriolis y la velocidad y aceleración del collar en este instante.

### Solución

*Ejes coordenados.* El origen de ambos sistemas coordenados está ubicado en el punto $O$, figura 16-33. Como el movimiento del collar es relativo a la barra, el marco de referencia $x, y, z$ se *une* a la barra.

*Ecuaciones cinemáticas.*

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_O + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/O} + (\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} \tag{1}$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_O + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/O} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/O}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/O})_{xyz} \tag{2}$$

Será más fácil expresar los datos en términos de vectores componentes **i**, **j**, **k** que en componentes **I**, **J**, **K**. Por consiguiente,

| *Movimiento a referencia móvil* | *Movimiento de C con respecto de referencia móvil* |
|---|---|
| $\mathbf{v}_O = \mathbf{0}$ | $\mathbf{r}_{C/O} = \{0.2\mathbf{i}\}$ m |
| $\mathbf{a}_O = \mathbf{0}$ | $(\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} = \{2\mathbf{i}\}$ m/s |
| $\mathbf{\Omega} = \{-3\mathbf{k}\}$ rad/s | $(\mathbf{a}_{C/O})_{xyz} = \{3\mathbf{i}\}$ m/s$^2$ |
| $\dot{\mathbf{\Omega}} = \{-2\mathbf{k}\}$ rad/s$^2$ | |

A partir de la ecuación 2, la aceleración de Coriolis es definida como

$$\mathbf{a}_{\text{Cor}} = 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} = 2(-3\mathbf{k}) \times (2\mathbf{i}) = \{-12\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Este vector se muestra con una línea discontinua en la figura 16-33. Si se desea, puede ser resuelto en componentes **I**, **J** actuando a lo largo de los ejes $X$ y $Y$, respectivamente.

La velocidad y la aceleración del collar son determinadas sustituyendo los datos en las ecuaciones 1 y 2 y evaluando los productos cruz, lo que da

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_C &= \mathbf{v}_O + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/O} + (\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} \\
&= \mathbf{0} + (-3\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{i}) + 2\mathbf{i} \\
&= \{2\mathbf{i} - 0.6\mathbf{j}\} \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_C &= \mathbf{a}_O + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/O} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/O}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/O})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/O})_{xyz} \\
&= \mathbf{0} + (-2\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{i}) + (-3\mathbf{k}) \times [(-3\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{i})] + 2(-3\mathbf{k}) \times (2\mathbf{i}) + 3\mathbf{i} \\
&= \mathbf{0} - 0.4\mathbf{j} - 1.80\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 3\mathbf{i} \\
&= \{1.20\mathbf{i} - 12.4\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}
\end{aligned}$$

## EJEMPLO 16.20

La barra $AB$, mostrada en la figura 16-34, gira en el sentido de las manecillas del reloj de manera que tiene una velocidad angular $\omega_{AB} = 3$ rad/s y aceleración angular $\alpha_{AB} = 4$ rad/s$^2$ cuando $\theta = 45°$. Determine el movimiento angular de la barra $DE$ en este instante. El collar instalado en $C$ está conectado por un pasador a $AB$ y se desliza sobre la barra $DE$.

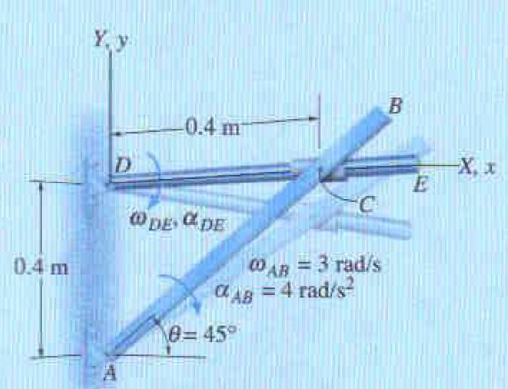



Fig. 16-34

### Solución

*Ejes coordenados.* El origen de los marcos fijo y móvil de referencia está ubicado en $D$, figura 16-34. Además, la referencia $x, y, z$ está unida a, y gira con, la barra $DE$ de manera que el movimiento relativo del collar es fácil de seguir.

*Ecuaciones cinemáticas.*

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_D + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/D} + (\mathbf{v}_{C/D})_{xyz} \quad (1)$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_D + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/D} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/D}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/D})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/D})_{xyz} \quad (2)$$

Todos los vectores serán expresados en términos de componentes $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$.

| *Movimiento de referencia móvil* | *Movimiento de C con respecto a referencia móvil* |
|---|---|
| $\mathbf{v}_D = \mathbf{0}$ | $\mathbf{r}_{C/D} = \{0.4\mathbf{i}\}$ m |
| $\mathbf{a}_D = \mathbf{0}$ | $(\mathbf{v}_{C/D})_{xyz} = (v_{C/D})_{xyz}\mathbf{i}$ |
| $\mathbf{\Omega} = -\omega_{DE}\mathbf{k}$ | $(\mathbf{a}_{C/D})_{xyz} = (a_{C/D})_{xyz}\mathbf{i}$ |
| $\dot{\mathbf{\Omega}} = -\alpha_{DE}\mathbf{k}$ | |

*Movimiento de C:* Como el collar se mueve por una *trayectoria circular*, su velocidad y aceleración pueden ser determinadas usando las ecuaciones 16-9 y 16-14.

$$\mathbf{v}_C = \boldsymbol{\omega}_{AB} \times \mathbf{r}_{C/A} = (-3\mathbf{k}) \times (0.4\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j}) = \{1.2\mathbf{i} - 1.2\mathbf{j}\} \text{ m/s}$$

$$\mathbf{a}_C = \boldsymbol{\alpha}_{AB} \times \mathbf{r}_{C/A} - \omega_{AB}^2\mathbf{r}_{C/A}$$
$$= (-4\mathbf{k}) \times (0.4\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j}) - (3)^2(0.4\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j}) = \{-2\mathbf{i} - 5.2\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2$$

Sustituyendo los datos en las ecuaciones 1 y 2, tenemos

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_D + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/D} + (\mathbf{v}_{C/D})_{xyz}$$
$$1.2\mathbf{i} - 1.2\mathbf{j} = \mathbf{0} + (-\omega_{DE}\mathbf{k}) \times (0.4\mathbf{i}) + (v_{C/D})_{xyz}\mathbf{i}$$
$$1.2\mathbf{i} - 1.2\mathbf{j} = \mathbf{0} - 0.4\omega_{DE}\mathbf{j} + (v_{C/D})_{xyz}\mathbf{i}$$
$$(v_{C/D})_{xyz} = 1.2 \text{ m/s}$$
$$\omega_{DE} = 3 \text{ rad/s} \circlearrowright \qquad \textit{Resp.}$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_D + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/D} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/D}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/D})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/D})_{xyz}$$
$$-2\mathbf{i} - 5.2\mathbf{j} = \mathbf{0} + (-\alpha_{DE}\mathbf{k}) \times (0.4\mathbf{i}) + (-3\mathbf{k}) \times [(-3\mathbf{k}) \times (0.4\mathbf{i})] + 2(-3\mathbf{k}) \times (1.2\mathbf{i}) + (a_{C/D})_{xyz}\mathbf{i}$$
$$-2\mathbf{i} - 5.2\mathbf{j} = -0.4\alpha_{DE}\mathbf{j} - 3.6\mathbf{i} - 7.2\mathbf{j} + (a_{C/D})_{xyz}\mathbf{i}$$
$$(a_{C/D})_{xyz} = 1.6 \text{ m/s}^2$$
$$\alpha_{DE} = -5 \text{ rad/s}^2 = 5 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft \qquad \textit{Resp.}$$

## EJEMPLO 16.21

Dos aviones $A$ y $B$ están volando a la misma altura y tienen los movimientos mostrados en la figura 16-35. Determine la velocidad y la aceleración de $A$ medidas por el piloto de $B$.

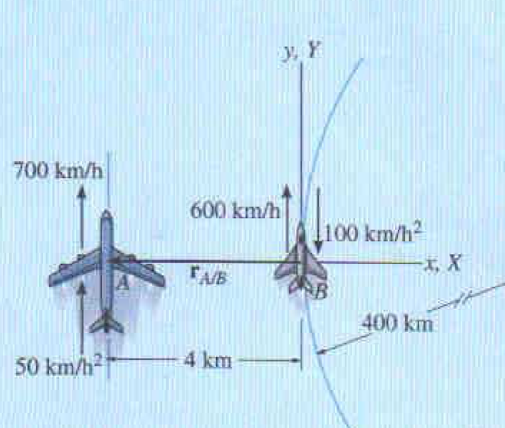



Fig. 16-35

### Solución

*Ejes coordenados.* Como se busca el movimiento relativo de $A$ con respecto al piloto situado en $B$, los ejes $x$, $y$, $z$ son unidos al avión $B$, figura 16-35. En el *instante* considerado, el origen $B$ coincide con el origen del marco fijo $X$, $Y$, $Z$.

*Ecuaciones cinemáticas.*

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B} + (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz} \tag{1}$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{A/B} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz} + (\mathbf{a}_{A/B})_{xyz} \tag{2}$$

*Movimiento de referencia móvil:*

$$\mathbf{v}_B = \{600\mathbf{j}\} \text{ km/h}$$

$$(a_B)_n = \frac{v_B^2}{\rho} = \frac{(600)^2}{400} = 900 \text{ km/h}^2$$

$$\mathbf{a}_B = (\mathbf{a}_B)_n + (\mathbf{a}_B)_t = \{900\mathbf{i} - 100\mathbf{j}\} \text{ km/h}^2$$

$$\Omega = \frac{v_B}{\rho} = \frac{600 \text{ km/h}}{400 \text{ km}} = 1.5 \text{ rad/h} \circlearrowright \qquad \mathbf{\Omega} = \{-1.5\mathbf{k}\} \text{ rad/h}$$

$$\dot{\Omega} = \frac{(a_B)_t}{\rho} = \frac{100 \text{ km/h}^2}{400 \text{ km}} = 0.25 \text{ rad/h}^2 \circlearrowleft \qquad \dot{\mathbf{\Omega}} = \{0.25\mathbf{k}\} \text{ rad/h}^2$$

*Movimiento de A con respecto a la referencia móvil:*

$$\mathbf{r}_{A/B} = \{-4\mathbf{i}\} \text{ km} \quad (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz} = ? \quad (\mathbf{a}_{A/B})_{xyz} = ?$$

Sustituyendo los datos en las ecuaciones 1 y 2, y observando que $\mathbf{v}_A = \{700\mathbf{j}\}$ km/h y $\mathbf{a}_A = \{50\mathbf{j}\}$ km/h², tenemos

$$\mathbf{v}_A = \mathbf{v}_B + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B} + (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz}$$

$$700\mathbf{j} = 600\mathbf{j} + (-1.5\mathbf{k}) \times (-4\mathbf{i}) + (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz}$$

$$(\mathbf{v}_{A/B})_{xyz} = \{94\mathbf{j}\} \text{ km/h} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\mathbf{a}_A = \mathbf{a}_B + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{A/B} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{A/B}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{A/B})_{xyz} + (\mathbf{a}_{A/B})_{xyz}$$

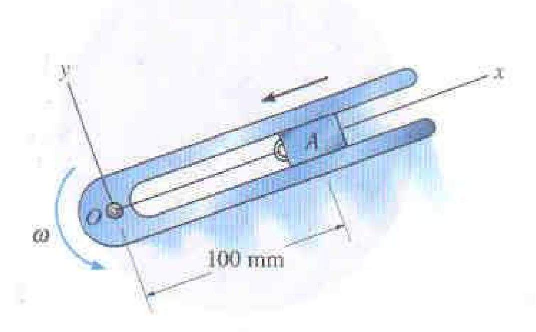
$$50\mathbf{j} = (900\mathbf{i} - 100\mathbf{j}) + (0.25\mathbf{k}) \times (-4\mathbf{i})$$
$$+ (-1.5\mathbf{k}) \times [(-1.5\mathbf{k}) \times (-4\mathbf{i})] + 2(-1.5\mathbf{k}) \times (94\mathbf{j}) + (\mathbf{a}_{A/B})_{xyz}$$

$$(\mathbf{a}_{A/B})_{xyz} = \{-1191\mathbf{i} + 151\mathbf{j}\} \text{ km/h}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Compare la solución de este problema con la del ejemplo 12.26.

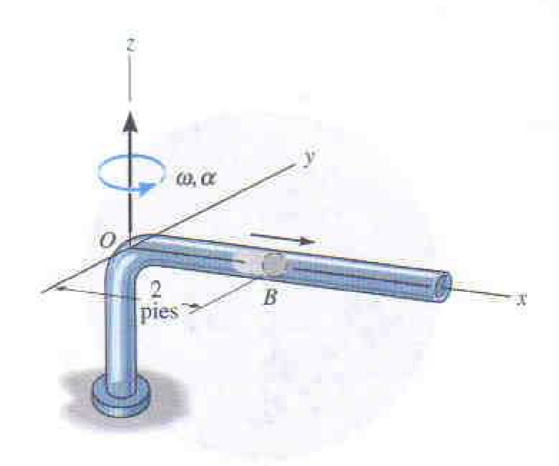
# PROBLEMAS

**16-131.** El bloque $A$, que está unido a una cuerda, se mueve a lo largo de la ranura de una barra horizontal ahorquillada. En el instante mostrado, la cuerda es jalada hacia abajo a través del agujero localizado en $O$ con aceleración de $4\ m/s^2$ y velocidad de $2\ m/s$. Determine la aceleración del bloque en este instante. La barra gira alrededor de $O$ con velocidad angular constante $\omega = 4$ rad/s.



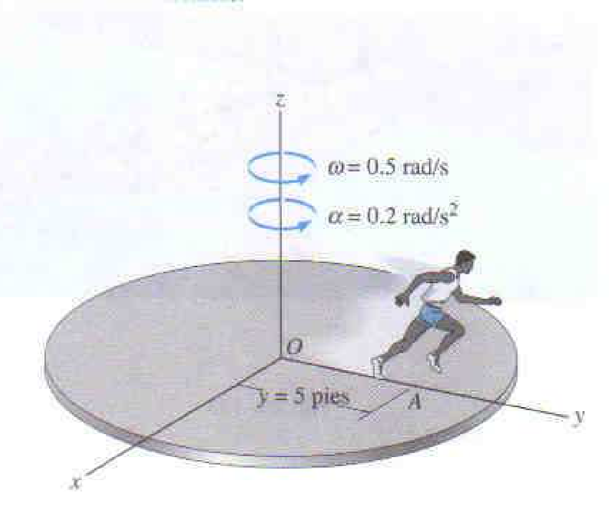

Prob. 16-131

***16-132.** La bola $B$ de tamaño insignificante rueda a través del tubo de manera que en el instante mostrado tiene velocidad de 5 pies/s y aceleración de 3 pies/s$^2$, medidas con respecto al tubo. Si el tubo tiene velocidad angular de $\omega = 3$ rad/s y aceleración angular de $\alpha = 5$ rad/s$^2$ en este mismo instante, determine la velocidad y la aceleración de la pelota.



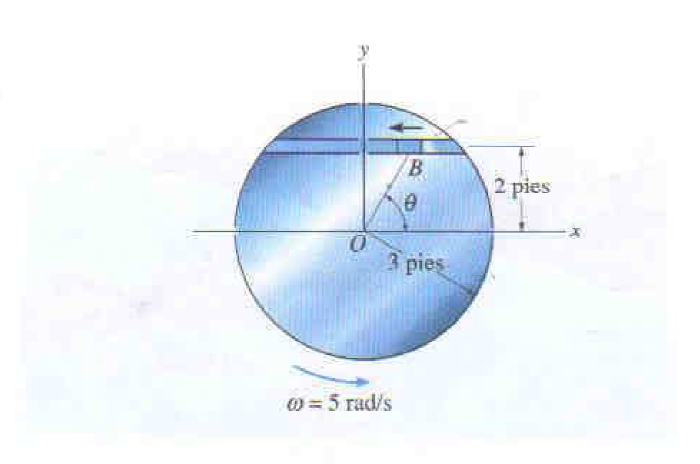

Prob. 16-132

**16-133.** El hombre está sobre la plataforma en el punto $O$ y corre hacia el borde de manera que cuando está en $A$, $y = 5$ pies, su centro de masa tiene velocidad de 2 pies/s y aceleración de 3 pies/s$^2$, ambas medidas con respecto a la plataforma y dirigidas a lo largo del eje $y$. Si la plataforma tiene el movimiento angular mostrado, determine la velocidad y la aceleración de su centro de masa en este instante.



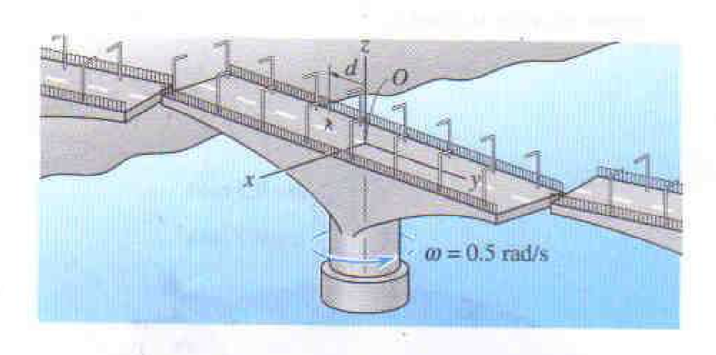

Prob. 16-133

**16-134.** El bloque $B$ se mueve a lo largo de la ranura localizada en la plataforma a rapidez constante de 2 pies/s, medida con relación a la plataforma en la dirección mostrada. Si la plataforma está girando con razón constante $\omega = 5$ rad/s, determine la velocidad y la aceleración del bloque en el instante $\theta = 60°$.



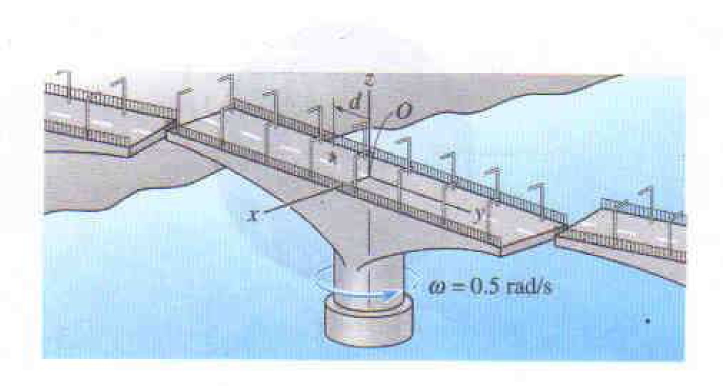

Prob. 16-134

**16-135.** Mientras el puente giratorio se cierra con rotación constante de 0.5 rad/s, un hombre corre a lo largo de la calzada a rapidez constante de 5 pies/s con relación a la calzada. Determine su velocidad y aceleración en el instante $d = 15$ pies.



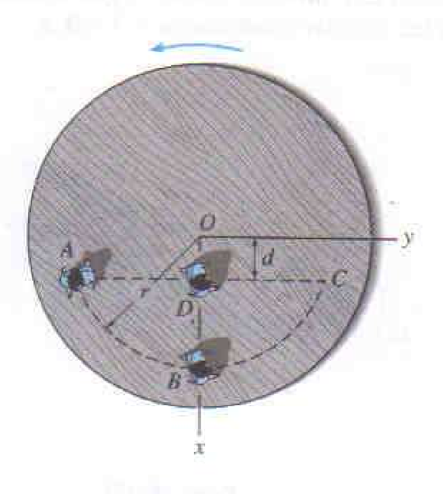

Prob. 16–135

***16-136.** Mientras el puente giratorio se cierra con rotación constante de 0.5 rad/s, un hombre corre a lo largo de la calzada de tal forma que cuando $d = 10$ pies, él está corriendo hacia fuera desde el centro a 5 pies/s con aceleración de 2 pies/s$^2$, ambas medidas con relación a la calzada. Determine su velocidad y aceleración en este instante.



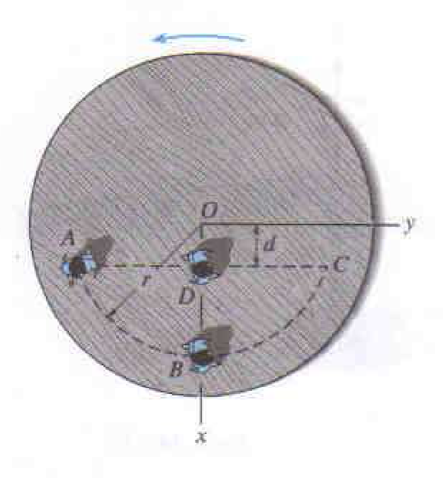

Prob. 16–136

**16-137.** Una niña está de pie en el punto $A$ sobre una plataforma que gira a velocidad angular constante $\omega = 0.5$ rad/s. Si ella camina con rapidez constante de $v = 0.75$ m/s, medida con relación a la plataforma, determine su aceleración (a) cuando llega al punto $D$ al ir a lo largo de la trayectoria $ADC$, $d = 1$ m; y (b) cuando llega al punto $B$ si ella sigue la trayectoria $ABC$, $r = 3$ m.



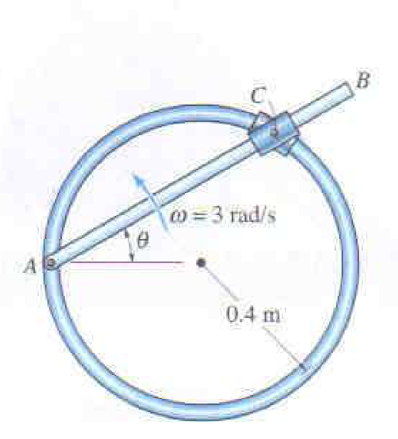

Prob. 16–137

**16-138.** Una niña está de pie en el punto $A$ sobre una plataforma que gira con aceleración angular $\alpha = 0.2$ rad/s$^2$ y en el instante mostrado tiene velocidad angular $\omega = 0.5$ rad/s. Si la niña camina a rapidez constante $v = 0.75$ m/s medida con relación a la plataforma, determine su aceleración (a) cuando llega al punto $D$ por la trayectoria $ADC$, $d = 1$ m; y (b) cuando llega al punto $B$ si ella sigue la trayectoria $ABC$, $r = 3$ m.



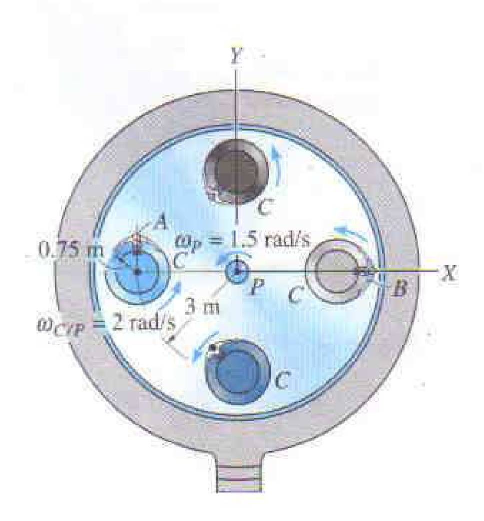

Prob. 16–138

**16-139.** La barra $AB$ gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj con velocidad angular constante $\omega = 3$ rad/s. Determine la velocidad y la aceleración del punto $C$ ubicado sobre el collar doble cuando $\theta = 45°$. El collar consta de dos bloques deslizables conectados mediante un pasador que están constreñidos a moverse por la trayectoria circular de la barra $AB$.



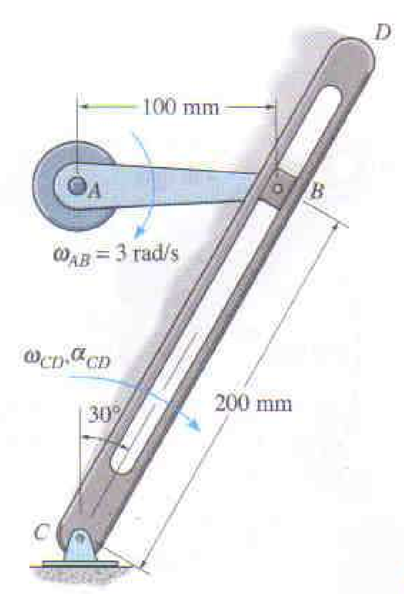

Prob. 16–139

*16-140. Un juego en un parque de diversiones consta de una plataforma rotatoria $P$ con velocidad angular constante $\omega_P = 1.5$ rad/s, y cuatro carros, $C$, montados sobre la plataforma, los cuales tienen velocidad angular constante $\omega_{C/P} = 2$ rad/s, medida con relación a la plataforma. Determine la velocidad y la aceleración del pasajero situado en $B$ en el instante mostrado.



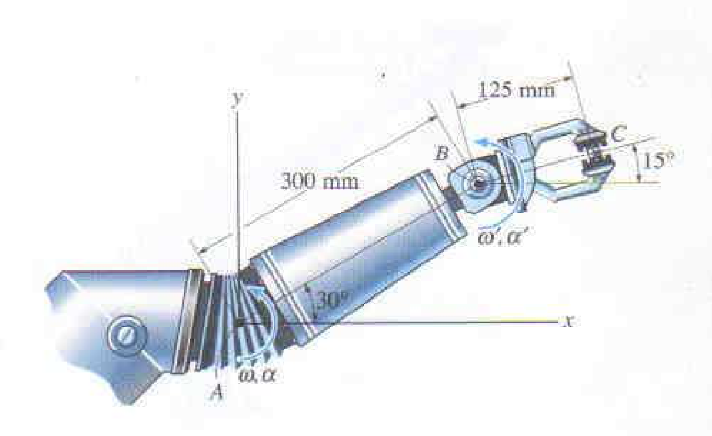

Prob. 16–140

**16-141.** El bloque $B$ del mecanismo está confinado a moverse dentro del miembro ranurado $CD$. Si $AB$ está girando a razón constante de $\omega_{AB} = 3$ rad/s, determine la velocidad angular y la aceleración angular del miembro $CD$ en el instante mostrado.



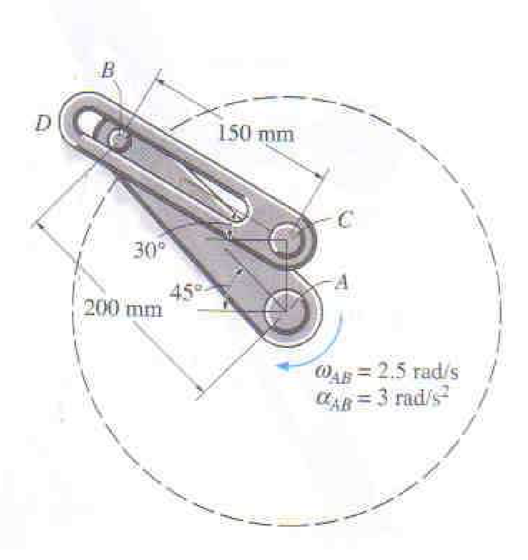

Prob. 16–141

**16-142.** En el instante mostrado, el brazo robótico $AB$ está girando en sentido contrario al de las manecillas del reloj a $\omega = 5$ rad/s y tiene una aceleración angular $\alpha = 2$ rad/s$^2$. Simultáneamente, el agarre $BC$ gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj a $\omega' = 6$ rad/s y $\alpha' = 2$ rad/s$^2$, ambas medidas con relación a una referencia *fija*. Determine la velocidad y la aceleración del objeto sostenido en el agarre $C$.



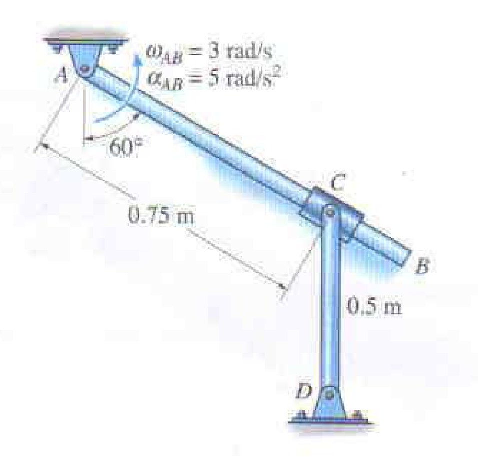

Prob. 16–142

**16-143.** El mecanismo de dos eslabones sirve para amplificar el movimiento angular. El eslabón $AB$ tiene un pasador en $B$ que está confinado a moverse dentro de la ranura del eslabón $CD$. Si en el instante mostrado $AB$ (entrada) tiene velocidad angular $\omega_{AB} = 2.5$ rad/s y aceleración angular $\alpha_{AB} = 3$ rad/s$^2$, determine la velocidad angular y la aceleración angular de $CD$ (salida) en este instante.



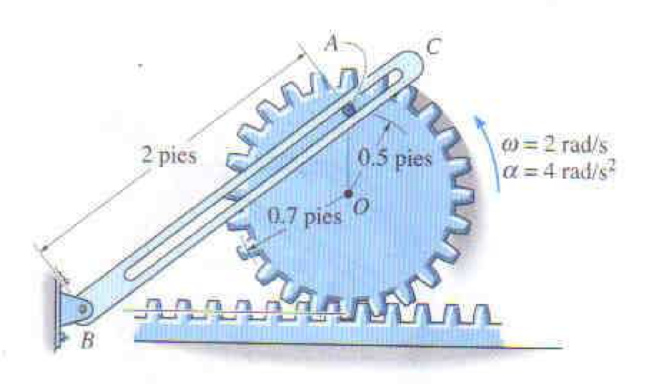

**Prob. 16–143**

***16-144.** En el instante mostrado, la barra $AB$ tiene velocidad angular $\omega_{AB} = 3$ rad/s y aceleración angular $\alpha_{AB} = 5$ rad/s$^2$. Determine la velocidad angular y la aceleración angular de la barra $CD$ en este instante. El collar en $C$ está conectado mediante un pasador a $CD$ y se desliza sobre $AB$.



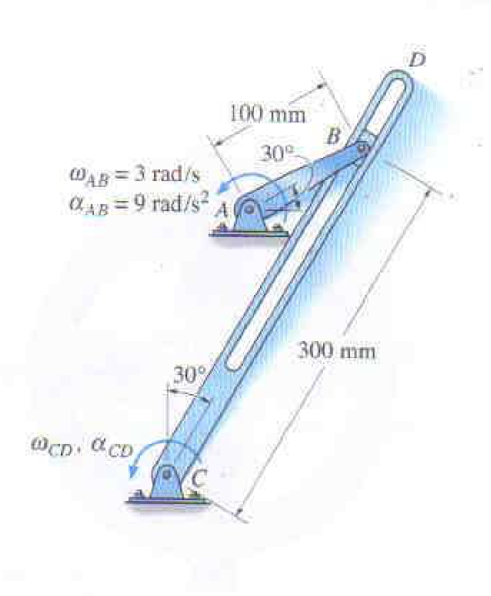

**Prob. 16–144**

**16-145.** El engrane tiene el movimiento angular mostrado. Determine la velocidad angular y la aceleración angular del eslabón ranurado $BC$ en este instante. La espiga en el punto $A$ está fija al engrane.



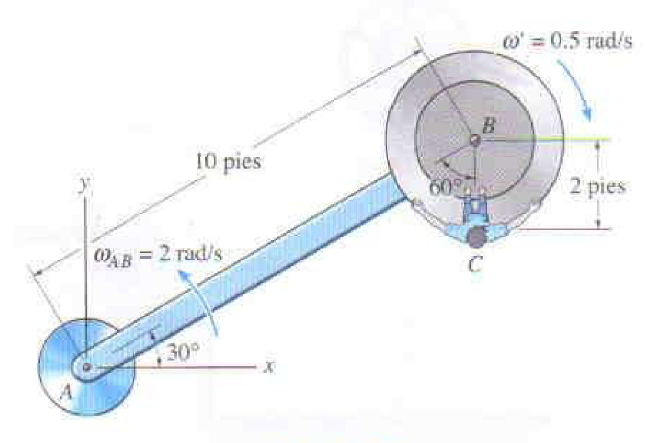

**Prob. 16–145**

**16-146.** El mecanismo de retorno rápido consta de la manivela $AB$, el bloque deslizable $B$, y el eslabón ranurado $CD$. Si la manivela tiene el movimiento angular mostrado, determine el movimiento angular del eslabón ranurado en este instante.



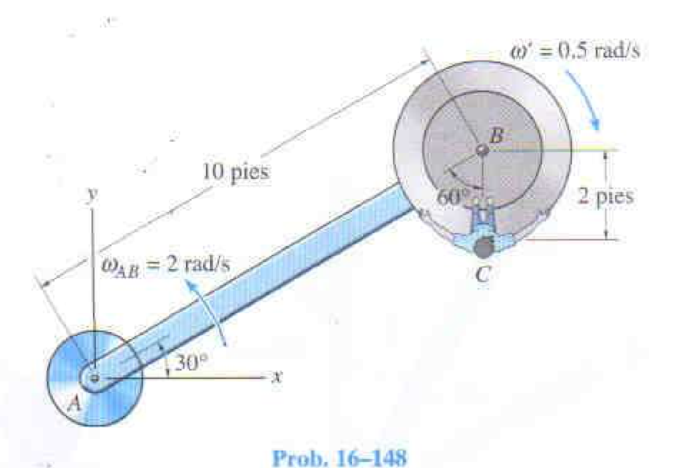

**Prob. 16–146**

**16-147.** Un juego en un parque de diversiones consta de un brazo giratorio $AB$ con velocidad angular constante $\omega_{AB} = 2$ rad/s con respecto al punto $A$, y de un carro montado en el extremo del brazo que tiene velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}' = \{-0.5\mathbf{k}\}$ rad/s, medida con relación al brazo. En el instante mostrado, determine la velocidad y la aceleración del pasajero instalado en $C$.



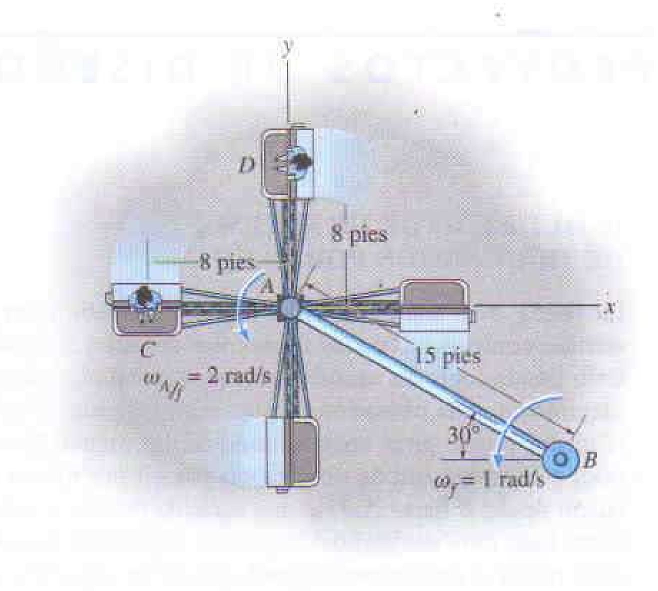

Prob. 16–147

***16-148.** Un juego en un parque de diversiones consta de un brazo giratorio $AB$ que tiene aceleración angular de $\alpha_{AB} = 1$ rad/s$^2$ cuando $\omega_{AB} = 2$ rad/s en el instante mostrado. En este instante, el carro montado en el extremo del brazo tiene aceleración angular relativa de $\boldsymbol{\alpha}' = \{-0.6\mathbf{k}\}$ rad/s$^2$ cuando $\boldsymbol{\omega}' = \{-0.5\mathbf{k}\}$ rad/s. Determine la velocidad y la aceleración del pasajero instalado en $C$ en este instante.



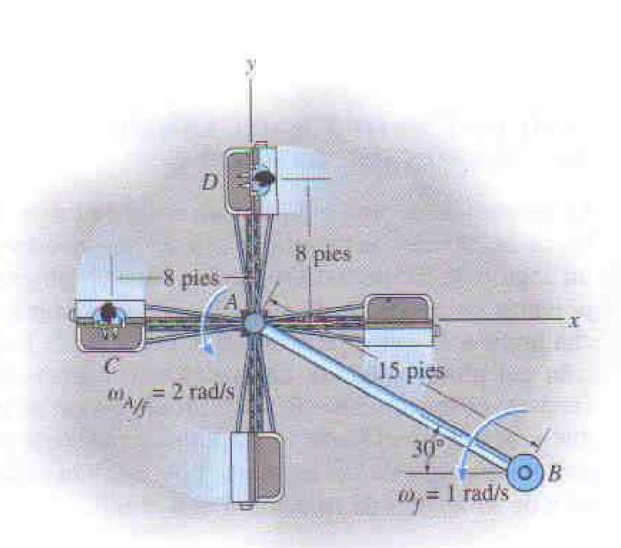

Prob. 16–148

**16-149.** Los carros en un juego de un parque de diversiones giran alrededor del eje localizado en $A$ a velocidad angular constante de $\omega_{A/f} = 2$ rad/s, medida con relación al marco $AB$. Al mismo tiempo el marco gira alrededor del soporte principal del eje situado en $B$ a velocidad angular constante $\omega_f = 1$ rad/s. Determine la velocidad y la aceleración del pasajero instalado en $C$ en el instante mostrado.




Prob. 16–149

**16-150.** Los carros en un juego de un parque de diversiones giran alrededor del eje localizado en $A$ a velocidad angular constante $\omega_{A/f} = 2$ rad/s, medida con relación al marco $AB$. Al mismo tiempo el marco gira alrededor del soporte principal del eje situado en $B$ a velocidad angular constante $\omega_f = 1$ rad/s. Determine la velocidad y la aceleración del pasajero instalado en $D$ en el instante mostrado.

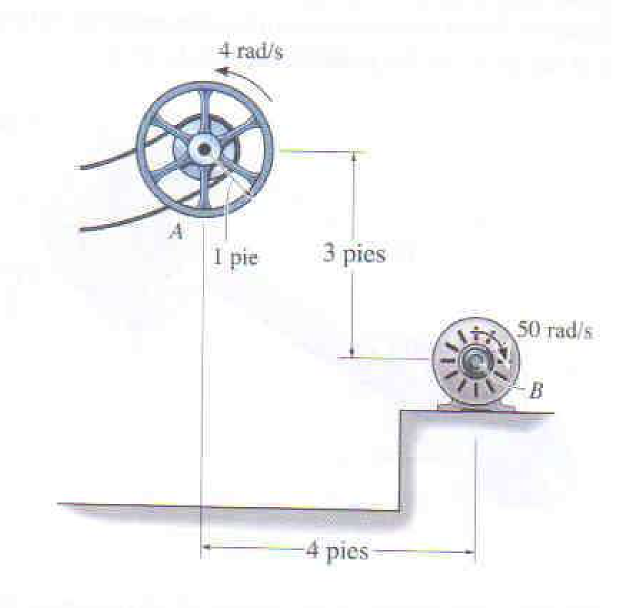



Prob. 16–150

# PROYECTOS DE DISEÑO

### 16-1D. DISEÑO DE UN SISTEMA DE TRANSMISIÓN POR BANDA

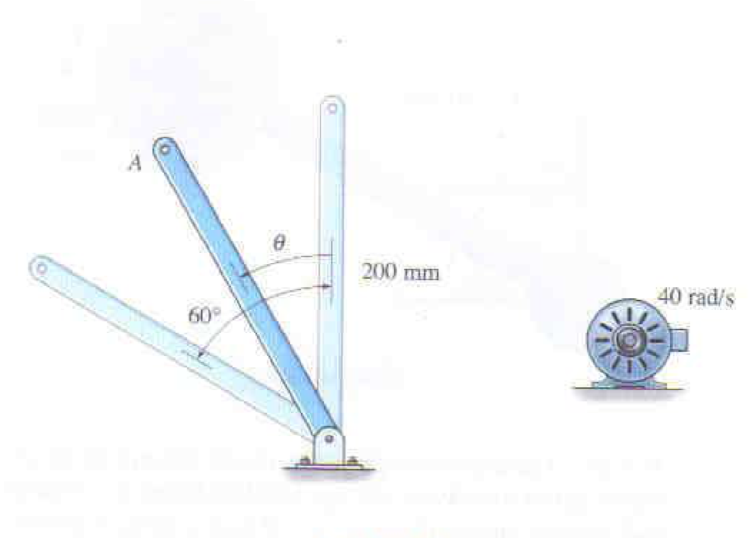
La rueda *A* se usa en una fábrica textil y debe girar en sentido contrario al de las manecillas del reloj a 4 rad/s. Esto puede lograrse usando un motor instalado sobre la plataforma en la ubicación mostrada. Si la flecha *B* sobre el motor puede girar en el sentido de las manecillas del reloj a 50 rad/s, diseñe un método para transmitir la rotación desde *B* hasta *A*. Use una serie de bandas y poleas como base para su diseño. Una banda impulsa la rotación de la rueda *A* enrollándose alrededor de su superficie exterior, y una polea puede unirse a la flecha del motor así como en cualquier otra parte. No permita que la longitud de cualquier banda sea más larga que 6 pies. Presente un dibujo de su diseño y los cálculos cinemáticos. Determine también el costo total de los materiales si las bandas cuestan \$2.50 y las poleas \$ $2r$, donde $r$ es el radio de la polea en pulgadas.




Prob. 16–1D

### 16-2D. DISEÑO DE UN MECANISMO DE ESLABÓN OSCILATORIO

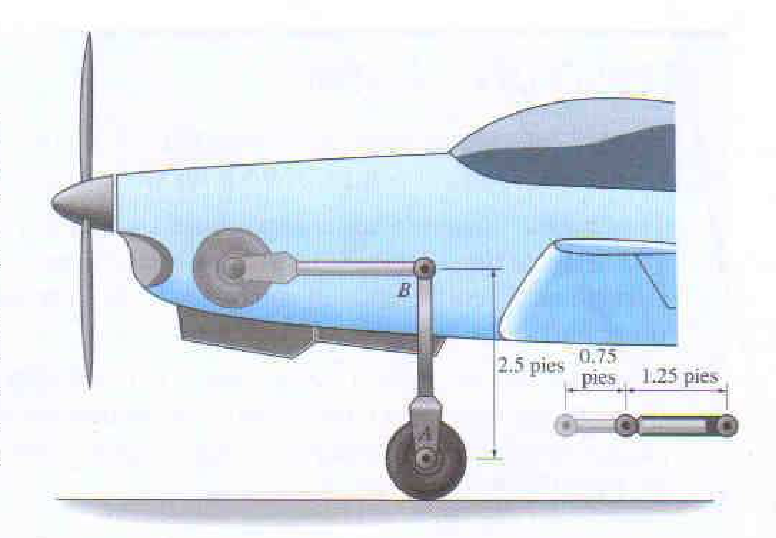
La operación de una máquina de coser requiere que la barra de 200 mm de longitud oscile en vaivén a través de un ángulo de 60° cada 0.2 segundos. Para proporcionar la potencia necesaria, se dispone de un motor con una flecha impulsora que gira a 40 rad/s. Especifique la ubicación del motor y diseñe un mecanismo requerido para efectuar el movimiento. Realice un dibujo de su diseño que muestre la colocación del motor, y calcule la velocidad y la aceleración del extremo *A* del eslabón como función de su ángulo de rotación $0° \leq \theta \leq 60°$.




Prob. 16–2D

### 16-3D. DISEÑO DE UN MECANISMO RETRÁCTIL DE ATERRIZAJE

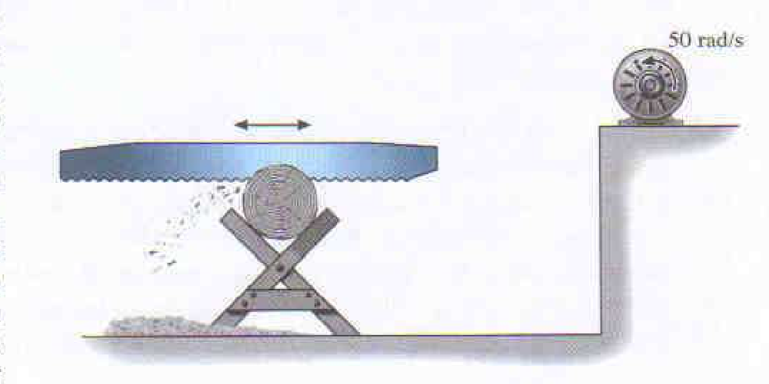
La rueda de la nariz de un avión pequeño está unida al miembro $AB$, el cual se articula al fuselaje del avión en el punto $B$. Diseñe un mecanismo que permita a la rueda retractarse por completo hacia delante, es decir, ser girada en el sentido de las manecillas del reloj 90°, en $t \leq 4$ segundos. Use un cilindro hidráulico que tenga una longitud cerrada de 1.25 pies y, si es necesario, una longitud totalmente extendida de 2 pies. Asegúrese de que su diseño mantiene a la rueda en una posición estable cuando se encuentre sobre el suelo. Muestre gráficas de la velocidad angular y la aceleración angular de $AB$ contra su posición angular de $0° \leq \theta \leq 90°$.




Prob. 16–3D

### 16-4D. DISEÑO DE UN MECANISMO DE ESLABÓN DE SIERRA

En un aserradero, se requiere que la hoja de una sierra permanezca en posición horizontal y experimente un movimiento completo de vaivén en 2 segundos. Se dispone de un motor eléctrico cuya flecha gira a 50 rad/s para impulsar la sierra y puede estar instalado en cualquier parte. Diseñe un mecanismo que transfiera la rotación de la flecha del motor a la hoja de la sierra. Presente dibujos de su diseño y cálculos cinemáticos de la sierra. Incluya una gráfica de la velocidad y la aceleración de la sierra como función de su posición horizontal. Observe que para cortar el tronco se debe permitir a la hoja moverse libremente hacia abajo así como en vaivén.




Prob. 16–4D

## REPASO DEL CAPÍTULO

- ***Movimiento plano de un cuerpo rígido.*** Un cuerpo rígido experimenta tres tipos de movimiento plano: traslación, rotación con respecto a un eje fijo, y movimiento plano general.
- ***Traslación.*** Cuando un cuerpo tiene traslación rectilínea, todas sus partículas viajan a lo largo de trayectorias de línea recta. Si las trayectorias tienen el mismo radio de curvatura, entonces ocurre traslación curvilínea. Si conocemos el movimiento de una de las partículas, entonces el movimiento de todas las otras partículas también es conocido.
- ***Rotación con respecto a un eje fijo.*** En este tipo de movimiento, todas las partículas se desplazan por trayectorias circulares. Aquí, todos los segmentos de línea presentes en el cuerpo experimentan desplazamiento angular, velocidad angular y aceleración angular idénticos. Las relaciones diferenciales entre esas cantidades cinemáticas son

$$\omega = d\theta/dt \qquad \alpha = d\omega/dt \qquad \alpha\, d\theta = \omega\, d\omega$$

Si la aceleración angular es constante, $\alpha = \alpha_c$, entonces estas ecuaciones pueden ser integradas y resultan ser

$$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$$
$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha_c t^2$$
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$

Una vez conocido el movimiento angular del cuerpo, la velocidad de cualquier partícula a una distancia $r$ del eje de rotación es

$$v = \omega r \qquad \text{o} \qquad \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

La aceleración de la partícula tiene dos componentes. La componente tangencial toma en cuenta el cambio en la magnitud de la velocidad

$$a_t = \alpha r \qquad \text{o} \qquad \mathbf{a}_t = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}$$

La componente normal toma en cuenta el cambio en la dirección de la velocidad

$$a_n = \omega^2 r \qquad \text{o} \qquad \mathbf{a}_n = -\omega^2 \mathbf{r}$$

- ***Movimiento plano general.*** Cuando un cuerpo experimenta movimiento plano general, se traslada y gira simultáneamente. Un ejemplo típico es una rueda que gira sin deslizar. Hay varios métodos para analizar este movimiento.
- ***Análisis de movimiento absoluto.*** Si el movimiento de un punto sobre un cuerpo, o el movimiento angular de una línea, es conocido, entonces puede ser posible relacionar este movimiento al de otro punto o línea usando un análisis de movimiento absoluto. Para hacer esto, se establecen coordenadas $s$ de posición lineal o coordenadas $\theta$ de posición angular (medidas desde una línea o punto fijo). Estas coordenadas de posición son relacionadas entonces usando la geometría del cuerpo. La derivada con respecto al tiempo de esta ecuación resulta en la relación entre las velocidades y/o las velocidades angulares. Una segunda derivada con respecto al tiempo relaciona las aceleraciones y/o las aceleraciones angulares.

- ***Análisis de velocidad relativa.*** El movimiento plano general también puede ser analizado usando un análisis de movimiento relativo entre dos puntos $A$ y $B$. Este método considera el movimiento en partes: primero una traslación del punto base $A$ seleccionado, luego una "rotación" relativa del cuerpo con respecto al punto $A$, medida desde un eje en traslación. Las velocidades de los dos puntos $A$ y $B$ son relacionadas entonces usando

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$$

Esta ecuación puede ser aplicada en forma cartesiana vectorial, escrita como

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

De manera similar, para aceleración,

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + (\mathbf{a}_{B/A})_t + (\mathbf{a}_{B/A})_n$$

o bien

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} - \omega^2\mathbf{r}_{B/A}$$

Dado que el movimiento relativo es visto como un movimento circular alrededor del punto base, el punto $B$ tendrá una velocidad $\mathbf{v}_{B/A}$, que es tangente al círculo. Este punto también tiene dos componentes de aceleración, $(\mathbf{a}_{B/A})_t$ y $(\mathbf{a}_{B/A})_n$. Es importante observar que $\mathbf{a}_A$ y $\mathbf{a}_B$ pueden tener dos componentes si esos puntos se mueven de acuerdo con trayectorias curvas.

***Centro instantáneo de velocidad cero.*** Si el punto base $A$ es seleccionado con velocidad cero, entonces la ecuación de velocidad relativa es

$$\mathbf{v}_B = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

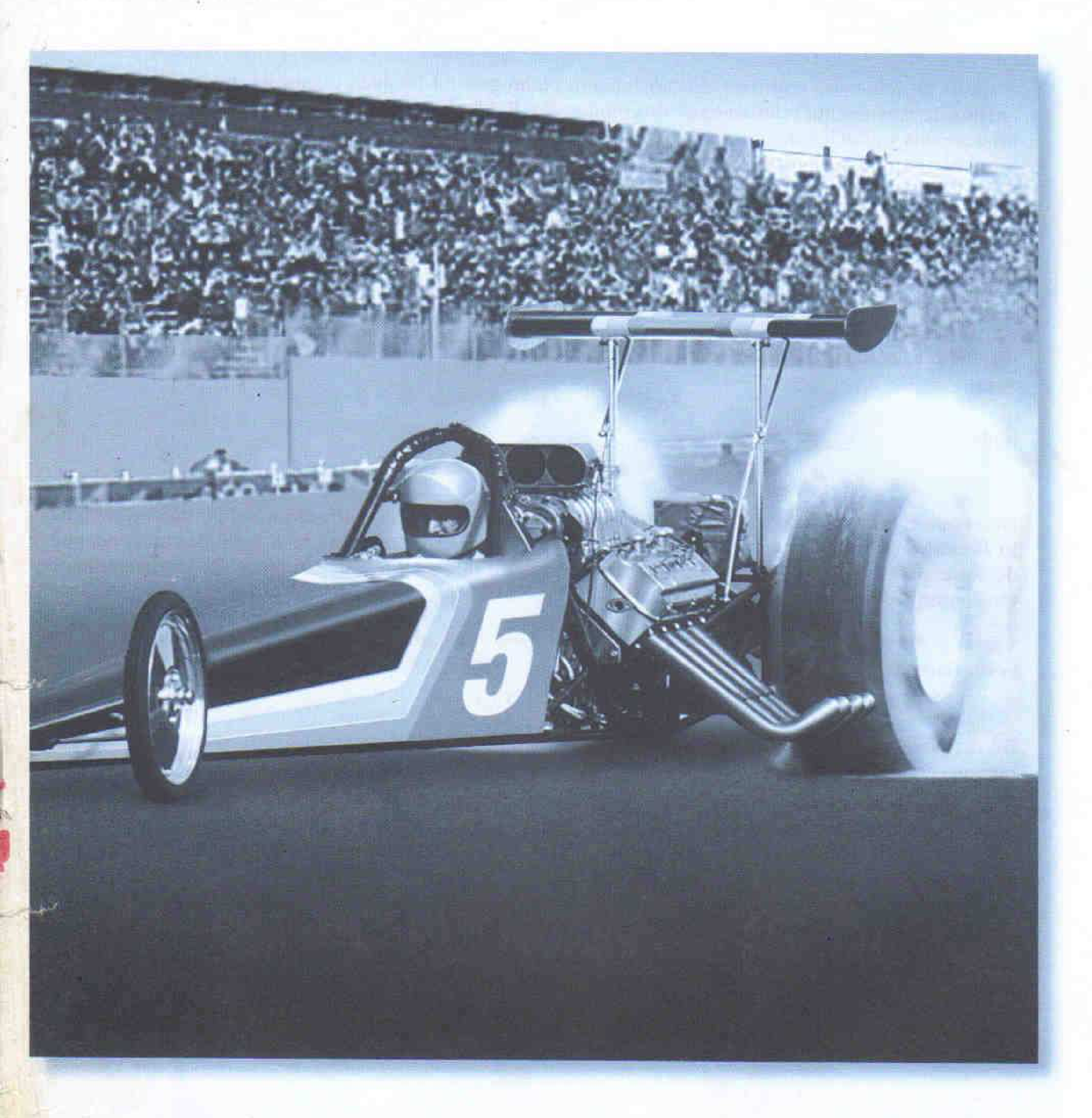
En este caso, el movimiento aparece como si el cuerpo estuviese girando con respecto a un eje instantáneo.

El centro instantáneo de rotación ($CI$) puede ser establecido si se conocen las direcciones de las velocidades de dos puntos cualesquiera sobre el cuerpo. Como la línea radial $r$ siempre es perpendicular a cada velocidad, entonces el $CI$ está en el punto de intersección de esas dos líneas radiales. Su ubicación medida es determinada a partir de la geometría del cuerpo. Una vez establecido, la velocidad de cualquier punto $P$ sobre el cuerpo puede ser determinada con $v = \omega r$, donde $r$ se extiende desde el $CI$ hasta el punto $P$.

- ***Movimiento relativo usando ejes en rotación.*** Los problemas que implican miembros conectados que se deslizan con respecto a otros, o puntos no ubicados sobre el mismo cuerpo, pueden ser analizados usando un análisis de movimiento relativo referido desde un marco rotatorio. Las ecuaciones de movimiento relativo son

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$$

En particular, el término $2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ se llama aceleración de Coriolis.




Al empezar a acelerar, las fuerzas que actúan sobre este automóvil de carreras trucado son muy severas y deben tomarse en cuenta en el diseño de su estructura.

CAPÍTULO 17

# Cinética plana de un cuerpo rígido: Fuerza y aceleración

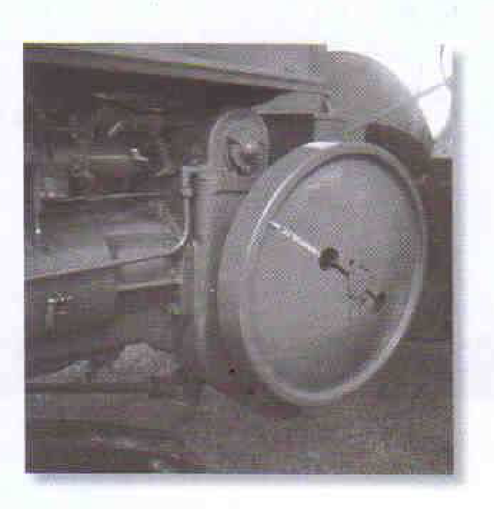
## OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Presentar los métodos usados para determinar el momento de inercia de masa de un cuerpo.
- Desarrollar las ecuaciones cinéticas de movimiento plano para un cuerpo rígido simétrico.
- Analizar la aplicación de esas ecuaciones a cuerpos que experimentan traslación, rotación con respecto a un eje fijo, y movimiento plano general.

## 17.1 Momento de inercia

Como un cuerpo tiene forma y tamaño definidos, aplicarle un sistema de fuerzas no concurrentes puede ocasionar que se traslade y gire. Los aspectos traslacionales del movimiento fueron estudiados en el capítulo 13 y están regidos por la ecuación $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$. En la sección 17.2 veremos que los aspectos rotacionales, causados por un momento $\mathbf{M}$, están regidos por una ecuación de la forma $\mathbf{M} = I\boldsymbol{\alpha}$. El símbolo $I$ que aparece en esta ecuación se llama momento de inercia. Por comparación, el *momento de inercia* es una medida de la resistencia de un cuerpo a *aceleraciones angulares* ($\mathbf{M} = I\boldsymbol{\alpha}$) en la misma forma que la *masa* es una medida de la resistencia de un cuerpo a *aceleraciones* ($\mathbf{F} = m\mathbf{a}$).

El volante del motor de este tractor tiene un gran momento de inercia con respecto a su eje de rotación. Una vez en movimiento, será difícil detenerlo, y esto a su vez impedirá que el motor se atasque permitiéndole mantener una potencia constante.



Definimos el *momento de inercia* como la integral del "segundo momento" con respecto a un eje de todos los elementos de masa $dm$ que constituyen el cuerpo.* Por ejemplo, el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje $z$ en la figura 17-1 es

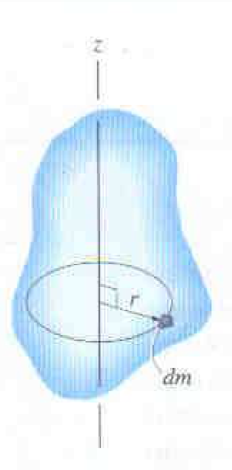



Fig. 17-1

$$I = \int_m r^2 \, dm. \tag{17-1}$$

Aquí el "brazo de momento" $r$ es la distancia perpendicular del eje $z$ al elemento arbitrario $dm$. Como la formulación implica a $r$, el valor de $I$ es diferente para cada eje con respecto al cual se formula. En el estudio de cinética plana, el eje que generalmente se elige para el análisis pasa por el centro de masa $G$ del cuerpo y es siempre perpendicular al plano de movimiento. El momento de inercia calculado con respecto a este eje es denotado por $I_G$. Observe que como $r$ está elevado al cuadrado en la ecuación 17-1, el momento de inercia de masa es siempre una cantidad *positiva*. Las unidades comunes usadas para su medición son $\text{kg} \cdot \text{m}^2$ o $\text{slug} \cdot \text{pie}^2$.

Si el cuerpo está constituido de material con densidad variable, $\rho = \rho(x, y, z)$, su masa elemental $dm$ puede ser expresada en términos de su densidad y volumen como $dm = \rho \, dV$. Sustituyendo $dm$ en la ecuación 17-1, el momento de inercia del cuerpo es calculado entonces usando *elementos de volumen* en la integración; esto es,

*Otra propiedad del cuerpo, que mide la simetría de la masa del cuerpo con respecto a un sistema coordenado, es el producto de inercia. Esta propiedad se aplica al movimiento tridimensional de un cuerpo y será analizada en el capítulo 21.

$$I = \int_V r^2 \rho \, dV \qquad (17\text{–}2)$$

En el caso especial de $\rho$ igual a una *constante*, este término puede ser factorizado fuera de la integral, y la integración es entonces meramente una función de geometría,

$$I = \rho \int_V r^2 \, dV \qquad (17\text{–}3)$$

Cuando el volumen elemental elegido para efectuar la integración tiene dimensiones infinitesimales en las tres direcciones, por ejemplo, $dV = dx\,dy\,dz$, figura 17-2*a*, el momento de inercia del cuerpo debe ser determinado usando "integración triple". Sin embargo, el proceso de integración puede ser simplificado a una *integración simple* siempre que el volumen elemental elegido tenga tamaño diferencial o espesor en *una sola dirección*. Los elementos tipo cascarón o tipo disco son los usados más a menudo para este fin.

## PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

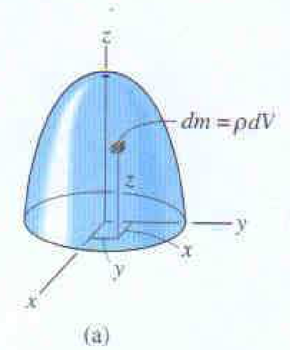
Para la integración, consideraremos sólo cuerpos simétricos que tengan superficies generadas por una curva revolvente con respecto a un eje. Un ejemplo de un cuerpo de tal tipo que es generado con respecto al eje $z$ se muestra en la figura 17-2*a*. Pueden elegirse dos tipos de elementos diferenciales.

***Elemento tipo cascarón.***

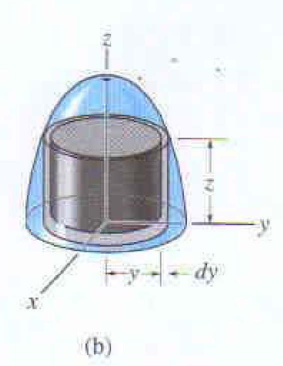
- Si un *elemento del tipo cascarón* con altura $z$, radio $r = y$ y espesor $dy$ es elegido para efectuar la integración, figura 17-2*b*, entonces el volumen es $dV = (2\pi y)(z)\,dy$.
- Este elemento puede ser usado en las ecuaciones 17-2 o 17-3 para determinar el momento de inercia $I_z$ del cuerpo con respecto al eje $z$, ya que *todo el elemento*, debido a su "delgadez", se encuentra a la *misma* distancia perpendicular $r = y$ del eje $z$ (vea el ejemplo 17.1).

***Elemento tipo disco.***

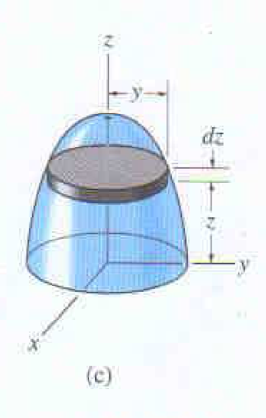
- Si un elemento tipo disco, con radio $y$ y espesor $dz$, se elige para la integración, figura 17-2*c*, entonces el volumen es $dV = (\pi y^2)\,dz$.
- Este elemento es *finito* en la dirección radial, y en consecuencia *no* todas sus partes se encuentran a la *misma distancia radial* $r$ del eje $z$. Como resultado, las ecuaciones 17-2 o 17-3 *no pueden* ser usadas para determinar $I_z$ directamente. En vez de ello, para efectuar esta integración es necesario determinar primero el momento de inercia *del elemento* con respecto al eje $z$ y luego integrar este resultado (vea el ejemplo 17.2).




(a)




(b)




(c)

**Fig. 17–2**

## EJEMPLO 17.1

Determine el momento de inercia del cilindro mostrado en la figura 17-3*a* con respecto al eje $z$. La densidad del material, $\rho$, es constante.

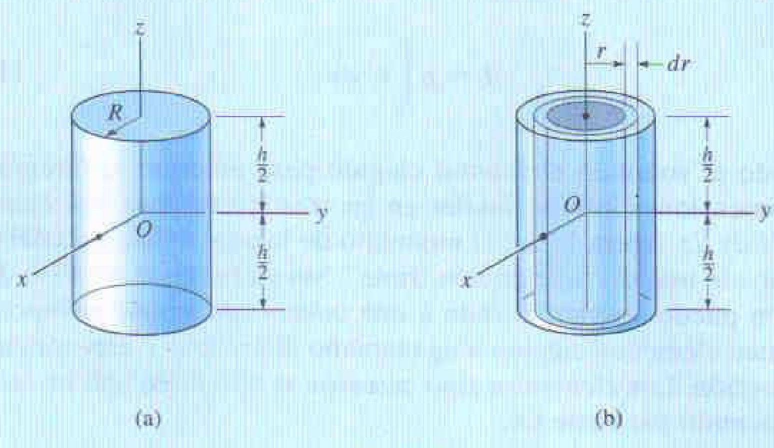



Fig. 17–3

### Solución

***Elemento tipo cascarón.*** Este problema puede ser resuelto usando el *elemento tipo cascarón* mostrado en la figura 17-3*b* e integración simple. El volumen del elemento es $dV = (2\pi r)(h)\,dr$, por lo que su masa es $dm = \rho\,dV = \rho(2\pi hr\,dr)$. Como *todo el elemento* se encuentra a la misma distancia $r$ del eje $z$, el momento de inercia *del elemento* es

$$dI_z = r^2\,dm = \rho 2\pi h r^3\,dr$$

Al integrar sobre toda la región del cilindro obtenemos

$$I_z = \int_m r^2\,dm = \rho 2\pi h \int_0^R r^3\,dr = \frac{\rho\pi}{2} R^4 h$$

La masa del cilindro es

$$m = \int_m dm = \rho 2\pi h \int_0^R r\,dr = \rho\pi h R^2$$

por lo que

$$I_z = \frac{1}{2} m R^2 \qquad \textit{Resp.}$$

## EJEMPLO 17.2

Un sólido se forma girando el área sombreada que muestra la figura 17-4*a* con respecto al eje *y*. Si la densidad del material es de 5 slug/pie³, determine el momento de inercia con respecto al eje *y*.

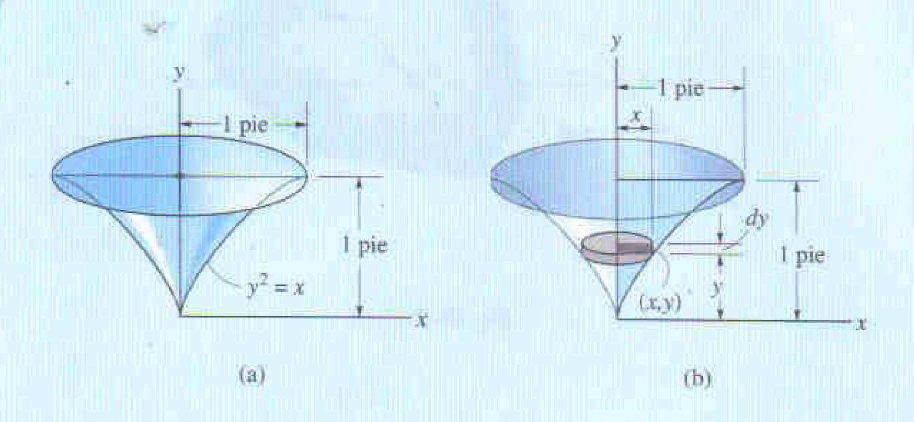



Fig. 17–4

### Solución

*Elemento tipo disco.* El momento de inercia se calculará usando un *elemento del tipo disco*, como se muestra en la figura 17-4*b*. Aquí el elemento interseca la curva en el punto arbitrario $(x, y)$ y tiene masa

$$dm = \rho\, dV = \rho(\pi x^2)\, dy$$

Aunque todas las porciones del elemento *no* están ubicadas a la misma distancia del eje *y*, aún es posible determinar el momento de inercia $dI_y$ *del elemento* con respecto al eje *y*. En el ejemplo anterior se mostró que el momento de inercia de un cilindro con respecto a su eje longitudinal es $I = \frac{1}{2}mR^2$, donde $m$ y $R$ son la masa y el radio del cilindro. Ya que la altura del cilindro no aparece en esta fórmula, el cilindro mismo puede ser considerado como un disco. Así, para el elemento tipo disco de la figura 17-4*b*, tenemos

$$dI_y = \tfrac{1}{2}(dm)x^2 = \tfrac{1}{2}[\rho(\pi x^2)\, dy]x^2$$

Sustituyendo $x = y^2$, $\rho = 5$ slug/pie³, e integrando con respecto a *y*, a partir de $y = 0$ hasta $y = 1$ pie, obtenemos el momento de inercia para todo el sólido.

$$I_y = \frac{\pi(5)}{2}\int_0^1 x^4\, dy = \frac{\pi(5)}{2}\int_0^1 y^8\, dy = 0.873 \text{ slug}\cdot\text{pies}^2 \quad \textit{Resp.}$$

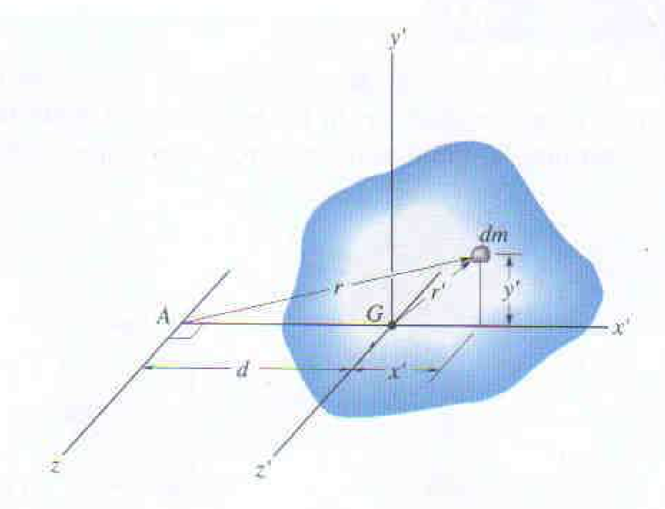



Fig. 17–5

**Teorema de los ejes paralelos.** Si el momento de inercia del cuerpo alrededor de un eje que pasa por el centro de masa del cuerpo es conocido, entonces el momento de inercia con respecto a cualquier otro *eje paralelo* puede ser determinado usando el *teorema de los ejes paralelos*. Es posible derivar este teorema considerando el cuerpo mostrado en la figura 17-5. El eje $z'$ pasa por el centro de masa $G$, mientras que el correspondiente *eje z paralelo* se encuentra alejado a una distancia $d$ constante. Seleccionando el elemento diferencial de masa $dm$, que está localizado en el punto $(x', y')$, y usando el teorema de Pitágoras, $r^2 = (d + x')^2 + y'^2$, podemos expresar el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje $z$ como

$$I = \int_m r^2\, dm = \int_m [(d + x')^2 + y'^2]\, dm$$

$$= \int_m (x'^2 + y'^2)\, dm + 2d \int_m x' dm + d^2 \int_m dm$$

Puesto que $r'^2 = x'^2 + y'^2$, la primera integral representa $I_G$. La segunda integral es igual a *cero*, ya que el eje $z'$ pasa por el centro de masa del cuerpo, es decir, $\int x' dm = \bar{x}' \int dm = 0$ ya que $\bar{x}' = 0$. Finalmente, la tercera integral representa la masa total $m$ del cuerpo. Por

consiguiente, el momento de inercia con respecto al eje $z$ puede escribirse como

$$I = I_G + md^2 \tag{17–4}$$

donde

$I_G$ = momento de inercia con respecto al eje $z'$ que pasa por el centro de masa $G$
$m$ = masa del cuerpo
$d$ = distancia perpendicular entre los ejes paralelos

**Radio de giro.** En ocasiones, el momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje específico es reportado en los manuales de ingeniería usando el *radio de giro*, $k$. Este valor tiene unidades de longitud, y cuando se conoce junto con el valor de la masa $m$ del cuerpo, el momento de inercia del cuerpo es determinado a partir de la ecuación

$$I = mk^2 \quad \text{o} \quad k = \sqrt{\frac{I}{m}} \tag{17–5}$$

Advierta la *similitud* entre la definición de $k$ en esta fórmula y $r$ en la ecuación $dI = r^2dm$, la cual define el momento de inercia de una masa elemental $dm$ del cuerpo con respecto a un eje.

**Cuerpos compuestos.** Si un cuerpo está construido a partir de varias formas simples como discos, esferas y barras, su momento de inercia con respecto a cualquier eje $z$ puede ser determinado sumando algebraicamente los momentos de inercia de todas las formas componentes, calculados con respecto al eje $z$. La adición algebraica es necesaria ya que una parte componente debe ser considerada como una cantidad negativa si ya ha sido contada como pieza de otra parte, por ejemplo, un "agujero" restado de una placa sólida. El teorema de los ejes paralelos es necesario para efectuar los cálculos si el centro de masa de cada parte componente no se encuentra sobre el eje $z$. Entonces, para los cálculos, $I = \Sigma(I_G + md^2)$. Aquí, para cada una de las partes componentes, $I_G$ es calculado por integración o puede ser determinado con una tabla, como la dada en la cubierta interna posterior de este libro.

## EJEMPLO 17.3

Si la placa mostrada en la figura 17-6*a* tiene densidad de 8000 kg/m³ y espesor de 10 mm, determine su momento de inercia con respecto a un eje dirigido perpendicularmente a la página y que pase por el punto *O*.

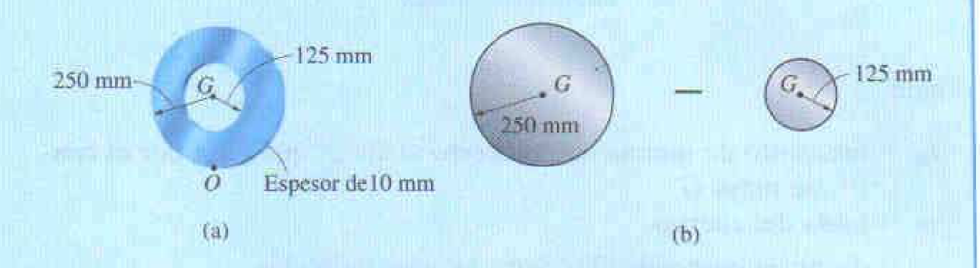



Fig. 17-6

### Solución

La placa consta de dos partes componentes, el disco de 250 mm de radio *menos* un disco de 125 mm de radio, figura 17-6*b*. El momento de inercia con respecto a *O* puede ser determinado calculando el momento de inercia de cada una de estas partes con respecto a *O* y luego sumando *algebraicamente* los resultados. Los cálculos se efectúan usando el teorema de los ejes paralelos junto con los datos dados en la tabla que aparece en la cubierta interna posterior de este libro.

***Disco.*** El momento de inercia de un disco con respecto a un eje centroidal perpendicular al plano del disco es $I_G = \frac{1}{2}mr^2$. El centro de masa del disco está a una distancia de 0.25 m del punto *O*. Entonces,

$$m_d = \rho_d V_d = 8000\ \text{kg/m}^3[\pi(0.25\ \text{m})^2(0.01\ \text{m})] = 15.71\ \text{kg}$$

$$(I_d)_O = \tfrac{1}{2}m_d r_d^2 + m_d d^2$$

$$= \frac{1}{2}(15.71\ \text{kg})(0.25\ \text{m})^2 + (15.71\ \text{kg})(0.25\ \text{m})^2$$

$$= 1.473\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

***Agujero.*** Para el disco (agujero) de 125 mm de radio, tenemos

$$m_h = \rho_h V_h = 8000\ \text{kg/m}^3[\pi(0.125\ \text{m})^2(0.01\ \text{m})] = 3.93\ \text{kg}$$

$$(I_h)_O = \tfrac{1}{2}m_h r_h^2 + m_h d^2$$

$$= \frac{1}{2}(3.93\ \text{kg})(0.125\ \text{m})^2 + (3.93\ \text{kg})(0.25\ \text{m})^2$$

$$= 0.276\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

El momento de inercia de la placa con respecto al punto *O* es, por tanto,

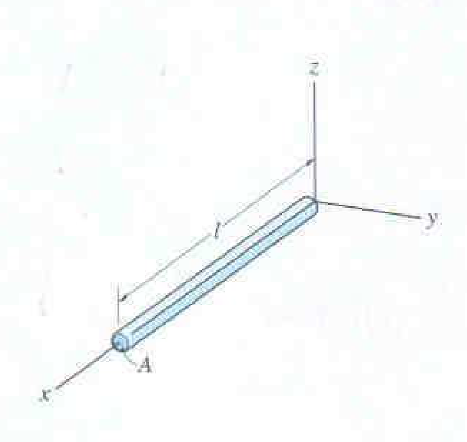
$$I_O = (I_d)_O - (I_h)_O$$

$$= 1.473\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 - 0.276\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$$

$$= 1.20\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

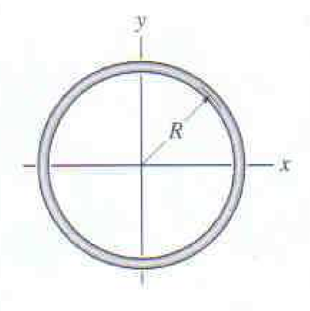
# PROBLEMAS

**17-1.** Determine el momento de inercia $I_y$ para la barra esbelta. La densidad $\rho$ y el área transversal $A$ de la barra son constantes. Exprese el resultado en términos de la masa total $m$ de la barra.



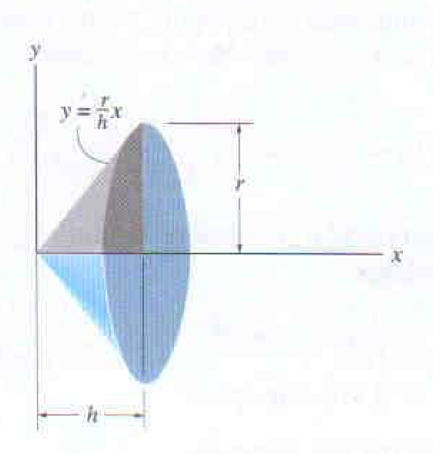

Prob. 17–1

**17-2.** Determine el momento de inercia del anillo delgado con respecto al eje $z$. El anillo tiene masa $m$.



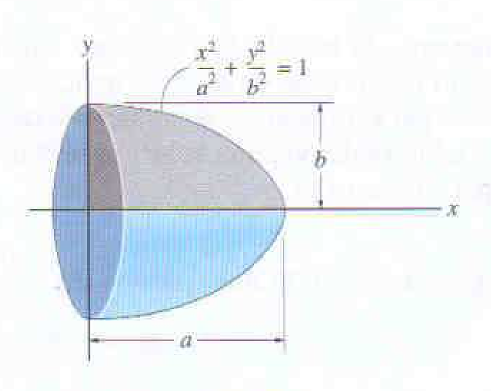

Prob. 17–2

**17-3.** El cono circular recto se forma girando el área sombreada alrededor del eje $x$. Determine el momento de inercia $I_x$ y exprese el resultado en términos de la masa total $m$ del cono. El cono tiene densidad constante $\rho$.



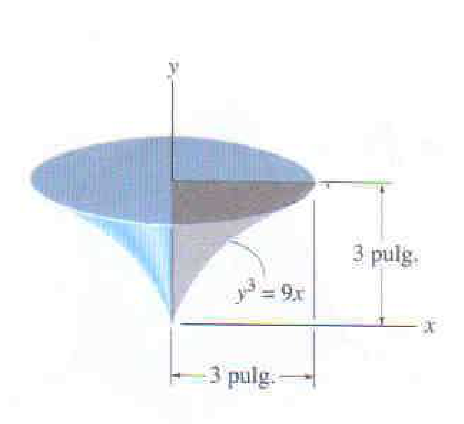

Prob. 17–3

*17-4. Un semielipsoide es formado girando el área sombreada con respecto al eje $x$. Determine el momento de inercia de este sólido con respecto al eje $x$ y exprese el resultado en términos de su masa $m$. El material tiene densidad constante $\rho$.



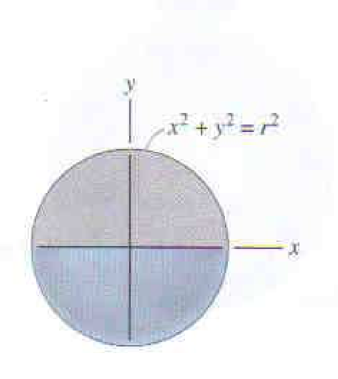

Prob. 17–4

**17-5.** El sólido se forma girando el área sombreada con respecto al eje $y$. Determine el radio de giro $k_y$. El peso específico del material es $\gamma = 380$ lb/pie$^3$.



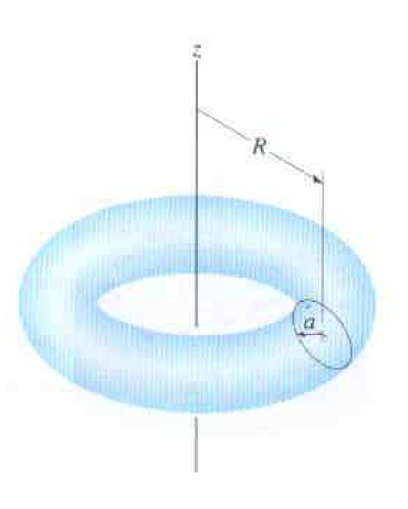

Prob. 17-5

**17-6.** La esfera se forma girando el área sombreada con respecto al eje $x$. Determine el momento de inercia $I_x$ y exprese el resultado en términos de la masa total $m$ de la esfera. El material tiene densidad constante $\rho$.




Prob. 17-6

**17-7.** Determine el momento de inercia $I_z$ del toro. La masa del toro es $m$ y la densidad $\rho$ es constante. *Sugerencia*: Use un elemento tipo cascarón.



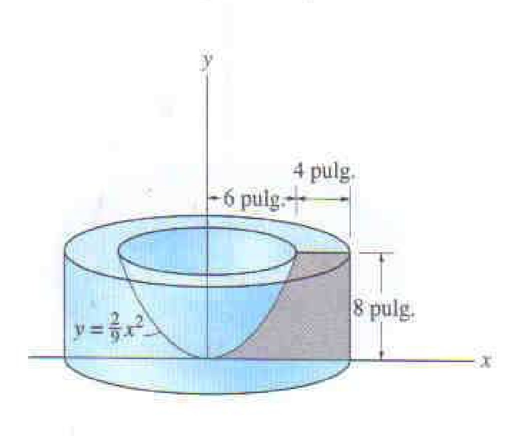

Prob. 17-7

***17-8.** El cilindro sólido tiene radio exterior $R$, altura $h$, y está hecho con un material que tiene una densidad que varía desde su centro según $\rho = k + ar^2$, donde $k$ y $a$ son constantes. Determine la masa del cilindro y su momento de inercia con respecto al eje $z$.



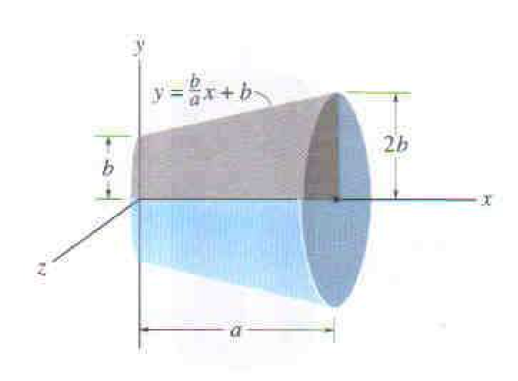

Prob. 17-8

**17-9.** El molde de concreto se forma girando el área sombreada con respecto al eje $y$. Determine el momento de inercia $I_y$. El peso específico del concreto es $\gamma = 150\ \text{lb/pie}^3$.



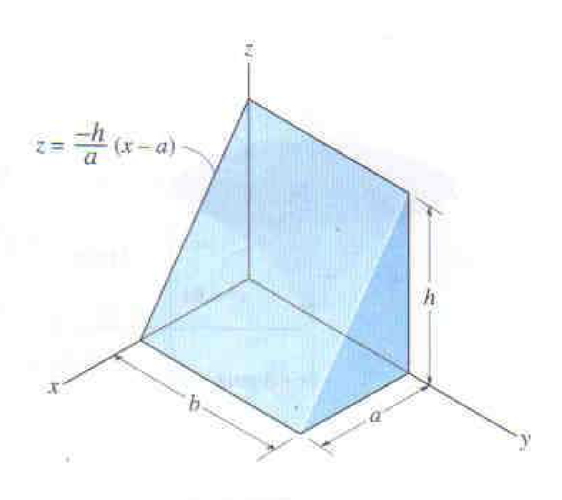

Prob. 17–9

**17-10.** El cono truncado se forma girando el área sombreada alrededor del eje $x$. Determine su momento de inercia $I_x$ y exprese el resultado en términos de la masa total $m$. El cono truncado tiene densidad constante.




Prob. 17–10

**17-11.** Determine el momento de inercia del prisma triangular homogéneo con respecto al eje $y$. Exprese el resultado en términos de la masa $m$ del prisma. *Sugerencia:* Para la integración, use elementos de placa delgada paralelos al plano $x-y$ con espesor $dz$.




Prob. 17–11

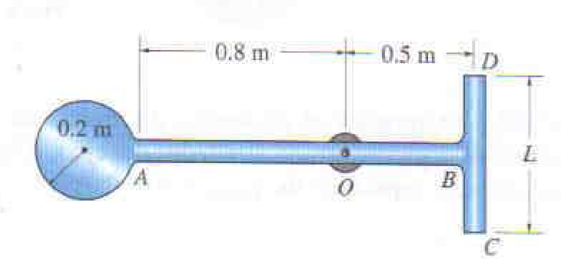
***17-12.** Determine el momento de inercia del conjunto con respecto a un eje que es perpendicular a la página y pasa por el punto $O$. El material tiene un peso específico $\gamma = 90\ \text{lb/pie}^3$.

O
1 pie
G
2 pies
0.25 pies
0.5 pies
1 pie

Prob. 17–12

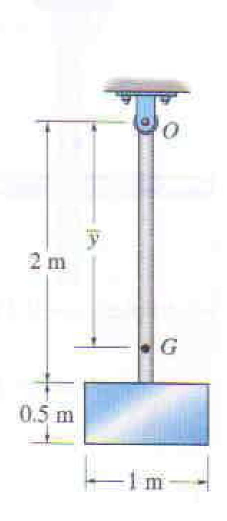
**17-13.** El conjunto consta de un disco con masa de 6 kg y las barras esbeltas $AB$ y $DC$ que tienen masa de 2 kg/m. Determine la longitud $L$ de $DC$ de manera que el centro de masa esté en la chumacera $O$. ¿Cuál es el momento de inercia del conjunto con respecto a un eje perpendicular a la página y que pase por $O$?

**17-14.** El conjunto consta de un disco con masa de 6 kg y las barras esbeltas $AB$ y $DC$ que tienen masa de 2 kg/m. Si $L = 0.75$ m, determine el momento de inercia del conjunto con respecto a un eje perpendicular a la página y que pase por $O$.



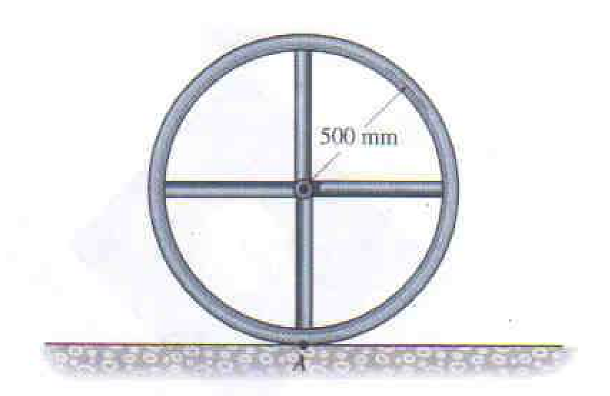

**Probs. 17–13/14**

***17-16.** El péndulo consta de la barra esbelta de 3 kg y la placa delgada de 5 kg. Determine la ubicación $\bar{y}$ del centro de masa $G$ del péndulo; luego calcule el momento de inercia del péndulo con respecto a un eje perpendicular a la página y que pase por $G$.



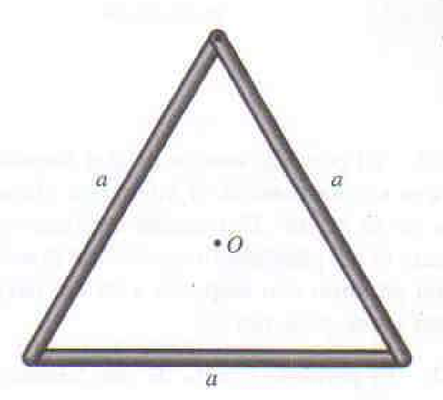

**Prob. 17–16**

**17-15.** La rueda consta de un anillo delgado con masa de 10 kg y cuatro rayos hechos de barras esbeltas con masa de 2 kg cada una. Determine el momento de inercia de la rueda con respecto a un eje perpendicular a la página y que pase por el punto $A$.



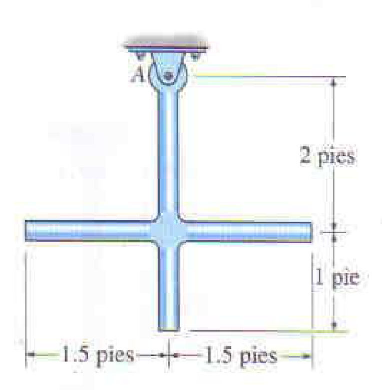

**Prob. 17–15**

**17-17.** Cada una de las tres barras tiene masa $m$. Determine el momento de inercia del conjunto con respecto a un eje que es perpendicular a la página y pasa por el punto central $O$.




**Prob. 17–17**

**17-18.** Las barras esbeltas tienen peso de 3 lb/pie. Determine el momento de inercia del conjunto con respecto a un eje perpendicular a la página y que atraviese por el pasador instalado en $A$.




Prob. 17–18

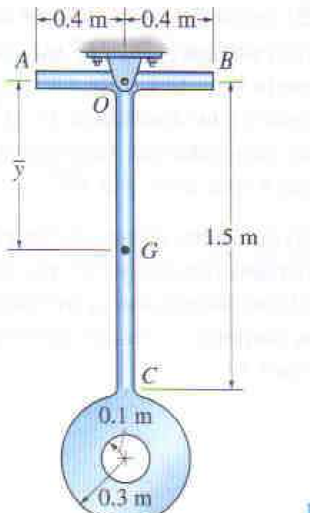
**17-19.** El péndulo consta de una placa con peso de 12 lb y una barra esbelta con peso de 4 lb. Determine el radio de giro del péndulo con respecto a un eje perpendicular a la página que pase por el punto $O$.




Prob. 17–19

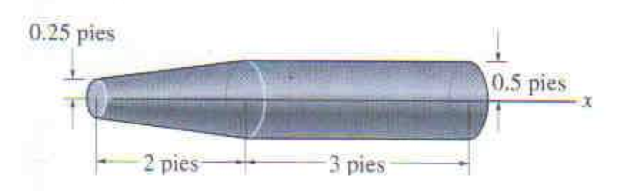
***17-20.** El péndulo consta de dos barras esbeltas $AB$ y $OC$ que tienen masa de 3 kg/m. La placa delgada tiene masa de 12 kg/m$^2$. Determine la ubicación $\bar{y}$ del centro de masa $G$ del péndulo, luego calcule el momento de inercia del péndulo con respecto a un eje perpendicular a la página y que pase por $G$.

**17-21.** El péndulo consta de dos barras delgadas $AB$ y $OC$ que tienen masa de 3 kg/m. La placa delgada tiene masa de 12 kg/m$^2$. Determine el momento de inercia del péndulo con respecto a un eje perpendicular a la página y que atraviese el pasador instalado en O.



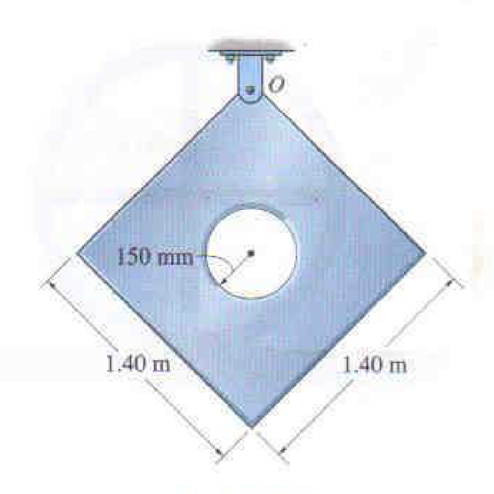

Probs. 17–20/21

**17-22.** Determine el momento de inercia de la pieza sólida de acero mostrada alrededor del eje $x$. El acero tiene un peso específico de $\gamma_{acero} = 490$ lb/pie$^3$.




Prob. 17–22

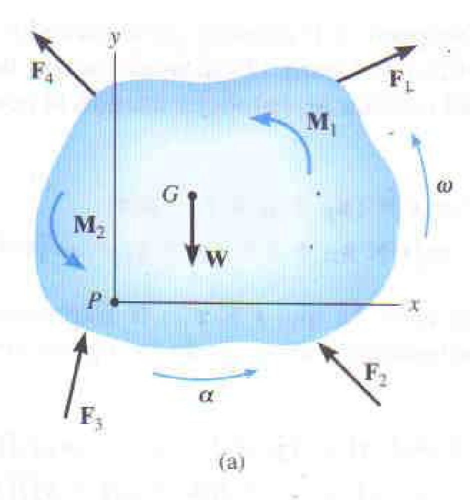
**17-23.** Determine el momento de inercia con respecto a un eje perpendicular a la página y que atraviese el pasador instalado en $O$. La placa delgada tiene un agujero en su centro. Su espesor es de 50 mm, y el material tiene densidad $\rho = 50$ kg/m$^3$.




Prob. 17–23

## 17.2 Ecuaciones cinéticas de movimiento plano

En el siguiente análisis limitaremos nuestro estudio de cinética plana a cuerpos rígidos que, junto con sus cargas, son considerados *simétricos* con respecto a un plano de referencia fijo.* En este caso, la trayectoria del movimiento de cada partícula del cuerpo es una curva plana paralela a un plano de referencia fijo. Como el movimiento del cuerpo puede ser visto dentro del plano de referencia, todas las fuerzas (y momentos de par) que actúan sobre el cuerpo pueden ser proyectadas entonces en el plano. Un ejemplo de un cuerpo arbitrario de este tipo se muestra en la figura 17-8*a*. Aquí el *marco de referencia inercial x, y, z* tiene su origen *coincidiendo* con el punto arbitrario *P* en el cuerpo. Por definición, *estos ejes no giran, y están fijos o se trasladan con velocidad constante.*




(a)

Fig. 17-8

**Ecuaciones de movimiento traslacional.** Las fuerzas externas mostradas en el cuerpo de la figura 17-8*a* representan el efecto de fuerzas gravitatorias, eléctricas, magnéticas o de contacto entre cuerpos adyacentes. Como este sistema de fuerzas ha sido considerado previamente en la sección 13.3 para el análisis de un sistema de partículas, la ecuación 13-6 resultante puede ser usada aquí, en cuyo caso

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$$

Esta ecuación se llama *ecuación de movimiento traslacional* para el centro de masa de un cuerpo rígido. Establece que *la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo es igual a la masa del cuerpo multiplicada por la aceleración de su centro de masa G.*

Para movimiento del cuerpo en el plano $x-y$, la ecuación del movimiento traslacional puede ser escrita en la forma de dos ecuaciones escalares independientes, que son

$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$
$$\Sigma F_y = m(a_G)_y$$

*Haciendo esto, la ecuación del movimiento rotatorio se reduce a una forma algo simplificada. El caso más general de forma y carga del cuerpo es considerado en el capítulo 21.

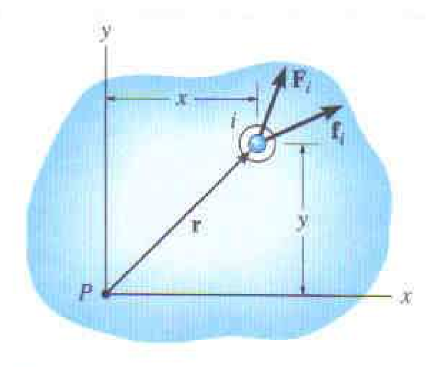



Diagrama de cuerpo libre de una partícula

(b)

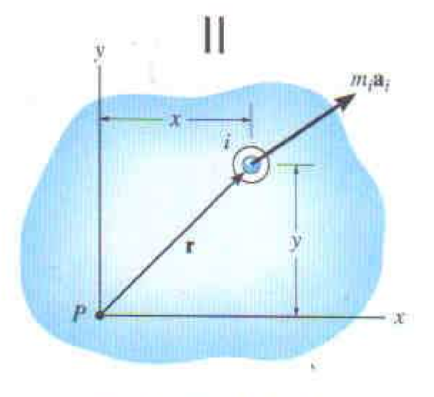
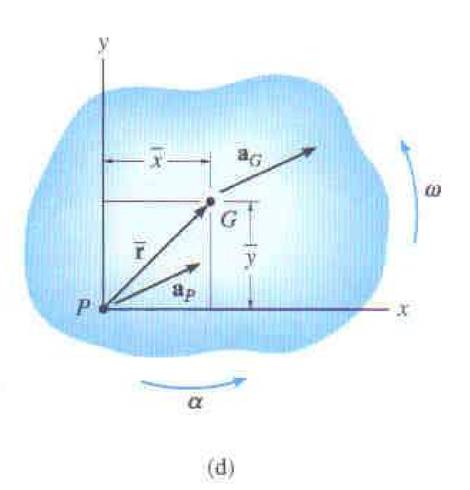



Diagrama cinético de una partícula

(c)




(d)

Fig. 17–8

**Ecuación de movimiento rotatorio.** Determinaremos ahora los efectos causados por los momentos del sistema de fuerzas externas calculados con respecto a un eje perpendicular al plano del movimiento (el eje $z$) que pasa por el punto $P$. Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre de la partícula $i$-ésima, figura 17-8$b$, $\mathbf{F}_i$, representa la *fuerza resultante externa* que actúa sobre la partícula, y $\mathbf{f}_i$ es la *resultante de las fuerzas internas* causadas por interacciones con partículas adyacentes. Si la partícula tiene masa $m_i$, y en el instante considerado su aceleración es $\mathbf{a}_i$, entonces el diagrama cinético es construido como se muestra en la figura 17-8$c$. Si los momentos de las fuerzas que actúan sobre la partícula son sumados con respecto al punto $P$, requerimos que

$$\mathbf{r} \times \mathbf{F}_i + \mathbf{r} \times \mathbf{f}_i = \mathbf{r} \times m_i\mathbf{a}_i$$

o bien

$$(\mathbf{M}_P)_i = \mathbf{r} \times m_i\mathbf{a}_i$$

Los momentos con respecto a $P$ pueden ser expresados en términos de la aceleración del punto $P$, figura 17-8$d$. Si el cuerpo tiene aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ y velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, entonces, usando la ecuación 16-18, tenemos

$$\begin{aligned}(\mathbf{M}_P)_i &= m_i\mathbf{r} \times (\mathbf{a}_P + \alpha \times \mathbf{r} - \omega^2\mathbf{r}) \\ &= m_i[\mathbf{r} \times \mathbf{a}_P + \mathbf{r} \times (\boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}) - \omega^2(\mathbf{r} \times \mathbf{r})]\end{aligned}$$

El último término es cero, ya que $\mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$. Expresando los vectores con componentes cartesianas y efectuando las operaciones de producto cruz obtenemos

$$\begin{aligned}(M_P)_i\mathbf{k} &= m_i\{(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \times [(a_P)_x\mathbf{i} + (a_P)_y\mathbf{j}] \\ &\quad + (x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \times [\alpha\mathbf{k} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})]\} \\ (M_P)_i\mathbf{k} &= m_i[-y(a_P)_x + x(a_P)_y + \alpha x^2 + \alpha y^2]\mathbf{k} \\ \circlearrowleft (M_P)_i &= m_i[-y(a_P)_x + x(a_P)_y + \alpha r^2]\end{aligned}$$

Haciendo $m_i \rightarrow dm$ e integrando con respecto a toda la masa $m$ del cuerpo, obtenemos la ecuación resultante de momento

$$\circlearrowleft \Sigma M_P = -\left(\int_m y\, dm\right)(a_P)_x + \left(\int_m x\, dm\right)(a_P)_y + \left(\int_m r^2\, dm\right)\alpha$$

Aquí $\Sigma M_P$ representa sólo el momento de las *fuerzas externas* que actúan sobre el cuerpo con respecto al punto $P$. El momento resultante de las fuerzas internas es cero, ya que para todo el cuerpo esas fuerzas ocurren en pares iguales, colineales y opuestos, por lo que el momento de cada par de fuerzas con respecto a $P$ se cancela. Las integrales en los términos primero y segundo del lado derecho se usan para localizar el centro de masa $G$ del cuerpo con respecto a $P$, ya que $\bar{y}m = \int y\, dm$ y $\bar{x}m = \int x\, dm$, figura 17-8$d$. La última integral representa el momento de inercia del cuerpo calculado con respecto al eje $z$, esto es $I_P = \int r^2 dm$. Así,

$$\circlearrowleft \Sigma M_P = -\bar{y}m(a_P)_x + \bar{x}m(a_P)_y + I_P\alpha \qquad (17\text{–}6)$$

Es posible reducir esta ecuación a una forma más simple si el punto $P$ coincide con el centro de masa $G$ para el cuerpo. Si este es el caso, entonces $\bar{x} = \bar{y} = 0$, y por tanto*

$$\Sigma M_G = I_G\alpha \qquad (17\text{-}7)$$

*Esta ecuación de movimiento rotatorio establece que la suma de los momentos de todas las fuerzas externas calculadas con respecto al centro de masa G es igual al producto del momento de inercia del cuerpo con respecto a un eje que pase por G y la aceleración angular del cuerpo.*

La ecuación 17-6 también puede ser reescrita en términos de las componentes $x$ y $y$ de $\mathbf{a}_G$ y del momento de inercia $I_G$ del cuerpo. Si el punto $G$ está ubicado en el punto $(\bar{x}, \bar{y})$, figura 17-8*d*, entonces, por el teorema de los ejes paralelos, $I_p = I_G + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)$. Sustituyendo en la ecuación 17-6 y reordenando términos, obtenemos

$$\circlearrowright\Sigma M_P = \bar{y}m[-(a_P)_x + \bar{y}\alpha] + \bar{x}m[(a_P)_y + \bar{x}\alpha] + I_G\alpha \qquad (17\text{-}8)$$

A partir del diagrama cinemático de la figura 17-8*d*, $\mathbf{a}_P$ puede ser expresada en términos de $\mathbf{a}_G$ como

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_P + \boldsymbol{\alpha} \times \bar{\mathbf{r}} - \omega^2\bar{\mathbf{r}}$$

$$(a_G)_x\mathbf{i} + (a_G)_y\mathbf{j} = (a_P)_x\mathbf{i} + (a_P)_y\mathbf{j} + \alpha\mathbf{k} \times (\bar{x}\mathbf{i} + \bar{y}\mathbf{j}) - \omega^2(\bar{x}\mathbf{i} + \bar{y}\mathbf{j})$$

Efectuando los productos cruz e igualando las respectivas componentes **i** y **j** resultan las dos ecuaciones escalares

$$(a_G)_x = (a_P)_x - \bar{y}\alpha - \bar{x}\omega^2$$
$$(a_G)_y = (a_P)_y + \bar{x}\alpha - \bar{y}\omega^2$$

A partir de estas ecuaciones, $[-(a_P)_x + \bar{y}\alpha] = [-(a_G)_x - \bar{x}\omega^2]$ y $[(a_P)_y + \bar{x}\alpha] = [(a_G)_y + \bar{y}\omega^2]$. Sustituyendo estos resultados en la ecuación 17-8 y simplificando obtenemos

$$\circlearrowright\Sigma M_P = -\bar{y}m(a_G)_x + \bar{x}m(a_G)_y + I_G\alpha \qquad (17\text{-}9)$$

*Este importante resultado indica que cuando los momentos de las fuerzas externas mostradas en el diagrama de cuerpo libre son sumados con respecto al punto P, figura 17-8e, resultan ser equivalentes a la suma de los "momentos cinéticos" de las componentes de $m\mathbf{a}_G$ con respecto a P más el "momento cinético" de $I_G\boldsymbol{\alpha}$, figura 17-8f.* En otras palabras, cuando son calculados los "momentos cinéticos", $\Sigma(\mathcal{M}_k)_P$, figura 17-8*f*, los vectores $m(\mathbf{a}_G)_x$ y $m(\mathbf{a}_G)_y$ son tratados como vectores deslizables; esto es, pueden actuar en *cualquier punto a lo largo de su línea de acción*. De manera similar, $I_G\boldsymbol{\alpha}$ puede ser tratado como un vector libre y puede, por tanto, actuar en *cualquier punto. Es importante recordar que $m\mathbf{a}_G$ e $I_G\boldsymbol{\alpha}$ no son lo mismo que una fuerza o un momento de par, sino que son causados por los efectos externos de fuerzas y momentos de par que están actuando sobre el cuerpo.* Con esto en mente podemos escribir la ecuación 17-9 en una forma más general como

$$\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P \qquad (17\text{-}10)$$

*También $\Sigma M_P = I_P\alpha$ se reduce a esta misma forma simple cuando el punto $P$ es un punto fijo (vea la ecuación 17-16) o la aceleración del punto P está dirigida a lo largo de la línea $PG$.

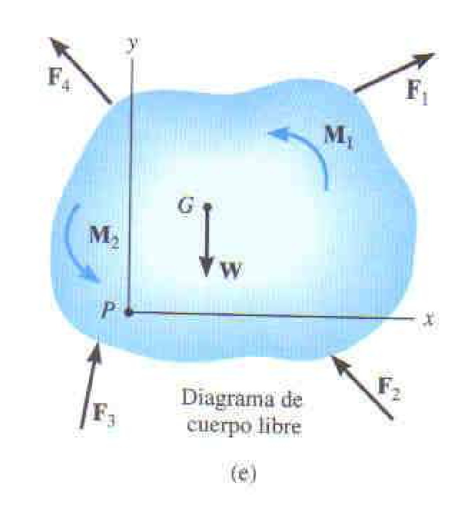


Diagrama de cuerpo libre

(e)

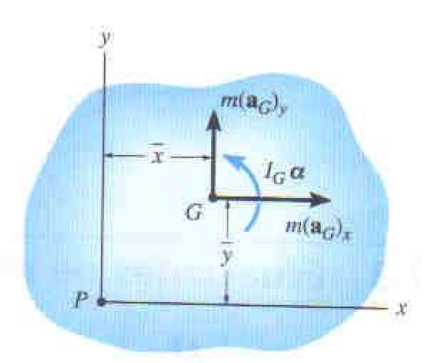


Diagrama cinético

(f)

**Fig. 17-8**

**Aplicación general de las ecuaciones de movimiento.** Para resumir este análisis, pueden escribirse *tres* ecuaciones escalares independientes para describir el movimiento plano general de un cuerpo rígido simétrico.

$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$
$$\Sigma F_y = m(a_G)_y$$
$$\Sigma M_G = I_G\alpha \quad \text{o} \quad \Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P \qquad (17\text{–}11)$$

Al aplicar estas ecuaciones, *siempre* se deberá dibujar un diagrama de cuerpo libre, figura 17-8*e*, con la finalidad de tomar en cuenta los términos implicados en $\Sigma F_x$, $\Sigma F_y$, $\Sigma M_G$ o $\Sigma M_P$. En algunos problemas también puede ser útil dibujar el *diagrama cinético* para el cuerpo. Este diagrama toma en cuenta gráficamente los términos $m(\mathbf{a}_G)_x$, $m(\mathbf{a}_G)_y$ e $I_G\boldsymbol{\alpha}$, y es especialmente conveniente cuando se usa para determinar las componentes de $m\mathbf{a}_G$ y los términos de momento en $\Sigma(\mathcal{M}_k)_P$.*

## 17.3 Ecuaciones de movimiento: Traslación

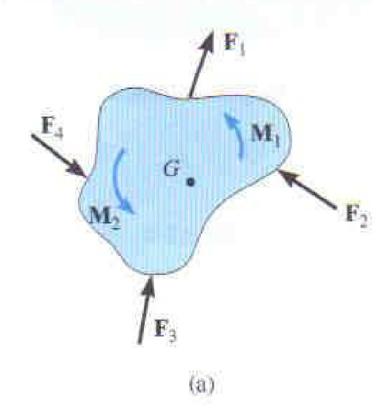



Fig. 17-9

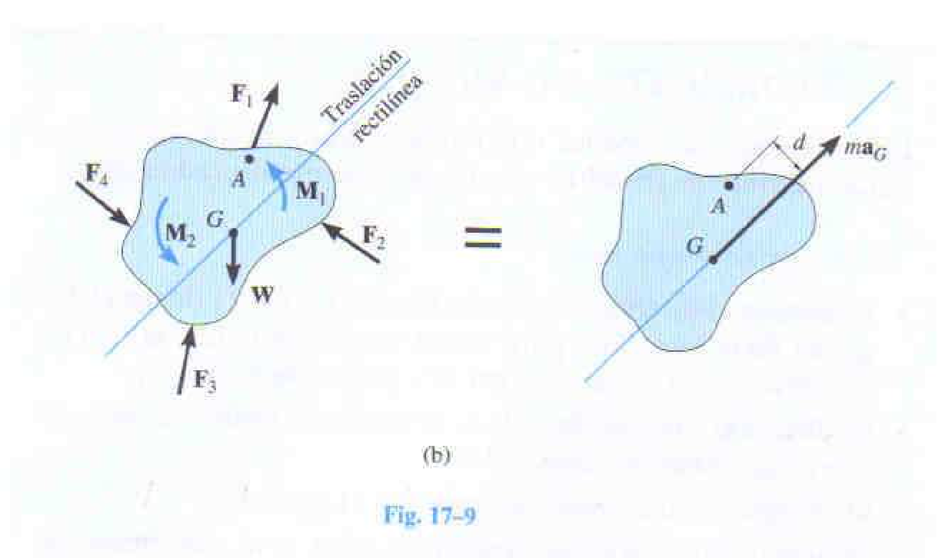
Cuando un cuerpo rígido experimenta una *traslación*, figura 17-9*a*, todas sus partículas tienen la *misma aceleración*, de modo que $\mathbf{a}_G = \mathbf{a}$. Además, $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, en cuyo caso la ecuación de movimiento rotatorio aplicada al punto $G$ se reduce a una forma simplificada, esto es, $\Sigma M_G = 0$. La aplicación de ésta y de las ecuaciones de movimiento traslacional será analizada ahora para cada uno de los dos tipos de traslación.

**Traslación rectilínea.** Cuando un cuerpo está sometido a *traslación rectilínea*, todas sus partículas viajan a lo largo de trayectorias paralelas de línea recta. Los diagramas de cuerpo libre y cinético se muestran en la figura 17-9*b*. Como $I_G\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$, sólo $m\mathbf{a}_G$ se muestra en el diagrama cinético. Por consiguiente, las ecuaciones de movimiento que se aplican en este caso son

$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$
$$\Sigma F_y = m(a_G)_y \qquad (17\text{–}12)$$
$$\Sigma M_G = 0$$

La última ecuación requiere que la suma de los momentos de todas las fuerzas externas (y momentos de par) calculados con respecto al centro de masa del cuerpo sea igual a cero. Por supuesto, es posible sumar momentos con respecto a otros puntos sobre y fuera del cuerpo, en cuyo ca-

*Por esta razón, el diagrama cinético será usado en la solución de un ejemplo problema siempre que $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$ sea aplicada.




(b)

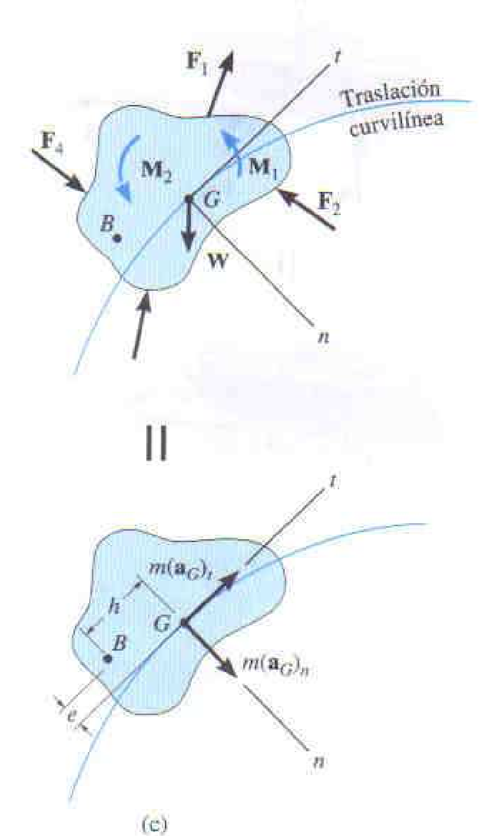
Fig. 17-9

so el momento de $m\mathbf{a}_G$ debe tomarse en cuenta. Por ejemplo, si se elige el punto $A$, que se encuentra a una distancia $d$ de la línea de acción de $m\mathbf{a}_G$, es aplicable la siguiente ecuación de momento:

$$\circlearrowright + \Sigma M_A = \Sigma(\mathcal{M}_k)_A; \qquad \Sigma M_A = (ma_G)d$$

Aquí la suma de momentos de las fuerzas externas y momentos de par con respecto a $A$ ($\Sigma M_A$, diagrama de cuerpo libre) es igual al momento de $m\mathbf{a}_G$ con respecto a $A$ ($\Sigma(\mathcal{M}_k)_A$, diagrama cinético).

**Traslación curvilínea.** Cuando un cuerpo rígido está sometido a *traslación curvilínea*, todas sus partículas viajan por *trayectorias paralelas curvas*. Para el análisis, a menudo es conveniente usar un sistema coordenado inercial con origen coincidente con el centro de masa del cuerpo en el instante considerado, y ejes orientados en las direcciones normal y tangencial a la trayectoria del movimiento, figura 17-9*c*. Las tres ecuaciones escalares de movimiento son entonces




(c)

$$\begin{aligned} \Sigma F_n &= m(a_G)_n \\ \Sigma F_t &= m(a_G)_t \\ \Sigma M_G &= 0 \end{aligned} \qquad (17\text{–}13)$$

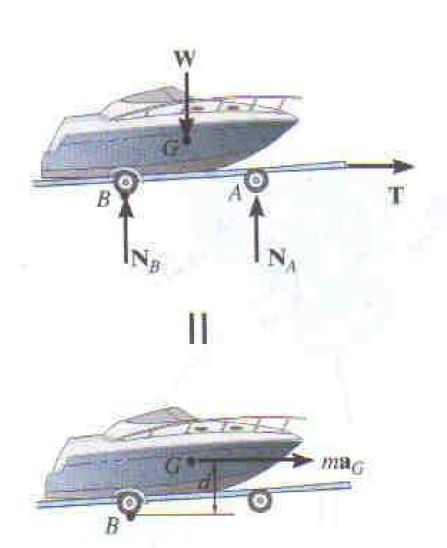
Aquí $(a_G)_t$ y $(a_G)_n$ representan, respectivamente, las magnitudes de las componentes de aceleración tangencial y normal del punto $G$.

Si la ecuación de momento $\Sigma M_G = 0$ es reemplazada por una suma de momentos con respecto al punto arbitrario $B$, figura 17-9*c*, es necesario tomar en cuenta los momentos, $\Sigma(\mathcal{M}_k)_B$, de las dos componentes $m(\mathbf{a}_G)_n$ y $m(\mathbf{a}_G)_t$ con respecto a este punto. A partir del diagrama cinético, $h$ y $e$ representan las distancias perpendiculares (o "brazos de momento") desde $B$ hasta las líneas de acción de las componentes. Por tanto, la ecuación de momento requerida se convierte en

$$\circlearrowright + \Sigma M_B = \Sigma(\mathcal{M}_k)_B; \qquad \Sigma M_B = e[m(a_G)_t] - h[m(a_G)_n]$$



Los diagramas de cuerpo libre y cinético para este bote y remolque son dibujados primero con el propósito de aplicar las ecuaciones de movimiento. Aquí las fuerzas señaladas en el diagrama de cuerpo libre causan el efecto mostrado en el diagrama cinético. Si los momentos son sumados con respecto al centro de masa, $G$, entonces $\Sigma M_G = 0$. Sin embargo, si los momentos son sumados con respecto al punto $B$, entonces $\curvearrowleft + \Sigma M_B = ma_G(d)$.




## PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

Los problemas de cinética que implican *traslación* de un cuerpo rígido pueden ser resueltos usando el siguiente procedimiento.

### *Diagrama de cuerpo libre.*

- Establezca el sistema coordenado inercial $x, y$ o $n, t$ y dibuje el diagrama de cuerpo libre para tomar en cuenta todas las fuerzas externas y los momentos de par que actúan sobre el cuerpo.
- La dirección y el sentido de la aceleración del centro de masa del cuerpo $\mathbf{a}_G$ deben ser establecidos.
- Identifique las incógnitas presentes en el problema.
- Si en la solución se decide usar la ecuación de movimiento rotatorio $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$, entonces considere dibujar el diagrama cinético, ya que toma en cuenta gráficamente las componentes $m(\mathbf{a}_G)_x$, $m(\mathbf{a}_G)_y$ o $m(\mathbf{a}_G)_t$, $m(\mathbf{a}_G)_n$ y es, por tanto, conveniente para "visualizar" los términos necesarios en la suma de momentos $\Sigma(\mathcal{M}_k)_P$.

### *Ecuaciones de movimiento.*

- Aplique las tres ecuaciones de movimiento de acuerdo con la convención de signos establecida.
- Para simplificar el análisis, la ecuación de momento $\Sigma M_G = 0$ puede ser reemplazada por la ecuación más general $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$, donde usualmente el punto $P$ está ubicado en la intersección de las líneas de acción de tantas fuerzas desconocidas como es posible.
- Si el cuerpo está en contacto con una *superficie rugosa* y ocurre deslizamiento, use la ecuación de fricción $F = \mu_k N$. Recuerde que $\mathbf{F}$ siempre actúa sobre el cuerpo oponiéndose al movimiento del cuerpo con relación a la superficie de contacto.

### *Cinemática.*

- Use cinemática cuando la velocidad y la posición del cuerpo deban ser determinadas.
- Para *traslación rectilínea* con *aceleración variable*, use $a_G = dv_G/dt$ $a_G ds_G = v_G dv_G$ $v_G = ds_G/dt$
- Para *traslación rectilínea* con *aceleración constante*, use

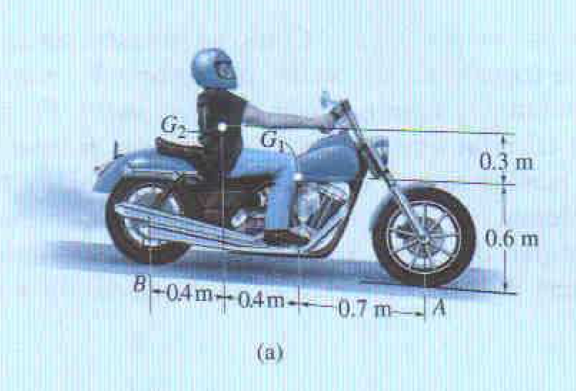
$$v_G = (v_G)_0 + a_G t \qquad v_G^2 = (v_G)_0^2 + 2a_G[s_G - (s_G)_0]$$
$$s_G = (s_G)_0 + (v_G)_0 t + \tfrac{1}{2}a_G t^2$$

- Para *traslación curvilínea*, use $(a_G)_n = v_G^2/\rho = \omega^2\rho$, $(a_G)_t = dv_G/dt$, $(a_G)_t ds_G = v_G dv_G$, $(a_G)_t = \alpha\rho$

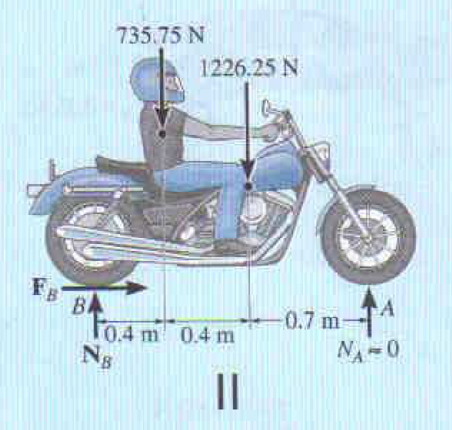
## EJEMPLO 17.6

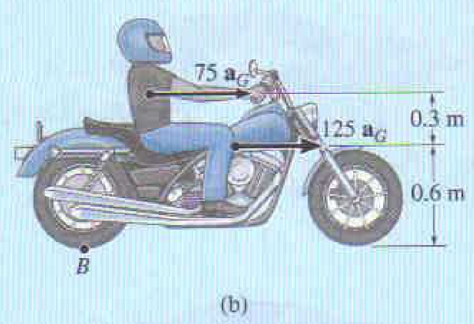
La motocicleta mostrada en la figura 17-11*a* tiene masa de 125 kg y centro de masa en $G_1$, en tanto que el motociclista tiene masa de 75 kg y centro de masa en $G_2$. Determine el coeficiente mínimo de fricción estática necesario entre las ruedas y el pavimento para que el pasajero pueda levantar la rueda frontal como se muestra en la fotografía. ¿Qué aceleración es necesaria para hacer esto? Desprecie la masa de las ruedas y suponga que la rueda frontal puede rodar libremente.






(a)




(b)

**Fig. 17-11**

### Solución

***Diagramas de cuerpo libre y cinético.*** En este problema consideraremos a la motocicleta y al motociclista como el "sistema" por analizar. Es posible determinar primero la ubicación del centro de masa para este "sistema" usando las ecuaciones $\bar{x} = \Sigma\tilde{x}m/\Sigma m$ y $\bar{y} = \Sigma\tilde{y}m/\Sigma m$. Sin embargo, aquí consideraremos el peso y la masa por separado de cada una de sus *partes componentes* como se muestra en los diagramas de cuerpo libre y cinético, figura 17-11*b*. Ambas partes se mueven con *la misma* aceleración y hemos supuesto que la rueda frontal está *a punto* de dejar el suelo, por lo que la reacción normal $N_A \approx 0$. Las tres incógnitas en el problema son $N_B$, $F_B$ y $a_G$.

***Ecuaciones de movimiento.***

$$\overset{+}{\rightarrow}\Sigma F_x = m(a_G)_x; \qquad F_B = (75\text{ kg} + 125\text{ kg})a_G \qquad (1)$$

$$+\uparrow\Sigma F_y = m(a_G)_y; \qquad N_B - 735.75\text{ N} - 1226.25\text{ N} = 0 \qquad (2)$$

$$\circlearrowleft+\Sigma M_B = \Sigma(\mathcal{M}_k)_B; \quad -(735.75\text{ N})(0.4\text{ m}) - (1226.25\text{ N})(0.8\text{ m}) = -(75\text{ kg }a_G)(0.9\text{ m}) - (125\text{ kg }a_G)(0.6\text{ m})$$

Resolviendo,

$$a_G = 8.95\text{ m/s}^2 \rightarrow \qquad \textit{Resp.}$$

$$N_B = 1962\text{ N}$$

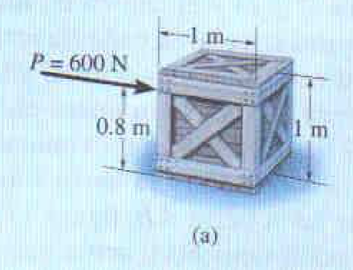
$$F_B = 1790\text{ N}$$

Así, el coeficiente mínimo de fricción estática es

$$(\mu_s)_{\text{mín}} = \frac{F_B}{N_B} = \frac{1790\text{ N}}{1962\text{ N}} = 0.912 \qquad \textit{Resp.}$$

## EJEMPLO 17.7

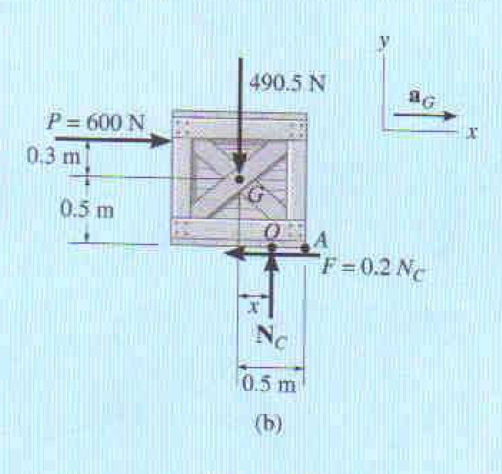
Una caja uniforme de 50 kg descansa sobre una superficie horizontal para la cual el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.2$. Determine la aceleración de la caja si se le aplica una fuerza $P = 600$ N como se muestra en la figura 17-12*a*.




(a)

### Solución

***Diagrama de cuerpo libre.*** La fuerza **P** puede causar que la caja se deslice o se vuelque. Como se muestra en la figura 17-12*b*, se supone que la caja se desliza, de manera que $F = \mu_k N_C = 0.2\ N_C$. Además, la fuerza resultante normal $\mathbf{N}_C$ actúa en $O$, a una distancia $x$ (donde $0 < x \leq 0.5$ m) desde la línea central de la caja.* Las tres incógnitas son $N_C$, $x$ y $a_G$.




(b)

Fig. 17–12

***Ecuaciones de movimiento***

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = m(a_G)_x; \qquad 600\text{ N} - 0.2N_C = (50\text{ kg})a_G \qquad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y; \qquad N_C - 490.5\text{ N} = 0 \qquad (2)$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_G = 0; \qquad -600\text{ N}(0.3\text{ m}) + N_C(x) - 0.2N_C(0.5\text{ m}) = 0 \qquad (3)$$

Resolviendo, obtenemos

$$N_C = 490\text{ N}$$

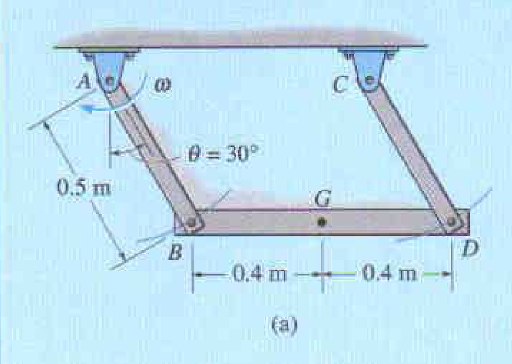
$$x = 0.467\text{ m}$$

$$a_G = 10.0\text{ m/s}^2 \rightarrow \qquad \textit{Resp.}$$

Ya que $x = 0.467$ m $< 0.5$ m, la caja se desliza como se supuso originalmente. Si la solución hubiese dado un valor de $x > 0.5$ m, el problema habría tenido que ser replanteado con la suposición de que ocurría vuelco. Si este fuese el caso, $\mathbf{N}_C$ actuaría en el *punto de esquina A* y $F \leq 0.2N_C$.

*La línea de acción de $\mathbf{N}_C$ no pasa necesariamente por el centro de masa $G$ ($x = 0$), ya que $\mathbf{N}_C$ debe contrarrestar la tendencia al vuelco causada por **P**. Vea la sección 8.1 de *Mecánica vectorial para ingenieros: Estática*.

**EJEMPLO 17.8**



(a)

La viga *BD* de 100 kg mostrada en la figura 17-13*a* está soportada por dos barras con masa insignificante. Determine la fuerza creada en cada barra en el instante $\theta = 30°$ y $\omega = 6$ rad/s.

## Solución

***Diagrama de cuerpo libre.*** La viga se mueve con *traslación curvilínea* puesto que los puntos *B* y *D* y el centro de masa *G* se mueven todos conforme a trayectorias circulares, cada trayectoria tiene el mismo radio de 0.5 m. Usando coordenadas normal y tangencial, el diagrama de cuerpo libre para la viga se muestra en la figura 17-13*b*. Debido a la *traslación*, *G* tiene el *mismo* movimiento que el pasador instalado en *B*, el cual está conectado a la barra y a la viga. Estudiando el movimiento angular de la barra *AB*, figura 17-13*c*, advierta que la componente de aceleración tangencial actúa hacia abajo y hacia la izquierda debido a la dirección de $\boldsymbol{\alpha}$ en el sentido de las manecillas del reloj. Además, la componente normal de aceleración está dirigida *siempre* hacia el centro de curvatura (hacia el punto *A* para la barra *AB*). Como la velocidad angular de *AB* es de 6 rad/s, entonces

$$(a_G)_n = \omega^2 r = (6\text{ rad/s})^2(0.5\text{ m}) = 18\text{ m/s}^2$$

Las tres incógnitas son $T_B$, $T_D$ y $(a_G)_t$. Las direcciones de $(\mathbf{a}_G)_n$ y $(\mathbf{a}_G)_t$ han sido establecidas, y están indicadas sobre los ejes coordenados.

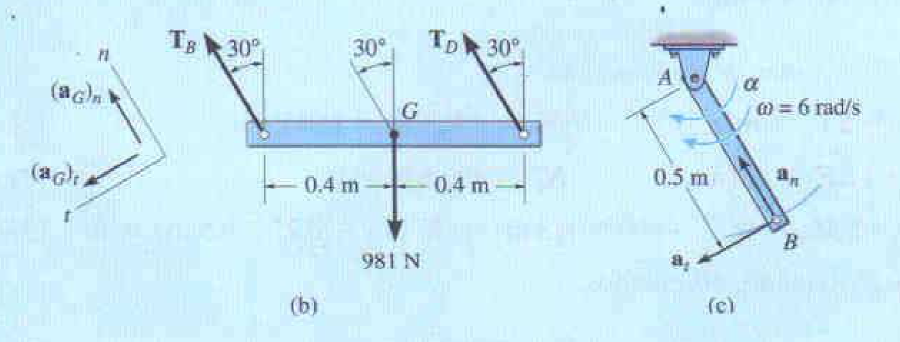



**Fig. 17-13**

***Ecuaciones de movimiento.***

$$+\nwarrow\Sigma F_n = m(a_G)_n;\quad T_B + T_D - 981\cos 30°\text{ N} = 100\text{ kg}(18\text{ m/s}^2) \quad (1)$$

$$+\swarrow\Sigma F_t = m(a_G)_t;\quad 981\text{ sen }30° = 100\text{ kg}(a_G)_t \quad (2)$$

$$\circlearrowleft+\Sigma M_G = 0;\quad -(T_B\cos 30°)(0.4\text{ m}) + (T_D\cos 30°)(0.4\text{ m}) = 0 \quad (3)$$

La solución simultánea de esas tres ecuaciones da

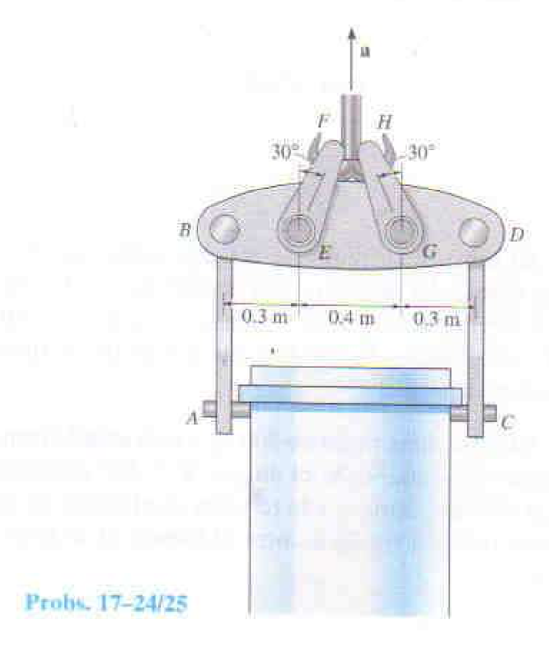
$$T_B = T_D = 1.32\text{ kN} \;\; ⦪^{30°} \qquad \textit{Resp.}$$

$$(a_G)_t = 4.90\text{ m/s}^2$$

# PROBLEMAS

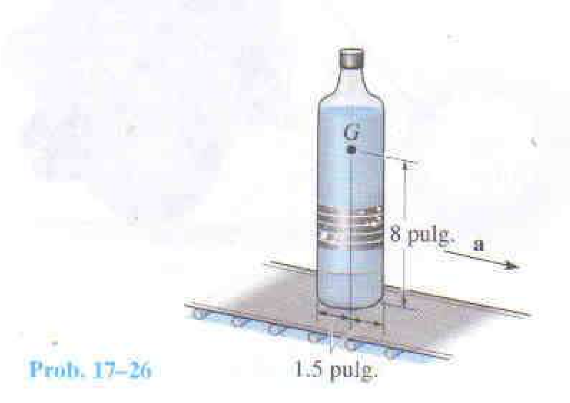
*17-24. El recipiente de 4 Mg contiene material de desperdicio nuclear cubierto de concreto. Si la masa de la viga *BD* es de 50 kg, determine la fuerza en cada uno de los eslabones *AB*, *CD*, *EF* y *GH* cuando el sistema es levantado con aceleración $a = 2\ \text{m/s}^2$ por un periodo corto.

17-25. El recipiente de 4 Mg contiene material de desperdicio nuclear cubierto de concreto. Si la masa de la viga *BD* es de 50 kg, determine la máxima aceleración vertical **a** del sistema de manera que cada uno de los eslabones *AB* y *CD* no estén sometidos a una fuerza mayor que 30 kN, y los eslabones *EF* y *GH* no estén sometidos a una fuerza mayor que 34 kN.



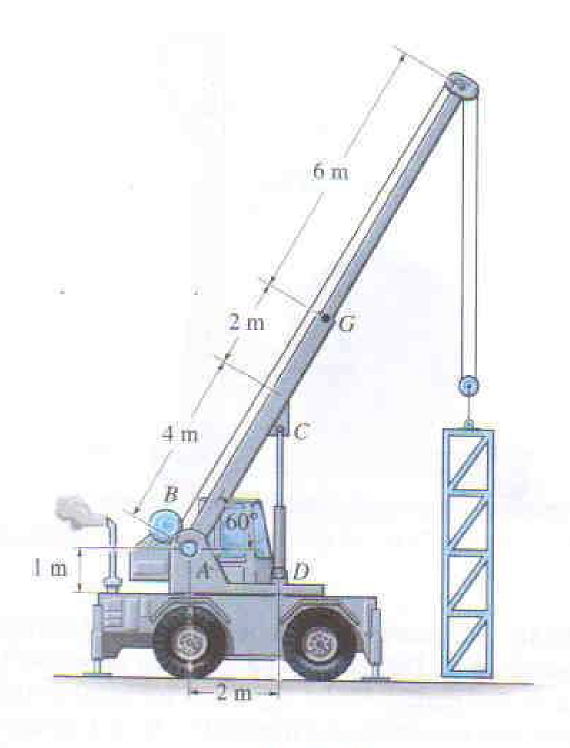

Probs. 17–24/25

17-26. La botella de 2 lb descansa sobre la banda transportadora de una tienda. Si el coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.2$, determine la máxima aceleración que la banda puede tener sin que la botella deslice o se vuelque. El centro de gravedad está en *G*.



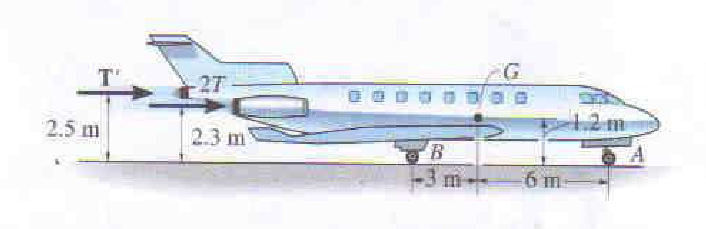

Prob. 17–26

17-27. Una pieza con masa de 8 Mg es levantada usando el sistema de aguilón y polea. Si el malacate situado en *B* jala el cable con aceleración de $2\ \text{m/s}^2$, determine la fuerza de compresión necesaria en el cilindro hidráulico para soportar el aguilón. El aguilón tiene una masa de 2 Mg y centro de masa en *G*.




Prob. 17–27

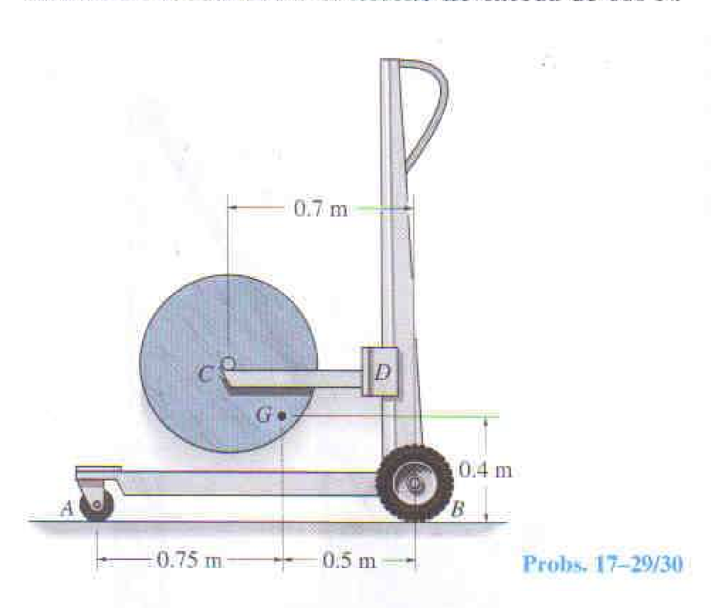
*17-28. El avión a chorro tiene una masa total de 22 Mg y centro de masa en *G*. Inicialmente, durante el despegue, los motores proporcionan un empuje de $2T = 4$ kN y $T' = 1.5$ kN. Determine la aceleración del avión y las reacciones normales sobre la rueda de la nariz y sobre cada una de las *dos* ruedas de las alas ubicadas en *B*. Desprecie la masa de las ruedas y, debido a la pequeña velocidad, desprecie cualquier levantamiento causado por las alas.




Prob. 17–28

**17-29.** El camión elevador tiene masa de 70 kg y centro de masa en $G$. Si levanta el carrete de 120 kg con una aceleración de 3 m/s$^2$, determine las reacciones de cada una de las cuatro ruedas sobre el suelo. La carga es simétrica. Desprecie la masa del brazo $CD$ móvil.

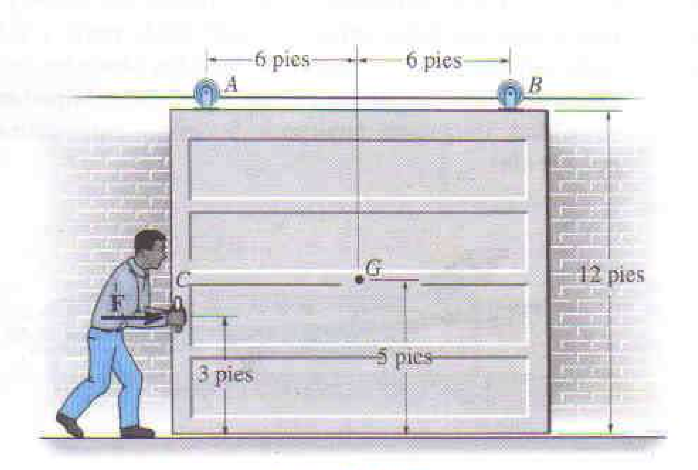
**17-30.** El camión elevador tiene masa de 70 kg y centro de masa en $G$. Determine la máxima aceleración posible hacia arriba del carrete de 120 kg de manera que la reacción de las ruedas sobre el terreno no exceda de 600 N.




Probs. 17–29/30

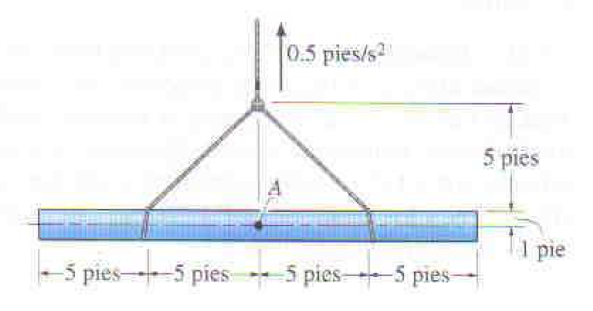
**17-31.** La puerta tiene un peso de 200 lb y centro de gravedad en $G$. Determine qué tan lejos se mueve la puerta en 2 s, partiendo del reposo, si un hombre la empuja en $C$ con una fuerza horizontal $F$ = 30 lb. Encuentre también las reacciones verticales en los rodillos $A$ y $B$.

***17-32.** La puerta tiene un peso de 200 lb y centro de gravedad en $G$. Determine la fuerza constante $F$ que debe aplicarse a la puerta para desplazarla 12 pies hacia la derecha en 5 s, partiendo del reposo. Encuentre también las reacciones verticales en los rodillos $A$ y $B$.




Probs. 17–31/32

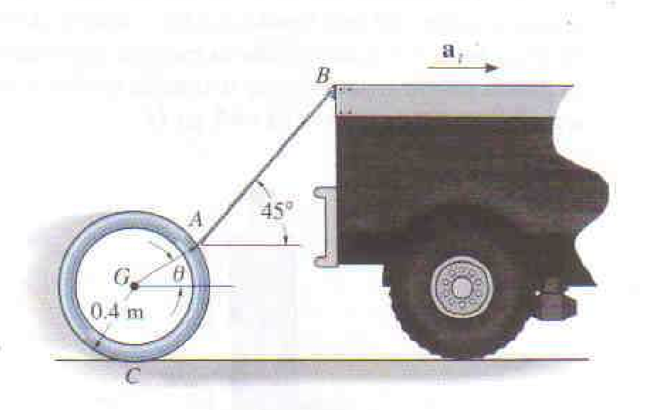
**17-33.** El tubo uniforme tiene un peso de 500 lb/pie y diámetro de 2 pies. Si es levantado como se muestra con una aceleración de 0.5 pies/s$^2$, determine el momento interno en el centro $A$ del tubo debido al levantamiento.




Prob. 17–33

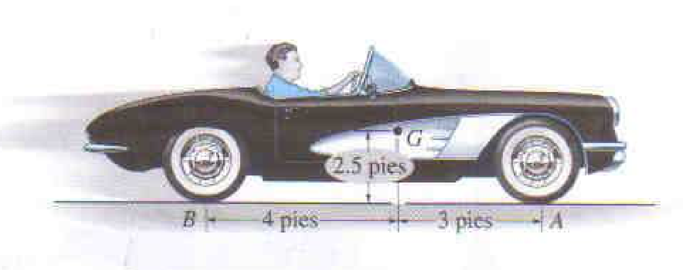
**17-34.** El tubo tiene masa de 800 kg y está siendo remolcado detrás del camión. Si la aceleración del camión es $a_t$ = 0.5 m/s$^2$, determine el ángulo $\theta$ y la tensión en el cable. El coeficiente de fricción cinética entre el tubo y el terreno es $\mu_k$ = 0.1.

**17-35.** El tubo tiene masa de 800 kg y está siendo remolcado detrás del camión. Si el ángulo $\theta$ = 30°, determine la aceleración del camión y la tensión en el cable. El coeficiente de fricción cinética entre el tubo y el terreno es $\mu_k$ = 0.1.



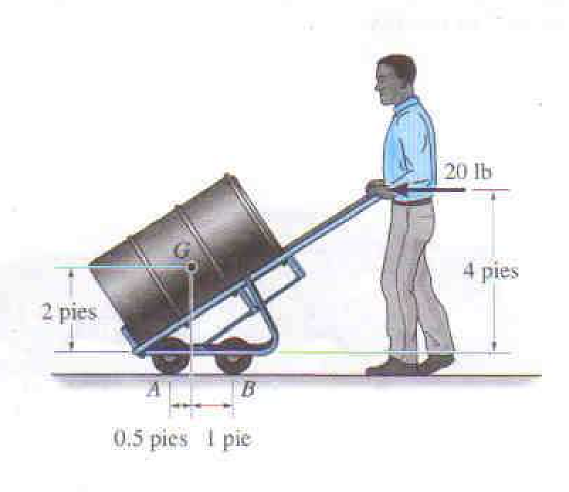

Probs. 17–34/35

***17-40.** El automóvil acelera uniformemente desde el resposo a 88 pies/s en 15 segundos. Si tiene un peso de 3800 lb y centro de gravedad en $G$, determine la reacción normal de *cada rueda* sobre el pavimento durante el movimiento. Se desarrolla potencia en las ruedas frontales, mientras que las ruedas posteriores pueden girar libremente. Desprecie la masa de las ruedas y tome los coeficientes de fricción estática y cinética igual a $\mu_s$ = 0.4 y $\mu_k$ = 0.2, respectivamente.

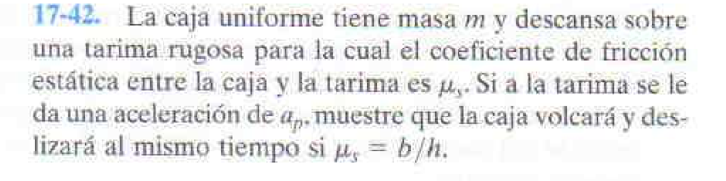



Prob. 17–40

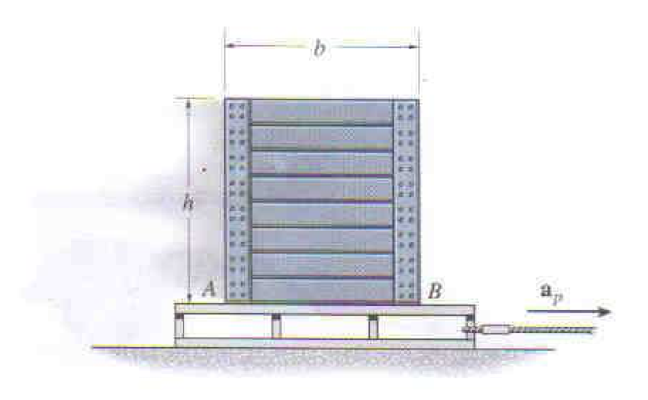
**17-41.** La carretilla soporta el tambor de 600 lb que tiene su centro de gravedad en $G$. Si el operador la empuja hacia delante con una fuerza horizontal de 20 lb, determine la aceleración de la carretilla y las reacciones normales en cada una de las cuatro ruedas. Desprecie la masa de las ruedas.




Prob. 17–41



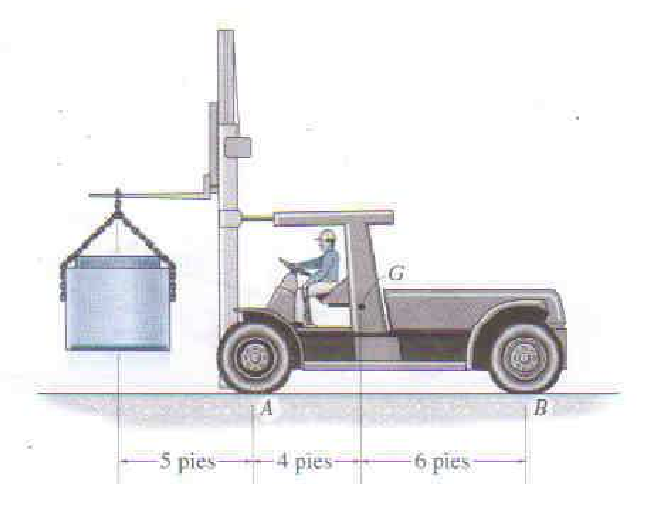
**17-42.** La caja uniforme tiene masa $m$ y descansa sobre una tarima rugosa para la cual el coeficiente de fricción estática entre la caja y la tarima es $\mu_s$. Si a la tarima se le da una aceleración de $a_p$, muestre que la caja volcará y deslizará al mismo tiempo si $\mu_s = b/h$.




Prob. 17–42

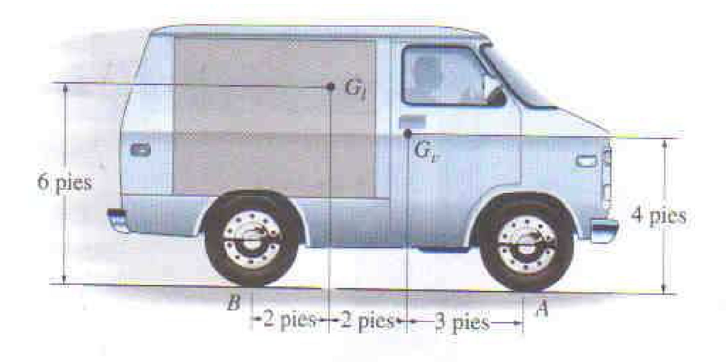
**17-43.** El camión con brazo de levantamiento y el operador tienen un peso combinado de 10 000 lb y centro de masa en $G$. Si el camión se usa para levantar el tubo de concreto de 2000 lb, determine la aceleración vertical máxima que puede dar al tubo de manera que no se vuelque hacia delante sobre sus ruedas frontales.

***17-44.** El camión con brazo de levantamiento y el operador tienen un peso combinado de 10 000 lb y centro de masa en $G$. Si el camión se usa para levantar el tubo de concreto de 2000 lb, determine las reacciones normales en cada una de sus cuatro ruedas si el tubo recibe una aceleración hacia arriba de 4 pies/s$^2$.




Probs. 17–43/44

**17-45.** La camioneta tiene un peso de 4500 lb y centro de gravedad en $G_v$. Lleva una carga fija de 800 lb que tiene centro de gravedad en $G_l$. Si la camioneta está viajando a 40 pies/s, determine la distancia que patina antes de detenerse. Los frenos causan que *todas* las ruedas se traben o patinen. El coeficiente de fricción cinética entre las ruedas y el pavimento es $\mu_k = 0.3$. Compare esta distancia con aquella en que la camioneta viaja sin carga. Desprecie la masa de las ruedas.




Prob. 17–45

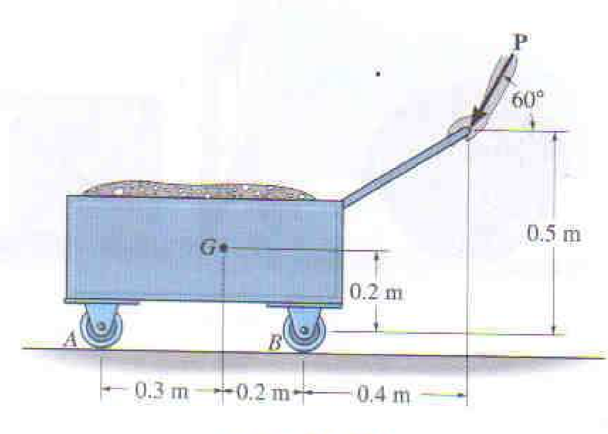
**17-46.** La caja tiene masa de 50 kg y descansa sobre el carrito de superficie inclinada. Determine si la caja volcará o deslizará con respecto al carrito cuando éste se encuentre sometido a la mínima aceleración necesaria para causar uno de estos movimientos relativos. ¿Cuál es la magnitud de esa aceleración? El coeficiente de fricción estática entre la caja y el carrito es $\mu_s = 0.5$.




Prob. 17–46

**17-47.** El carro de mano tiene masa de 200 kg y centro de masa en $G$. Determine las reacciones normales en cada una de las dos ruedas colocadas en $A$ y en las dos ruedas en $B$ si una fuerza $P = 50$ N se aplica en el mango. Desprecie la masa de las ruedas.

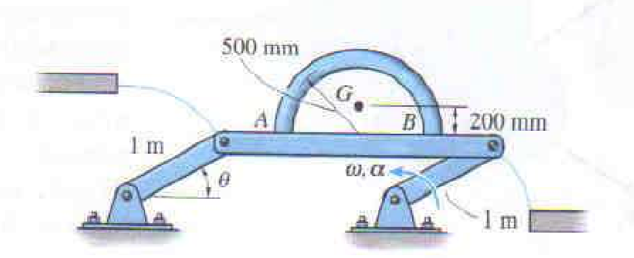
***17-48.** El carro de mano tiene masa de 200 kg y centro de masa en $G$. Determine la magnitud de la máxima fuerza **P** que puede ser aplicada al mango de manera que las ruedas ubicadas en $A$ o $B$ continúen manteniendo contacto con el suelo. Desprecie la masa de las ruedas.




Probs. 17–47/48

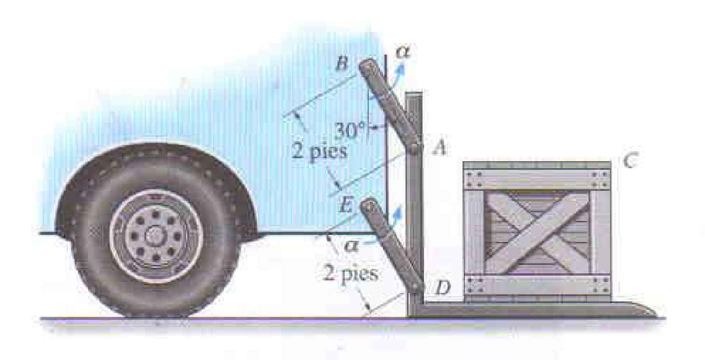
**17-49.** El tubo en arco tiene masa de 80 kg y descansa sobre la superficie de la plataforma. Al ser levantado de un nivel al siguiente, $\alpha = 0.25$ rad/s$^2$ y $\omega = 0.5$ rad/s en el instante $\theta = 30°$. Si no desliza, determine las reacciones normales del arco sobre la plataforma en este instante.

**17-50.** El tubo en arco tiene masa de 80 kg y descansa sobre la superficie de la plataforma para la cual el coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.3$. Determine la máxima aceleración angular $\alpha$ posible de la plataforma, partiendo del reposo cuando $\theta = 45°$, sin que el tubo resbale sobre la plataforma.



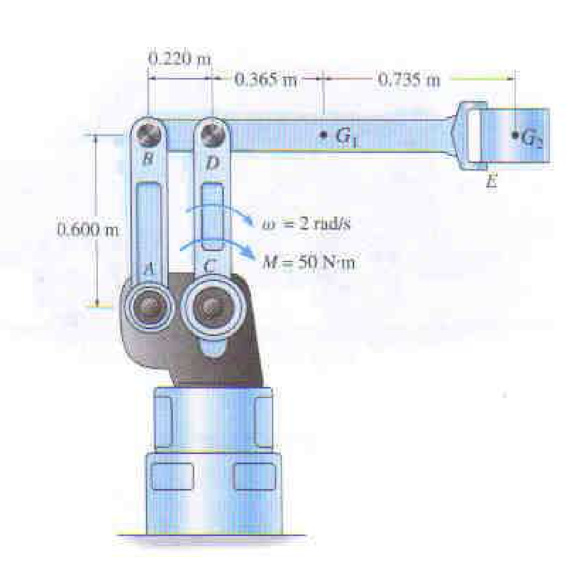

Probs. 17–49/50

**17-51.** La caja $C$ tiene un peso de 150 lb y descansa sobre el elevador del camión para el cual el coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.4$. Determine la máxima aceleración angular inicial $\alpha$, partiendo del reposo, que los eslabones paralelos $AB$ y $DE$ pueden tener sin causar que la caja resbale. No ocurre vuelco.



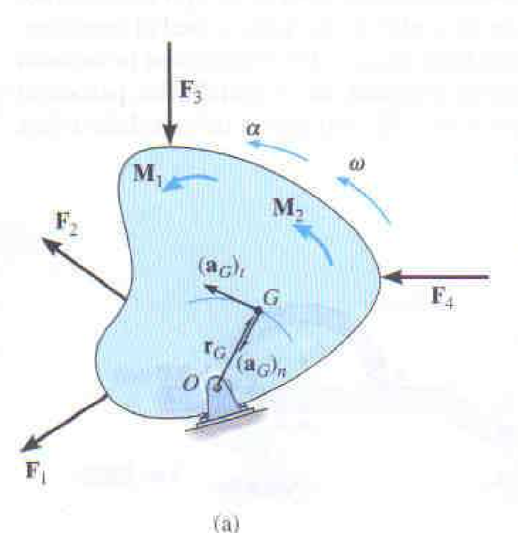

Prob. 17-51

***17-52.** El brazo $BDE$ del robot industrial es activado al aplicar el parel par $M = 50$ N · m al eslabón $CD$. Determine las reacciones en los pasadores $B$ y $D$ cuando los eslabones están en la posición mostrada y tienen velocidad angular de 2 rad/s. El brazo uniforme $BDE$ tiene masa de 10 kg y centro de masa en $G_1$. El recipiente sostenido en su tenaza en $E$ tiene masa de 12 kg y centro de masa en $G_2$.Desprecie la masa de los eslabones $AB$ y $CD$.




Prob. 17-52

## 17.4 Ecuaciones de movimiento: Rotación con respecto a un eje fijo

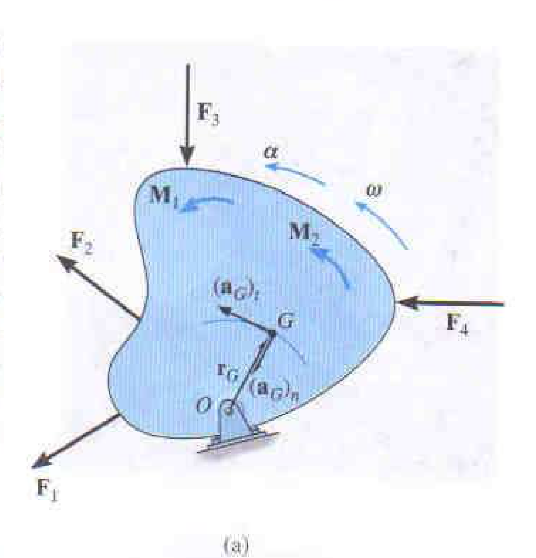



(a)

Fig. 17-14

Considere el cuerpo rígido mostrado en la figura 17-14*a*, el cual está constreñido a girar en el plano vertical con respecto a un eje fijo perpendicular a la página y que atraviesa el pasador ubicado en $O$. La velocidad angular y la aceleración angular son causadas por el sistema de fuerza externa y momento de par que actúan sobre el cuerpo. Como el centro de masa $G$ del cuerpo se mueve en una *trayectoria circular*, la aceleración de este punto está representada mediante sus componentes tangencial y normal. La *componente tangencial de aceleración* tiene una *magnitud* de $(a_G)_t = \alpha r_G$ y debe actuar en una *dirección* que sea *consistente* con la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del cuerpo. La *magnitud* de la *componente normal de aceleración* es $(a_G)_n = \omega^2 r_G$. Esta componente está *dirigida siempre* desde el punto $G$ hasta el punto $O$, independientemente de la dirección de $\boldsymbol{\omega}$.

Los diagramas de cuerpo libre y cinético para el cuerpo se muestran en la figura 17-14*b*. El peso del cuerpo, $W = mg$, y la reacción $\mathbf{F}_O$ en el pasador están incluidos en el diagrama de cuerpo libre ya que representan fuerzas externas actuando sobre el cuerpo. Las dos componentes $m(\mathbf{a}_G)_t$ y $m(\mathbf{a}_G)_n$, mostradas en el diagrama cinético, están asociadas con las componentes tangencial y normal de aceleración del centro de masa del cuerpo. Estos vectores actúan en la misma *dirección* que las componentes de aceleración y tienen *magnitudes* de $m(a_G)_t$ y $m(a_G)_n$, respectivamente. El vector $I_G\boldsymbol{\alpha}$ actúa en la misma *dirección* que $\boldsymbol{\alpha}$ y tiene *magnitud* de $I_G\alpha$, donde $I_G$ es el momento de masa del cuerpo calculado con respecto a un eje perpendicular a la página y que pasa por $G$. A partir de la derivación dada en la sección 17.2, las ecuaciones de movimiento que se aplican al cuerpo pueden ser escritas en la forma



(a)

$$\begin{aligned}\Sigma F_n &= m(a_G)_n = m\omega^2 r_G \\ \Sigma F_t &= m(a_G)_t = m\alpha r_G \\ \Sigma M_G &= I_G\alpha\end{aligned} \tag{17–14}$$

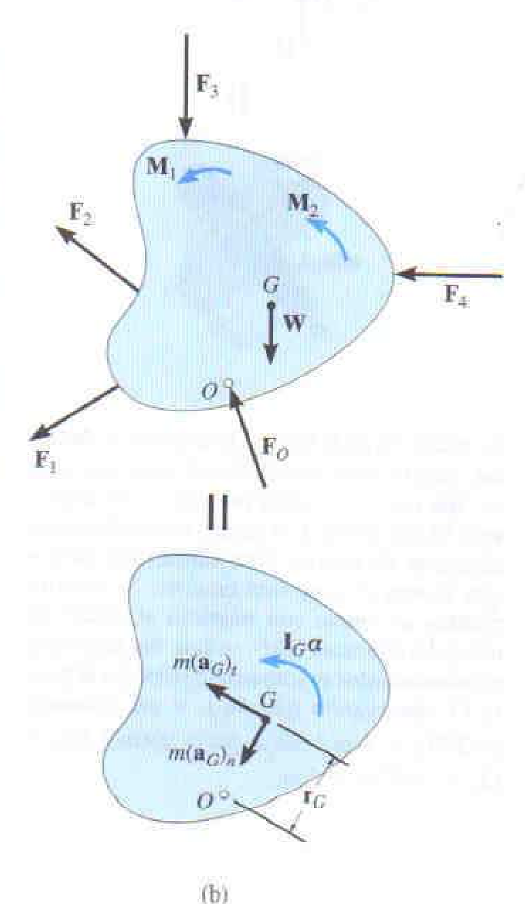
La ecuación de momento puede ser reemplazada por una suma de momentos con respecto a cualquier punto $P$ arbitrario sobre o fuera del cuerpo si se toman en cuenta los momentos $\Sigma(\mathcal{M}_k)_P$ generados por $I_G\boldsymbol{\alpha}$, $m(\mathbf{a}_G)_t$ y $m(\mathbf{a}_G)_n$ con respecto al punto. En muchos problemas es conveniente sumar momentos con respecto al pasador $O$ para eliminar la fuerza *desconocida* $\mathbf{F}_O$. A partir del diagrama cinético, figura 17-14*b*, esto requiere

$$\circlearrowleft\!+\Sigma M_O = \Sigma(\mathcal{M}_k)_O; \quad \Sigma M_O = r_G m(a_G)_t + I_G\alpha \tag{17–15}$$

Advierta que el momento de $m(\mathbf{a}_G)_n$ no está incluido en la suma ya que la línea de acción de este vector pasa por $O$. Sustituyendo $(a_G)_t = r_G\alpha$, podemos reescribir la ecuación anterior como $\circlearrowleft\!+\Sigma M_O = (I_G + mr_G^2)\alpha$. A partir del teorema de los ejes paralelos, $I_O = I_G + md^2$, y por tanto el término entre paréntesis representa el *momento de inercia del cuerpo con respecto al eje fijo de rotación que pasa por O*.* En consecuencia, podemos escribir las tres ecuaciones de movimiento para el cuerpo como

$$\begin{aligned}\Sigma F_n &= m(a_G)_n = m\omega^2 r_G \\ \Sigma F_t &= m(a_G)_t = m\alpha r_G \\ \Sigma M_O &= I_O\alpha\end{aligned} \tag{17–16}$$

En aplicaciones, debe recordarse que "$I_O\alpha$" toma en cuenta el "momento" de $m(\mathbf{a}_G)_t$ y de $I_G\boldsymbol{\alpha}$ con respecto al punto $O$, figura 17-14*b*. En otras palabras, $\Sigma M_O = \Sigma(\mathcal{M}_k)_O = I_O\alpha$, como lo indican las ecuaciones 17-15 y 17-16.

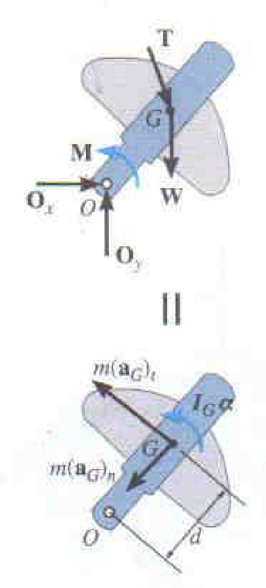


(b)

Fig. 17–14

*El resultado $\Sigma M_O = I_O\alpha$ también puede obtenerse *directamente* a partir de la ecuación 17-6 seleccionando el punto $P$ para que coincida con $O$, observando que $(a_P)_x = (a_P)_y = 0$.






La manivela de la bomba extractora de petróleo experimenta rotación con respecto a un eje fijo que es causada por una torca impulsora **M** del motor. Las cargas mostradas en el diagrama de cuerpo libre causan los efectos que ilustra el diagrama cinético. Si los momentos se suman con respecto al centro de masa, $G$, entonces $\Sigma M_G = I_G\alpha$. Sin embargo, si los momentos se suman con respecto al punto $O$, observando que $(a_G)_t = \alpha d$, entonces $\circlearrowleft + \Sigma M_O = I_G\alpha + m(a_G)_t d + m(a_G)_n(0) = (I_G + md^2)\alpha = I_O\alpha$.

## PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

Los problemas de cinética que implican la rotación de un cuerpo con respecto a un eje fijo pueden ser resueltos usando el siguiente procedimiento.

### *Diagrama de cuerpo libre.*

- Establezca el sistema coordenado inercial $x, y$ o $n, t$ y especifique la dirección y el sentido de las aceleraciones $(\mathbf{a}_G)_n$ y $(\mathbf{a}_G)_t$ y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del cuerpo. Recuerde que $(\mathbf{a}_G)_t$ debe actuar en una dirección que esté de acuerdo con $\boldsymbol{\alpha}$, mientras que $(\mathbf{a}_G)_n$ siempre actúa hacia el eje de rotación, o punto $O$.
- Dibuje el diagrama de cuerpo libre para tomar en cuenta todas las fuerzas y momentos de par externos que actúan sobre el cuerpo.
- Calcule el momento de inercia $I_G$ o $I_O$.
- Identifique las incógnitas en el problema.
- Si se decide a usar la ecuación rotatoria del movimiento $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$, esto es, $P$ es un punto distinto de $G$ u $O$, entonces considere dibujar el diagrama cinético para ayudar a "visualizar" los "momentos" desarrollados por las componentes $m(\mathbf{a}_G)_n$, $m(\mathbf{a}_G)_t$ e $I_G\boldsymbol{\alpha}$ al escribir los términos para la suma de momentos $\Sigma(\mathcal{M}_k)_P$.

### *Ecuaciones de movimiento.*

- Aplique las tres ecuaciones de movimiento de acuerdo con la convención de signos establecida.
- Si los momentos se suman con respecto al centro de masa $G$ del cuerpo, entonces $\Sigma M_G = I_G\alpha$, ya que $(m\mathbf{a}_G)_t$ y $(m\mathbf{a}_G)_n$ no generan momento con respecto a $G$.
- Si los momentos se suman con respecto al soporte de pasador $O$ sobre el eje de rotación, entonces $(m\mathbf{a}_G)_n$ no genera momento con respecto a $G$, y puede demostrarse que $\Sigma M_O = I_O\alpha$.

### *Cinemática.*

- Use cinemática cuando no pueda ser obtenida una solución completa estrictamente a partir de las ecuaciones de movimiento.
- Si la *aceleración angular es variable*, aplique

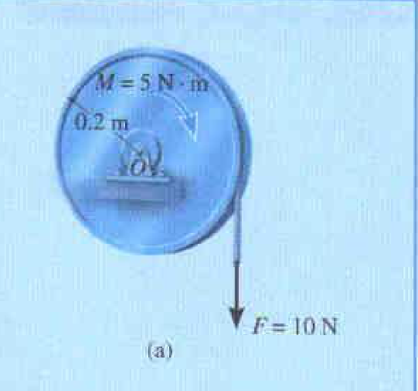
$$\alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad \alpha\, d\theta = \omega\, d\omega \qquad \omega = \frac{d\theta}{dt}$$

- Si la *aceleración angular es constante*, use

$$\omega = \omega_0 + \alpha_c t$$
$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha_c t^2$$
$$\omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$

## EJEMPLO 17.9

El disco uniforme de 30 kg mostrado en la figura 17-15$a$ está soportado por un pasador ubicado en su centro. Si el disco parte del reposo, determine el número de revoluciones que debe efectuar para alcanzar una velocidad angular de 20 rad/s. ¿Cuáles son las reacciones en el pasador? Sobre el disco actúa una fuerza constante $F = 10$ N, la cual es aplicada a una cuerda enrollada alrededor de su periferia, y un momento de par constante $M = 5$ N · m. Desprecie la masa de la cuerda en los cálculos.



(a)

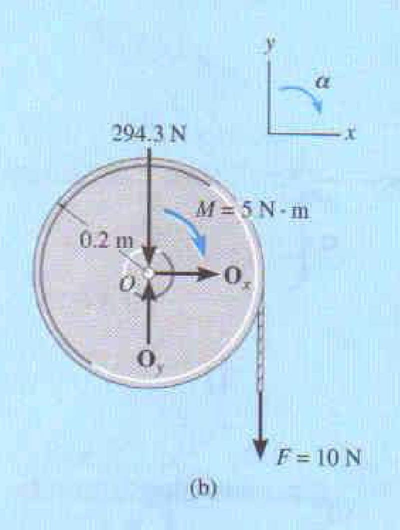
### Solución

*Diagrama de cuerpo libre.* Figura 17-15$b$. Advierta que el centro de masa no está sometido a aceleración; sin embargo, el disco tiene aceleración angular en el sentido de las manecillas del reloj.

El momento de inercia del disco con respecto al pasador es

$$I_O = \tfrac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}(30\text{ kg})(0.2\text{ m})^2 = 0.6\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Las tres incógnitas son $O_x$, $O_y$ y $\alpha$.



(b)

Fig. 17-15

*Ecuaciones de movimiento.*

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = m(a_G)_x; \qquad O_x = 0 \qquad \textit{Resp.}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y; \quad O_y - 294.3\text{ N} - 10\text{ N} = 0$$

$$O_y = 304\text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\circlearrowright + \Sigma M_O = I_O\alpha; \qquad -10\text{ N}(0.2\text{ m}) - 5\text{ N}\cdot\text{m} = -(0.6\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\alpha$$

$$\alpha = 11.7\text{ rad/s}^2 \circlearrowright$$

*Cinemática.* Como $\alpha$ es constante y en el sentido de las manecillas del reloj, el número de radianes que el disco debe girar para obtener una velocidad angular de 20 rad/s en ese sentido es

$$\circlearrowright + \qquad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$

$$(-20\text{ rad/s})^2 = 0 + 2(-11.7\text{ rad/s}^2)(\theta - 0)$$

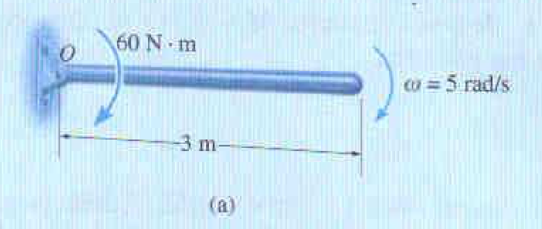
$$\theta = -17.1\text{ rad} = 17.1\text{ rad} \circlearrowright$$

Por consiguiente,

$$\theta = 17.1\text{ rad}\left(\frac{1\text{ rev}}{2\pi\text{ rad}}\right) = 2.73\text{ rev} \circlearrowright \qquad \textit{Resp.}$$

## EJEMPLO 17.10

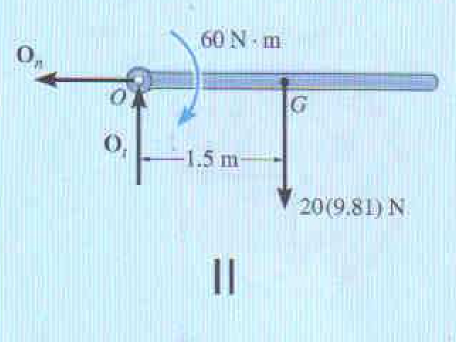
La barra esbelta de 20 kg mostrada en la figura 17-16*a* está girando en el plano vertical y en el instante mostrado tiene velocidad angular $\omega = 5$ rad/s. Determine la aceleración angular de la barra y las componentes de reacción horizontal y vertical en el pasador en este instante.



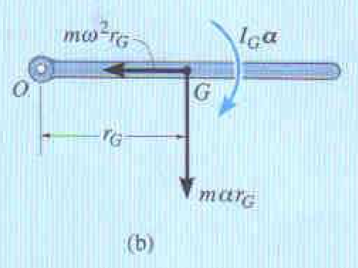

(a)

### Solución

***Diagramas de cuerpo libre y cinético.*** Figura 17-16*b*. Como se aprecia en el diagrama cinético, el punto $G$ se mueve en una trayectoria circular por lo que tiene dos componentes de aceleración. Es importante que la componente tangencial $a_t = \alpha r_G$ actúe hacia abajo ya que debe estar de acuerdo con la aceleración angular $\alpha$ de la barra. Las tres incógnitas son: $O_n$, $O_t$ y $\alpha$.




=




(b)

Fig. 17–16

***Ecuaciones de movimiento.***

$$\overset{+}{\leftarrow}\Sigma F_n = m\omega^2 r_G; \qquad O_n = (20\text{ kg})(5\text{ rad/s})^2(1.5\text{ m})$$

$$+\downarrow\Sigma F_t = m\alpha r_G; \qquad -O_t + 20(9.81)\text{ N} = (20\text{ kg})(\alpha)(1.5\text{ m})$$

$$\circlearrowright+\Sigma M_G = I_G\alpha; \quad O_t(1.5\text{ m}) + 60\text{ N}\cdot\text{m} = [\tfrac{1}{12}(20\text{ kg})(3\text{ m})^2]\alpha$$

Resolviendo las ecuaciones, obtenemos

$$O_n = 750\text{ N} \qquad O_t = 19.0\text{ N} \qquad \alpha = 5.90\text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Una solución más directa para este problema sería sumar momentos con respecto al punto $O$ para eliminar $\mathbf{O}_n$ y $\mathbf{O}_t$ y obtener una *solución directa* para $\alpha$. Aquí,

$$\circlearrowright+\Sigma M_O = \Sigma(\mathcal{M}_k)_O; \quad 60\text{ N}\cdot\text{m} + 20(9.81)\text{ N}(1.5\text{ m}) =$$
$$[\tfrac{1}{12}(20\text{ kg})(3\text{ m})^2]\alpha + [20\text{ kg}(\alpha)(1.5\text{ m})](1.5\text{ m})$$
$$\alpha = 5.90\text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

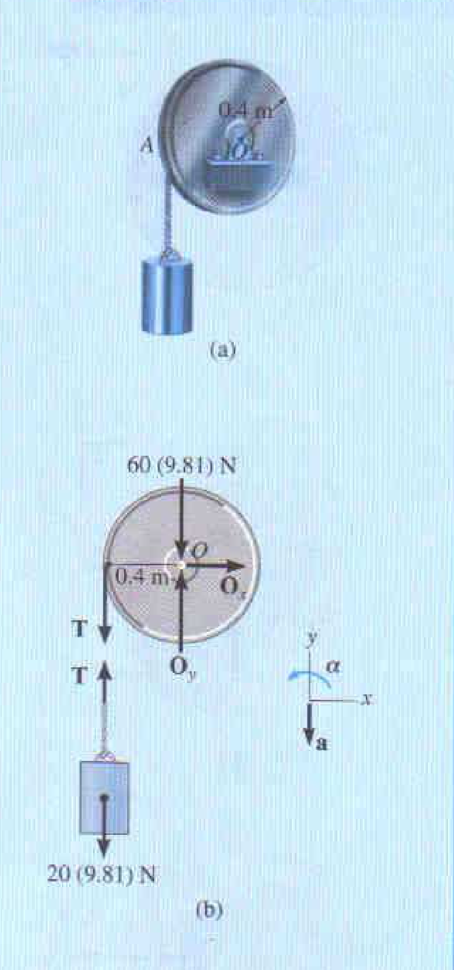
También, como $I_O = \frac{1}{3}ml^2$ para una barra esbelta, podemos aplicar

$$\circlearrowright+\Sigma M_O = I_O\alpha; \quad 60\text{ N}\cdot\text{m} + 20(9.81)\text{ N}(1.5\text{ m}) = [\tfrac{1}{3}(20\text{ kg})(3\text{ m})^2]\alpha$$
$$\alpha = 5.90\text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

Por comparación, la última ecuación proporciona la solución más simple para $\alpha$ y *no requiere* el uso del diagrama cinético.

## EJEMPLO 17.11

El tambor mostrado en la figura 17-17*a* tiene masa de 60 kg y radio de giro $k_O = 0.25$ m. Una cuerda de masa insignificante está enrollada alrededor de la periferia del tambor y unida a un bloque con masa de 20 kg. Si el bloque es liberado, determine la aceleración angular del tambor.




### Solución I

*Diagrama de cuerpo libre.* Aquí consideraremos al tambor y al bloque por separado, figura 17-17*b*. Suponiendo que el bloque acelera *hacia abajo* en **a**, esto genera una aceleración angular $\alpha$ del tambor *en sentido contrario al de las manecillas del reloj.*

El momento de inercia del tambor es

$$I_O = mk_O^2 = (60 \text{ kg})(0.25 \text{ m})^2 = 3.75 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Hay cinco incógnitas: $O_x$, $O_y$, $T$, $a$ y $\alpha$.

*Ecuaciones de movimiento.* Aplicar las ecuaciones traslacionales de movimiento $\Sigma F_x = m(a_G)_x$ y $\Sigma F_y = m(a_G)_y$ al tambor no es de consecuencia para la solución, ya que estas ecuaciones implican las incógnitas $O_x$ y $O_y$. Entonces, para el tambor y el bloque, respectivamente,

$$\circlearrowleft + \Sigma M_O = I_O\alpha; \qquad T(0.4 \text{ m}) = (3.75 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)\alpha \qquad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y; \qquad -20(9.81) \text{ N} + T = -20a \qquad (2)$$

*Cinemática.* Como el punto de contacto $A$ entre la cuerda y el tambor tiene una componente tangencial de aceleración **a**, figura 17-17*a*, entonces

$$\circlearrowleft + a = \alpha r; \qquad a = \alpha(0.4) \qquad (3)$$

Resolviendo las ecuaciones anteriores,

$$T = 106 \text{ N}$$

$$a = 4.52 \text{ m/s}^2$$

$$\alpha = 11.3 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft \qquad \textit{Resp.}$$

### Solución II

*Diagramas de cuerpo libre y cinético.* La tensión $T$ en el cable puede ser eliminada del análisis considerando al tambor y al bloque como un solo sistema, figura 17-17*c*. Se muestra el diagrama cinético puesto que los momentos serán sumados con respecto al punto $O$.

*Ecuaciones de movimiento.* Usando la ecuación 3 y aplicando la ecuación de momentos con respecto a $O$ para eliminar las incógnitas $O_x$ y $O_y$, tenemos

$$\circlearrowleft + \Sigma M_O = \Sigma(\mathcal{M}_k)_O; \quad 20(9.81) \text{ N}(0.4 \text{ m}) =$$

$$(3.75 \text{ kg} \cdot \text{m}^2)\alpha + [20 \text{ kg}(0.4 \text{ m } \alpha)](0.4 \text{ m})$$

$$\alpha = 11.3 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft \qquad \textit{Resp.}$$

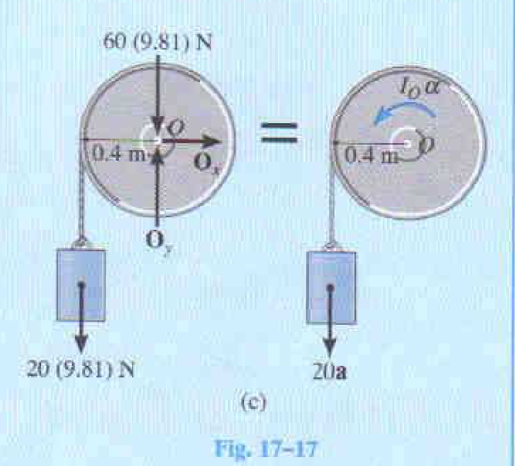
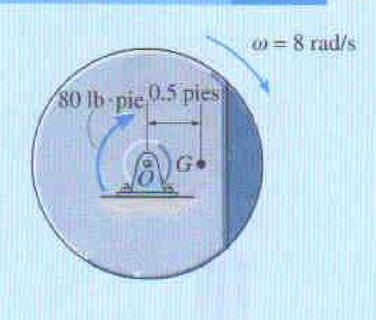


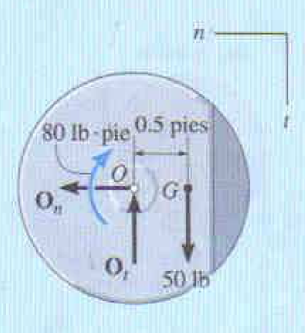

Fig. 17-17

*Nota:* Si se *retirase* el bloque y se aplicase una fuerza de 20(9.81) N a la cuerda, muestre que $\alpha = 20.9$ rad/s$^2$ y explique la razón de la diferencia en los resultados.

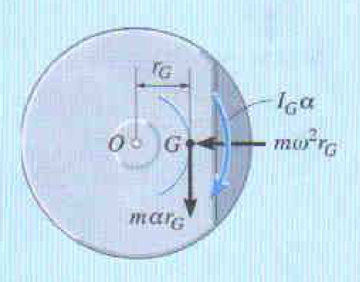
**EJEMPLO 17.12**




(a)




=




(b)

**Fig. 17–18**

El volante desbalanceado de 50 lb que muestra la figura 17-18*a* tiene radio de giro $k_G = 0.6$ pies con respecto a un eje que pasa por su centro de masa $G$. Si este volante tiene velocidad angular de 8 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj en el instante mostrado, determine las componentes de reacción horizontal y vertical en el pasador $O$.

## Solución

***Diagramas de cuerpo libre y cinético.*** Como $G$ se mueve en una trayectoria circular, tendrá componentes de aceleración normal y tangencial. Además, como $\alpha$, que es causada por el peso del volante, actúa en el sentido de las manecillas del reloj, la componente tangencial de aceleración actuará hacia abajo. ¿Por qué? Los vectores $m(a_G)_t = m\alpha r_G$, $m(a_G)_n = m\omega^2 r_G$, e $I_G\alpha$ se muestran en el diagrama cinemático de la figura 17-18*b*. Aquí, el momento de inercia del volante con respecto a su centro de masa es determinado a partir del radio de giro y de la masa del volante; esto es, $I_G = mk_G^2 = (50 \text{ lb}/32.2 \text{ pies/s}^2)(0.6 \text{ pies})^2 = 0.559 \text{ slug} \cdot \text{pie}^2$.

Las tres incógnitas son $O_n$, $O_t$ y $\alpha$.

***Ecuaciones de movimiento.***

$$\overset{+}{\leftarrow} \Sigma F_n = m\omega^2 r_G; \qquad O_n = \left(\frac{50 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}\right)(8 \text{ rad/s})^2(0.5 \text{ pies}) \quad (1)$$

$$+\downarrow \Sigma F_t = m\alpha r_G; \quad -O_t + 50 \text{ lb} = \left(\frac{50 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}\right)(\alpha)(0.5 \text{ pies}) \quad (2)$$

$$\curvearrowright + \Sigma M_G = I_G\alpha; \ 80 \text{ lb} \cdot \text{pies} + O_t(0.5 \text{ pies}) = (0.559 \text{ slug} \cdot \text{pies}^2)\alpha \quad (3)$$

Resolviendo, obtenemos

$$\alpha = 111 \text{ rad/s}^2 \quad O_n = 49.7 \text{ lb} \quad O_t = -36.1 \text{ lb}$$ *Resp.*

Los momentos pueden sumarse también con respecto al punto $O$ para eliminar $\mathbf{O}_n$ y $\mathbf{O}_t$ y obtener así una *solución directa* para $\boldsymbol{\alpha}$, figura 17-18*b*. Esto puede hacerse de *dos* maneras: usando $\Sigma M_O = \Sigma(\mathcal{M}_k)_O$ o $\Sigma M_O = I_O\alpha$. Si se aplica la primera de esas ecuaciones, tenemos

$$\curvearrowright + \Sigma M_O = \Sigma(\mathcal{M}_k)_O; \ 80 \text{ lb} \cdot \text{pies} + 50 \text{ lb}(0.5 \text{ pies}) =$$

$$(0.559 \text{ slug} \cdot \text{pies}^2)\alpha + \left[\left(\frac{50 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}\right)\alpha(0.5 \text{ pies})\right](0.5 \text{ pies})$$

$$105 = 0.947\alpha \quad (4)$$

Si se aplica $\Sigma M_O = I_O\alpha$, por el teorema de los ejes paralelos, el momento de inercia del volante con respecto a $O$ es

$$I_O = I_G + mr_G^2 = 0.559 + \left(\frac{50}{32.2}\right)(0.5)^2 = 0.947 \text{ slug} \cdot \text{pies}^2$$

Por consiguiente, a partir del diagrama de cuerpo libre, figura 17-18*b*, requerimos

$$\curvearrowright + \Sigma M_O = I_O\alpha; \ 80 \text{ lb} \cdot \text{pies} + 50 \text{ lb}(0.5 \text{ pies}) = (0.947 \text{ slug} \cdot \text{pies}^2)\alpha$$

que es la misma que la ecuación 4. Despejando $\alpha$ y sustituyendo en la ecuación 2 resulta la respuesta para $O_t$ obtenida previamente.

## EJEMPLO 17.13

La barra esbelta mostrada en la figura 17-19*a* tiene masa $m$ y longitud $l$ y es liberada del reposo cuando $\theta = 0°$. Determine las componentes de fuerza horizontal y vertical que el pasador ubicado en $A$ ejerce sobre la barra en el instante $\theta = 90°$.

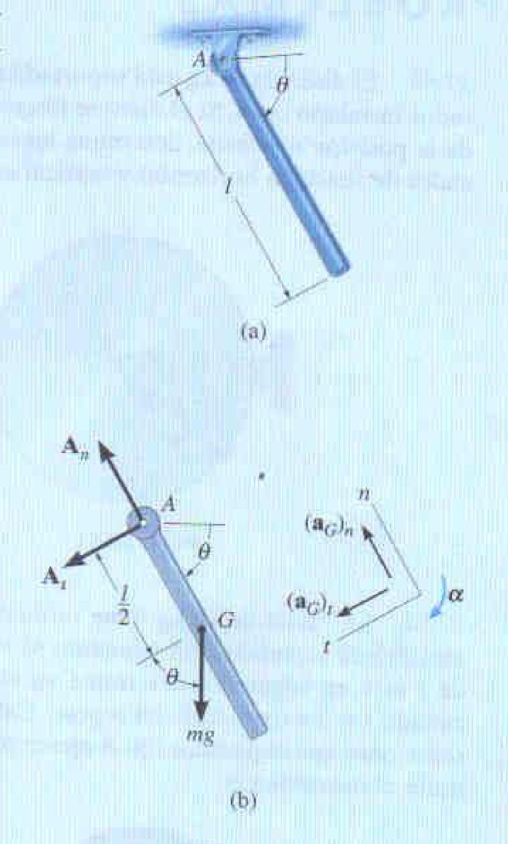



Fig. 17-19

### Solución

***Diagrama de cuerpo libre.*** El diagrama de cuerpo libre para la barra se muestra cuando ésta está en la posición general $\theta$, figura 17-19*b*. Por conveniencia, las componentes de fuerza en $A$ se muestran actuando en las direcciones $n$ y $t$. Observe que $\boldsymbol{\alpha}$ actúa en el sentido de las manecillas del reloj.

El momento de inercia de la barra con respecto al punto $A$ es $I_A = \frac{1}{3}ml^2$.

***Ecuaciones de movimiento.*** Sumaremos los momentos con respecto a $A$ para eliminar las fuerzas reactivas ahí.*

$$+\nwarrow \Sigma F_n = m\omega^2 r_G; \quad A_n - mg \operatorname{sen}\theta = m\omega^2(l/2) \tag{1}$$

$$+\swarrow \Sigma F_t = m\alpha r_G; \quad A_t + mg\cos\theta = m\alpha(l/2) \tag{2}$$

$$\circlearrowright + \Sigma M_A = I_A\alpha; \quad mg\cos\theta(l/2) = (\tfrac{1}{3}ml^2)\alpha \tag{3}$$

***Cinemática.*** Para un ángulo $\theta$ dado hay cuatro incógnitas en las tres ecuaciones anteriores: $A_n$, $A_t$, $\omega$ y $\alpha$. Como se advierte en la ecuación 3, *$\alpha$ no es constante*; sino que depende de la posición $\theta$ de la barra. La necesaria cuarta ecuación se obtiene usando cinemática, donde $\alpha$ y $\omega$ pueden relacionarse con $\theta$ mediante la ecuación

$$(\circlearrowright +) \qquad \omega\, d\omega = \alpha\, d\theta \tag{4}$$

Observe que la dirección positiva en el sentido de las manecillas del reloj para esta ecuación *concuerda* con la de la ecuación 3. Esto es importante ya que estamos buscando una solución simultánea.

Para encontrar $\omega$ en $\theta = 90°$, eliminamos $\alpha$ de las ecuaciones 3 y 4, lo que da

$$\omega\, d\omega = (1.5\, g/l)\cos\theta\, d\theta$$

Como $\omega = 0$ en $\theta = 0°$, tenemos

$$\int_0^\omega \omega\, d\omega = (1.5\, g/l)\int_{0°}^{90°}\cos\theta\, d\theta$$

$$\omega^2 = 3\, g/l$$

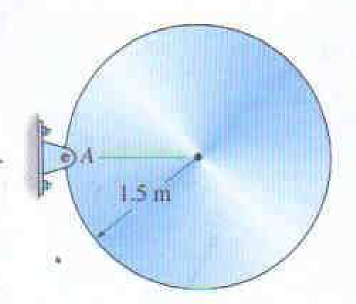
Sustituyendo este valor en la ecuación 1 con $\theta = 90°$ y resolviendo las ecuaciones 1, 2 y 3 resulta

$$\alpha = 0 \qquad A_t = 0 \qquad A_n = 2.5\, mg \qquad \textit{Resp.}$$

*Si se usa $\Sigma M_A = \Sigma(\mathcal{M}_k)_A$, se deben tomar en cuenta los momentos de $I_G\boldsymbol{\alpha}$ y $m(\mathbf{a}_G)_t$ con respecto a $A$. Aquí, sin embargo, hemos usado $\Sigma M_A = I_A\alpha$.

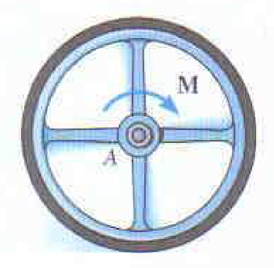
## PROBLEMAS

**17-53.** El disco de 80 kg está soportado mediante un pasador instalado en $A$. Si el disco se libera del reposo desde la posición mostrada, determine las componentes iniciales de reacción horizontal y vertical en el pasador.



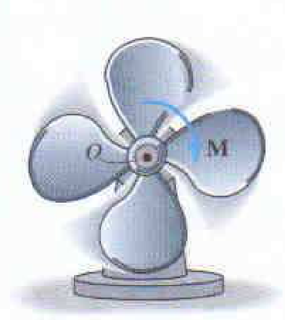

Prob. 17-53

**17-54.** La rueda de 10 kg tiene radio de giro $k_A = 200$ mm. Si está sometida a un momento $M = (5t)$ N · m, donde $t$ está en segundos, determine su velocidad angular cuando $t = 3$ s partiendo del reposo. Calcule también las reacciones que el pasador fijo $A$ ejerce sobre la rueda durante el movimiento.



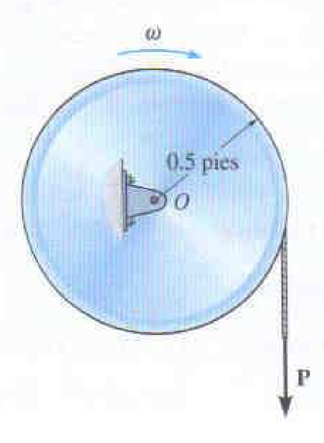

Prob. 17-54

**17-55.** Las aspas del ventilador tienen masa de 2 kg y momento de inercia $I_O = 0.18$ kg · m$^2$ con respecto a un eje que pasa por su centro $O$. Si las aspas están sometidas a un momento $M = 3(1 - e^{-0.2t})$ N · m, donde $t$ está en segundos, determine su velocidad angular cuando $t = 4$ s partiendo del reposo.



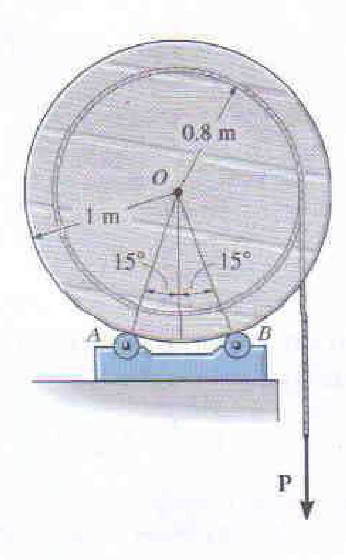

Prob. 17-55

***17-56.** El tambor tiene un peso de 80 lb y radio de giro $k_O = 0.4$ pies. Si el cable, que está enrollado alrededor del tambor, se encuentra sometido a una fuerza vertical $P = 15$ lb, determine el tiempo necesario para incrementar la velocidad angular del tambor a partir de $\omega_1 = 5$ rad/s a $\omega_2 = 25$ rad/s. Desprecie la masa del cable.



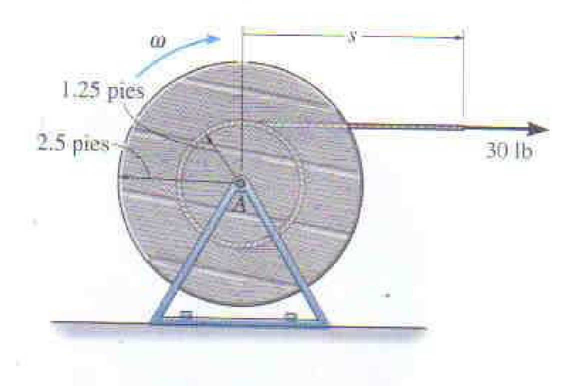

Prob. 17-56

**17-57.** El carrete está soportado sobre pequeños rodillos instalados en $A$ y $B$. Determine la fuerza constante $P$ que debe ser aplicada al cable para desenrollar 8 m de cable en 4 s partiendo del reposo. Calcule también las fuerzas normales presentes en $A$ y $B$ durante este tiempo. El carrete tiene masa de 60 kg y radio de giro $k_O = 0.65$ m. Al efectuar los cálculos desprecie la masa del cable y de los rodillos en $A$ y $B$.




Prob. 17-57

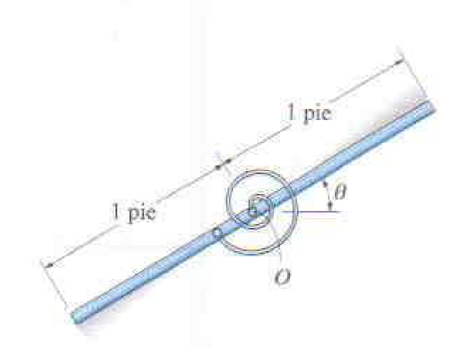
**17-58.** Una cuerda está enrollada alrededor del núcleo interior de un carrete. Si la cuerda es jalada con una tensión constante de 30 lb y el carrete está originalmente en reposo, determine la velocidad angular del carrete cuando $s = 8$ pies de cuerda ha sido desenrollada. Desprecie el peso de la porción de 8 pies de cuerda. El carrete y toda la cuerda tienen un peso total de 400 lb, y el radio de giro con respecto al eje $A$ es $k_A = 1.30$ pies.




Prob. 17–58

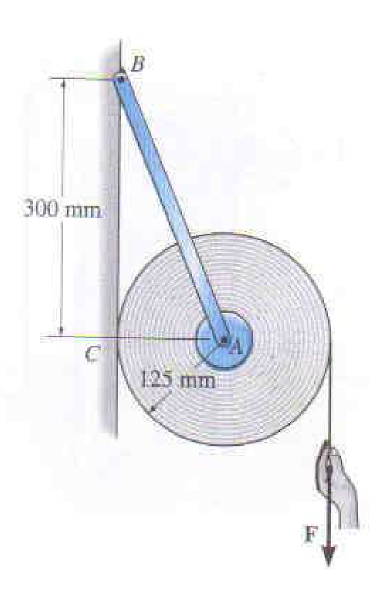
**17-59.** La barra de 10 lb está sostenida por un pasador instalado en su centro $O$ y conectada a un resorte de torsión. El resorte tiene rigidez $k = 5$ lb · pie/rad, de manera que el par (torque) desarrollado es $M = (5\theta)$ lb · pie, donde $\theta$ está en radianes. Si la barra es liberada del reposo cuando está en posición vertical en $\theta = 90°$, determine su velocidad angular en el instante $\theta = 0°$.

***17-60.** La barra de 10 lb está sostenida por un pasador instalado en su centro $O$ y conectada a un resorte de torsión. El resorte tiene rigidez $k = 5$ lb · pie/rad, de manera que el par (torque) desarrollado es $M = (5\theta)$ lb · pie, donde $\theta$ está en radianes. Si la barra es liberada del reposo cuando está en posición vertical en $\theta = 90°$, determine su velocidad angular en el instante $\theta = 45°$.



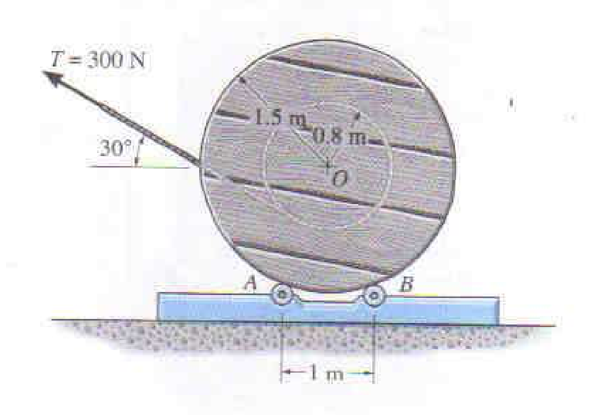

Probs. 17–59/60

**17-61.** El rollo de 20 kg de papel tiene radio de giro $k_A = 90$ mm con respecto a un eje que pasa por el punto $A$. El rollo está soportado en ambos extremos por dos barras $AB$ conectadas mediante un pasador. Si el rollo descansa contra una pared, para la cual el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.2$, y es aplicada una fuerza vertical $F = 30$ N al extremo del papel, determine la aceleración angular del rollo al desenrollarse el papel.



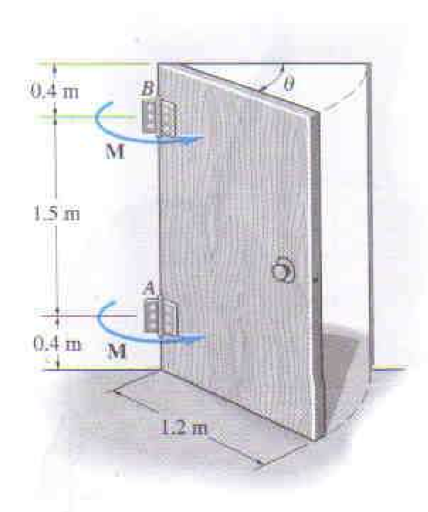

Prob. 17–61

**17-62.** El cable se desenrolla de un carrete soportado sobre pequeños rodillos, ubicados en $A$ y $B$, ejerciendo una fuerza $T = 300$ N sobre el cable en la dirección mostrada. Calcule el tiempo necesario para desenrollar 5 m de cable del carrete si éste y el cable tienen una masa total de 600 kg y radio de giro centroidal $k_O = 1.2$ m. En los cálculos, desprecie la masa del cable desenrollado y la de los rodillos en $A$ y $B$. Los rodillos giran sin fricción.



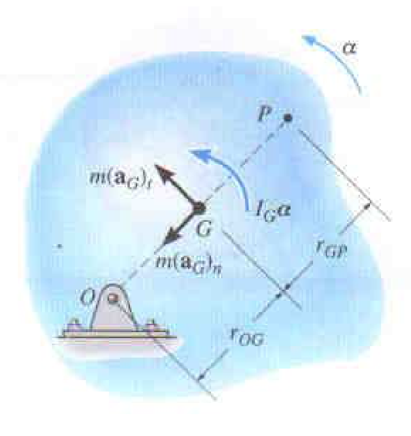

Prob. 17–62

**17-63.** La puerta se cierra automáticamente usando resortes torsionales montados sobre las bisagras. Cada resorte tiene rigidez $k = 50$ N · m/rad de manera que el par sobre cada bisagra es $M = (50\theta)$ N · m, donde $\theta$ está medido en radianes. Si la puerta se libera del reposo cuando está abierta en $\theta = 90°$, determine su velocidad angular en el instante $\theta = 0°$. Para efectuar los cálculos, trate la puerta como una placa delgada con masa de 70 kg.



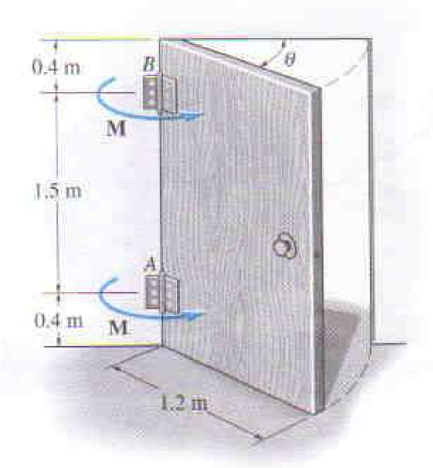

Prob. 17-63

**17-65.** El diagrama cinético que representa el movimiento rotatorio general de un cuerpo rígido con respecto a un eje fijo en $O$ se muestra en la figura. Demuestre que $I_G\alpha$ puede ser eliminado moviendo los vectores $m(\mathbf{a}_G)_t$ y $m(\mathbf{a}_G)_n$ al punto $P$, ubicado a una distancia $r_{GP} = k_G^2/r_{OG}$ a partir del centro de masa $G$ del cuerpo. Aquí $k_G$ representa el radio de giro del cuerpo con respecto a $G$. El punto $P$ se llama *centro de percusión* del cuerpo.



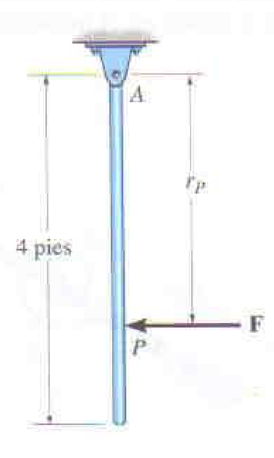

Prob. 17-65

***17-64.** La puerta se cierra automáticamente usando resortes torsionales montados sobre las bisagras. Si el par sobre cada bisagra es $M = k\theta$, donde $\theta$ está medido en radianes, determine la rigidez torsional $k$ requerida de manera que la puerta cierre ($\theta = 0°$) con velocidad angular $\omega = 2$ rad/s cuando sea liberada del reposo en $\theta = 90°$. Para efectuar los cálculos, trate la puerta como una placa delgada con masa de 70 kg.



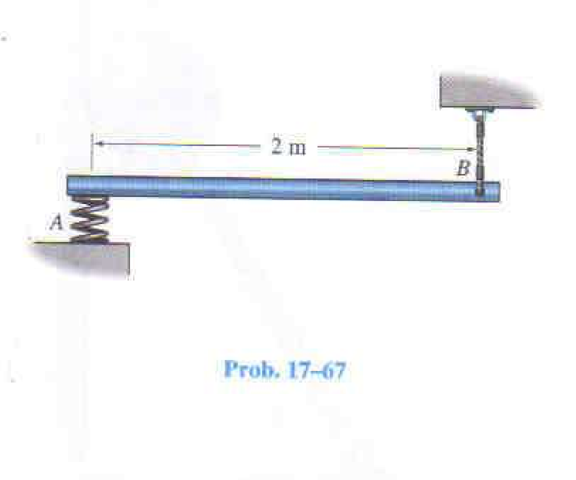

Prob. 17-64

**17-66.** Determine la posición $r_P$ del centro de percusión $P$ de la barra esbelta de 10 lb. (Vea el Prob. 17-65.) ¿Cuál es la fuerza horizontal $A_x$ presente en el pasador cuando la barra es golpeada en $P$ con una fuerza $F = 20$ lb?



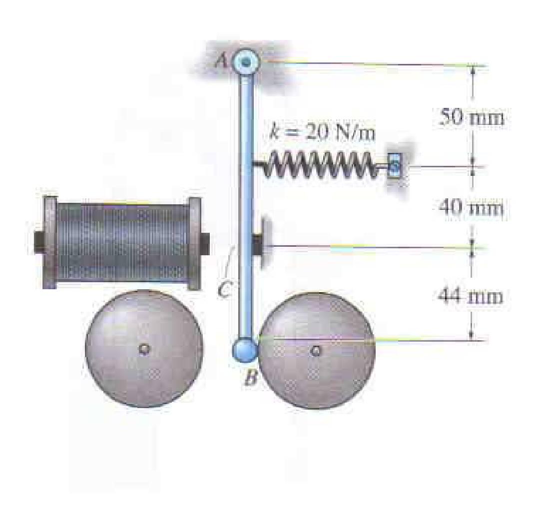

Prob. 17-66

**17-67.** La barra esbelta de 4 kg está soportada horizontalmente por medio de un resorte instalado en $A$ y una cuerda ubicada en $B$. Determine la aceleración angular de la barra y la aceleración del centro de masa de la barra en el instante en que la cuerda en $B$ es cortada. *Sugerencia*: La rigidez del resorte no es necesaria para efectuar el cálculo.



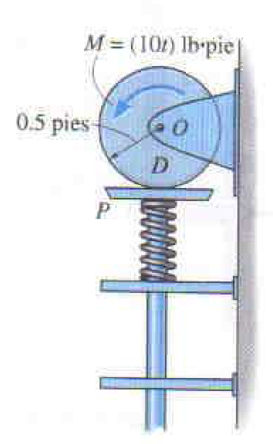

Prob. 17–67

***17-68.** La operación del timbre requiere el uso del electroimán que atrae la barra $AB$ de acero, articulada en el extremo $A$ y que consiste en una barra esbelta de 0.2 kg a la que está unida la bola de acero de 0.04 kg con radio de 6 mm. Si la fuerza atractiva del imán colocado en $C$ es de 0.5 N sobre el centro de la bola cuando el botón es empujado, determine la aceleración angular inicial de la barra. Originalmente el resorte está estirado 20 mm.



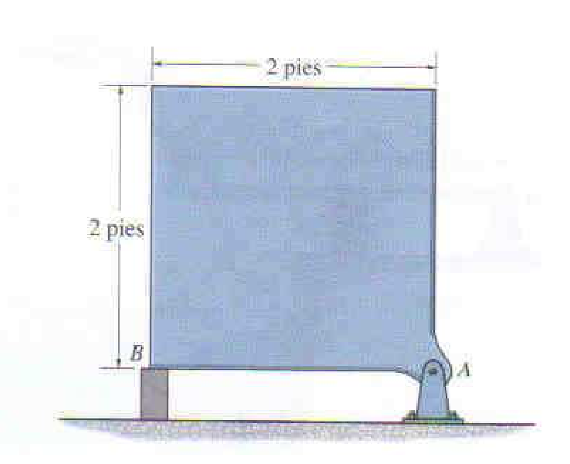

Prob. 17–68

**17-69.** El disco $D$ de 10 lb está sometido a un momento en sentido contrario al de las manecillas del reloj de $M = (10t)$ lb · pie, donde $t$ está en segundos. Determine la velocidad angular del disco 2 s después que se aplica el momento. Debido al resorte, la placa $P$ ejerce una fuerza constante de 100 lb sobre el disco. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el disco y la placa son $\mu_s = 0.3$ y $\mu_k = 0.2$, respectivamente. *Sugerencia*: Primero encuentre el tiempo necesario para que el disco empiece a girar.



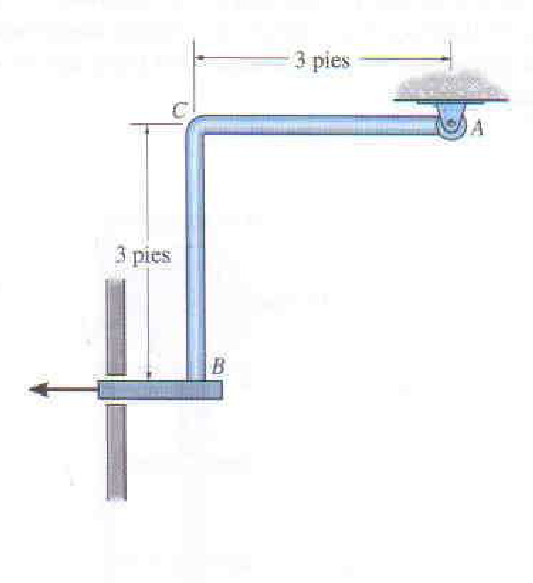

Prob. 17–69

**17-70.** Si el soporte colocado en $B$ es retirado súbitamente, determine las reacciones iniciales en el pasador $A$. La placa tiene un peso de 30 lb.



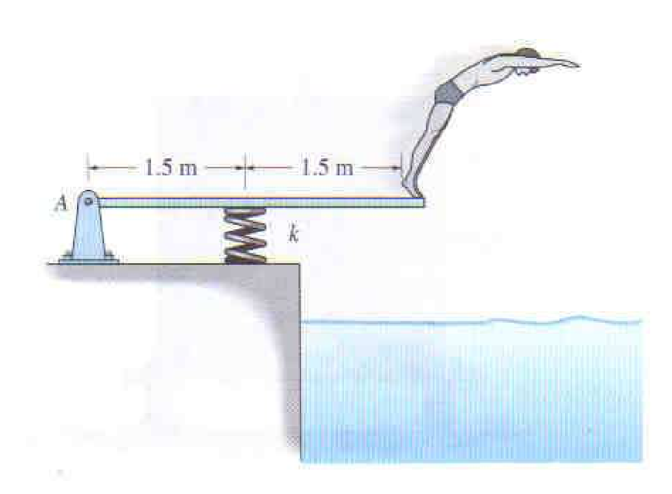

Prob. 17–70

**17-71.** Si el soporte colocado en $B$ es retirado súbitamente, determine la aceleración inicial hacia abajo del punto $C$. Los segmentos $AC$ y $CB$ tienen cada uno un peso de 10 lb.

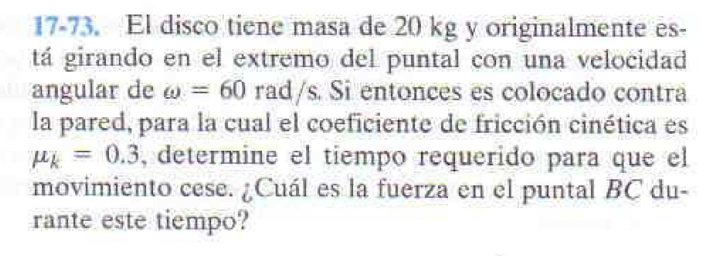



Prob. 17–71

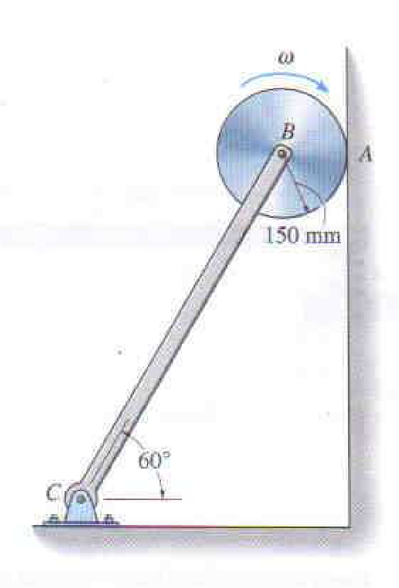
***17-72.** Determine la aceleración angular del trampolín de 25 kg y las componentes de reacción horizontal y vertical en el pasador $A$ en el instante que el hombre salta. Suponga que la tabla es uniforme y rígida, y que en el instante del salto el resorte es comprimido un máximo de 200 mm, $\omega = 0$, y la tabla está en posición horizontal. Considere $k = 7$ kN/m.




Prob. 17–72

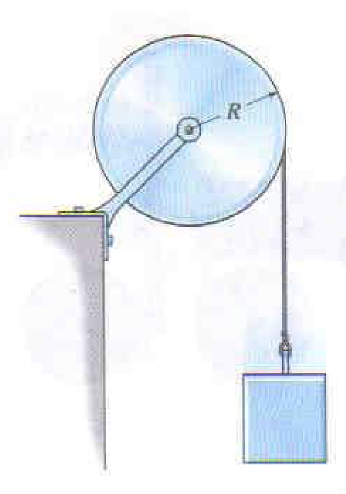


**17-73.** El disco tiene masa de 20 kg y originalmente está girando en el extremo del puntal con una velocidad angular de $\omega = 60$ rad/s. Si entonces es colocado contra la pared, para la cual el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.3$, determine el tiempo requerido para que el movimiento cese. ¿Cuál es la fuerza en el puntal $BC$ durante este tiempo?



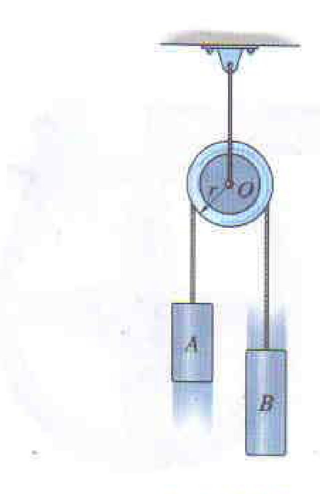

Prob. 17–73

**17-74.** El disco tiene masa $M$ y radio $R$. Si un bloque de masa $m$ está unido a la cuerda, determine la aceleración angular del disco cuando el bloque es liberado del reposo. También, ¿cuál es la velocidad del bloque después que cae una distancia $2R$ partiendo del reposo?



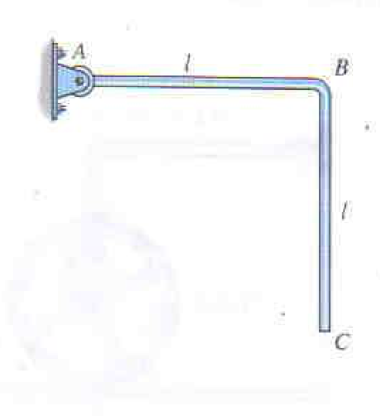

Prob. 17–74

**17-75.** Los dos bloques $A$ y $B$ tienen masa $m_A$ y $m_B$, respectivamente, donde $m_B > m_A$. Si la polea puede ser tratada como un disco de masa $M$, determine la aceleración del bloque $A$. Desprecie la masa de la cuerda y cualquier deslizamiento sobre la polea.



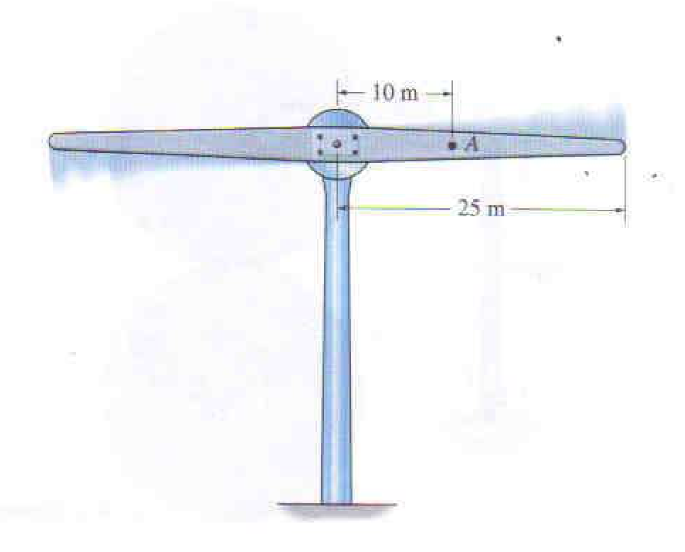

Prob. 17-75

**17-77.** La pieza en escuadra es liberada del reposo en la posición mostrada. Determine el momento flexionante inicial en la junta fija $B$. Cada barra tiene masa $m$ y longitud $l$.



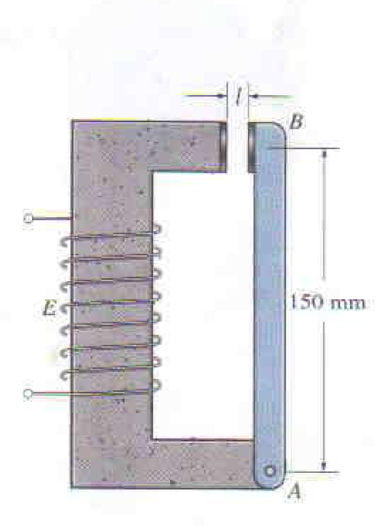

Prob. 17-77

***17-76.** La turbina de peso ligero consiste en un rotor que es impulsado por una torca aplicada en su centro. En el instante en que el rotor está en posición horizontal, tiene velocidad angular de 15 rad/s y aceleración angular de 8 rad/s$^2$ en el sentido de las manecillas del reloj. Determine la fuerza normal interna, la fuerza cortante y el momento en una sección a través de $A$. Suponga que el rotor es una barra esbelta de 50 m de longitud y masa de 3 kg/m.



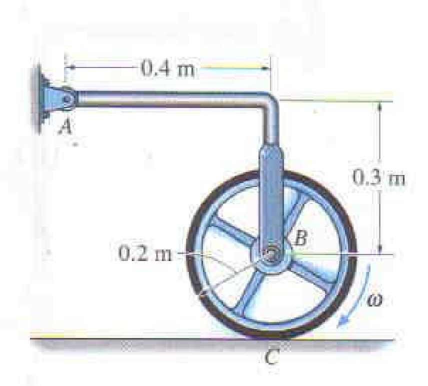

Prob. 17-76

**17-78.** La armadura (barra esbelta) $AB$ tiene masa de 0.2 kg y puede pivotear con respecto al pasador instalado en $A$. El movimiento es controlado por el electroimán $E$, que ejerce una fuerza horizontal atractiva sobre la armadura en $B$ de $F_B = (0.2(10^{-3})l^{-2})$ N, donde $l$ en metros es el entrehierro entre la armadura y el imán en cualquier instante. Si la armadura se encuentra en el plano horizontal y originalmente está en reposo, determine la rapidez del contacto en $B$ en el instante $l = 0.01$ m. Originalmente $l = 0.02$ m.

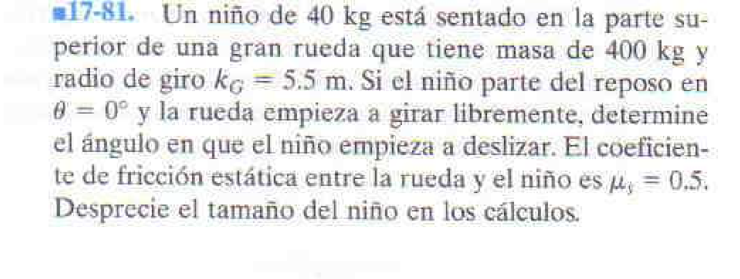



Prob. 17-78

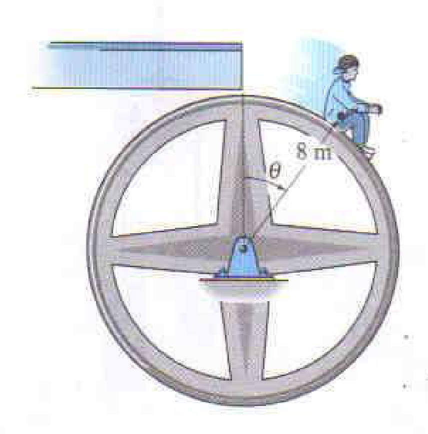
**17-79.** La rueda tiene masa de 25 kg y radio de giro $k_B = 0.15$ m. Originalmente está girando a $\omega_1 = 40$ rad/s. Si se coloca sobre el suelo, para el cual el coeficiente de fricción cinética es $\mu_C = 0.5$, determine el tiempo requerido para que el movimiento cese. ¿Cuáles son las componentes de reacción horizontal y vertical que el pasador situado en $A$ ejerce sobre $AB$ durante este tiempo? Desprecie la masa de $AB$.




Prob. 17–79

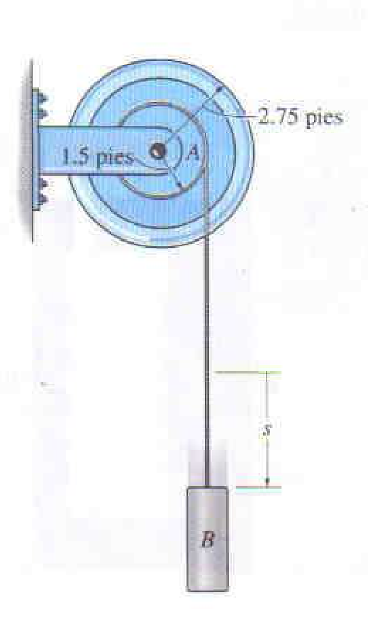


**■17-81.** Un niño de 40 kg está sentado en la parte superior de una gran rueda que tiene masa de 400 kg y radio de giro $k_G = 5.5$ m. Si el niño parte del reposo en $\theta = 0°$ y la rueda empieza a girar libremente, determine el ángulo en que el niño empieza a deslizar. El coeficiente de fricción estática entre la rueda y el niño es $\mu_s = 0.5$. Desprecie el tamaño del niño en los cálculos.



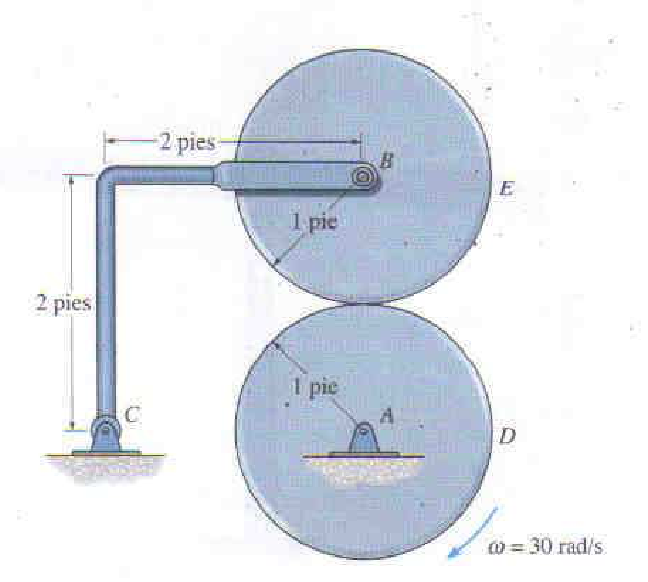

Prob. 17–81

***17-80.** La cuerda está enrollada alrededor del núcleo interno del carrete. Si un bloque $B$ de 5 lb es suspendido de la cuerda y liberado del reposo, determine la velocidad angular del carrete cuando $t = 3$ s. Desprecie la masa de la cuerda. El carrete tiene un peso de 180 lb y radio de giro con respecto al eje $A$ de $k_A = 1.25$ pies. Resuelva el problema de dos modos: primero, considerando al "sistema" del bloque y el carrete, y luego considerando al bloque y al carrete por separado.



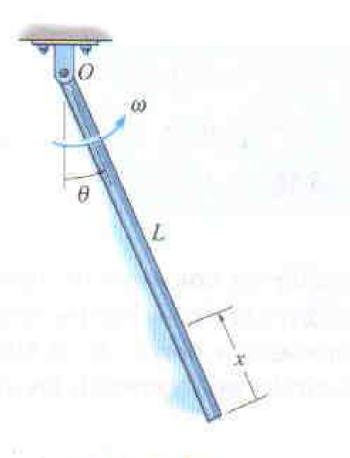

Prob. 17–80

**17-82.** El disco $D$ gira con velocidad angular constante de 30 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj. El disco $E$ tiene un peso de 60 lb e inicialmente está en reposo cuando es puesto en contacto con $D$. Determine el tiempo requerido para que el disco $E$ alcance la misma velocidad angular que el disco $D$. El coeficiente de fricción cinética entre los dos discos es $\mu_k = 0.3$. Desprecie el peso de la barra $BC$.



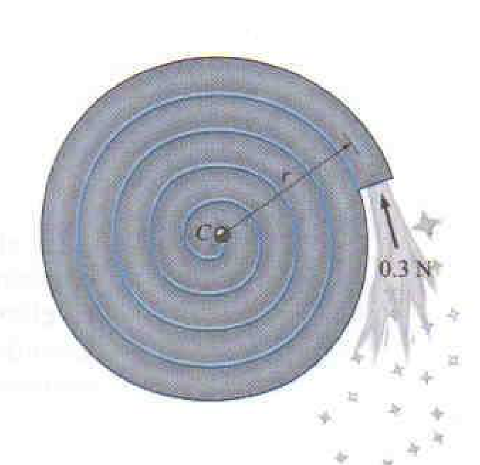

Prob. 17–82

**17-83.** La barra tiene un peso por longitud de $w$. Si está girando en el plano vertical a razón constante $\boldsymbol{\omega}$ con respecto al punto $O$, determine la fuerza normal, la fuerza cortante y el momento flexionante en función de $x$ y $\theta$.



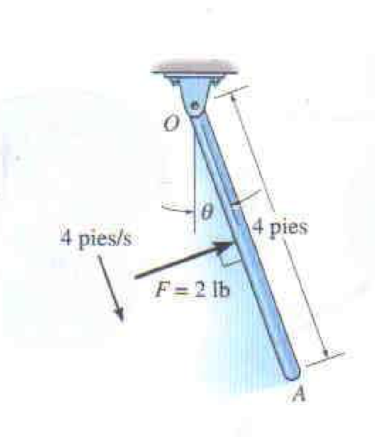

Prob. 17-83

**17-85.** El disco $D$ de 10 kg está sometido a un momento $M = (10t)$ lb · pie en sentido contrario al de las manecillas del reloj, donde $t$ está en segundos. Determine la velocidad angular del disco 2 s después de aplicado el momento. Debido al resorte, la placa $P$ ejerce una fuerza constante de 100 lb sobre el disco. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el disco y la placa son $\mu_s = 0.3$ y $\mu_k = 0.2$, respectivamente. *Sugerencia*: Primero encuentre el tiempo necesario para que el disco empiece a girar.



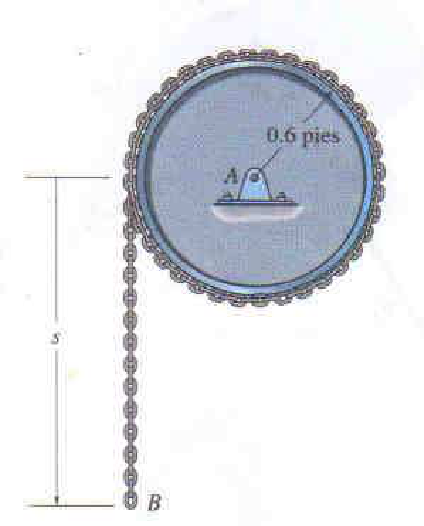

Prob. 17-85

***17-84.** Una fuerza $F = 2$ lb es aplicada perpendicularmente al eje de la barra de 5 lb y se mueve desde $O$ hasta $A$ a razón constante de 4 pies/s. Si la barra está en reposo cuando $\theta = 0°$ y $\mathbf{F}$ está en $O$ cuando $t = 0$, determine la velocidad angular de la barra en el instante en que la fuerza está en $A$. ¿Qué ángulo ha girado la barra cuando esto ocurre? La barra gira en el *plano horizontal*.




Prob. 17-84

**17-86.** El tambor tiene un peso de 50 lb y radio de giro $k_A = 0.4$ pies. Una cadena de 35 pies de longitud con peso de 2 lb/pie está enrollada alrededor de la superficie exterior del tambor de manera que una cadena de longitud $s = 3$ pies queda suspendida como se muestra. Si el tambor está originalmente en reposo, determine su velocidad angular después que el extremo $B$ ha descendido a $s = 13$ pies. Desprecie el espesor de la cadena.




Prob. 17-86

## 17.5 Ecuaciones de movimiento: Movimiento plano general

El cuerpo rígido mostrado en la figura 17-20*a* está sometido a un movimiento plano general causado por la fuerza y el momento de par aplicados externamente. Los diagramas de cuerpo libre y cinético para el cuerpo se muestran en la figura 17-20*b*. Al elegir, como se muestra, un sistema coordenado inercial $x, y$, las tres ecuaciones de movimiento pueden ser escritas como

$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$
$$\Sigma F_y = m(a_G)_y \qquad (17\text{–}17)$$
$$\Sigma M_G = I_G\alpha$$

En algunos problemas puede ser conveniente sumar momentos con respecto a algún punto $P$ diferente de $G$. Esto se hace usualmente para eliminar fuerzas desconocidas a partir de la suma de momentos. Cuando se usan en este sentido más general, las tres ecuaciones de movimiento son

$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$
$$\Sigma F_y = m(a_G)_y \qquad (17\text{–}18)$$
$$\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$$

Aquí $\Sigma(\mathcal{M}_k)_P$ representa la suma de momentos de $I_G\boldsymbol{\alpha}$ y $m\mathbf{a}_G$ (o sus componentes) con respecto a $P$ según son determinados por los datos que aparecen en el diagrama cinético.

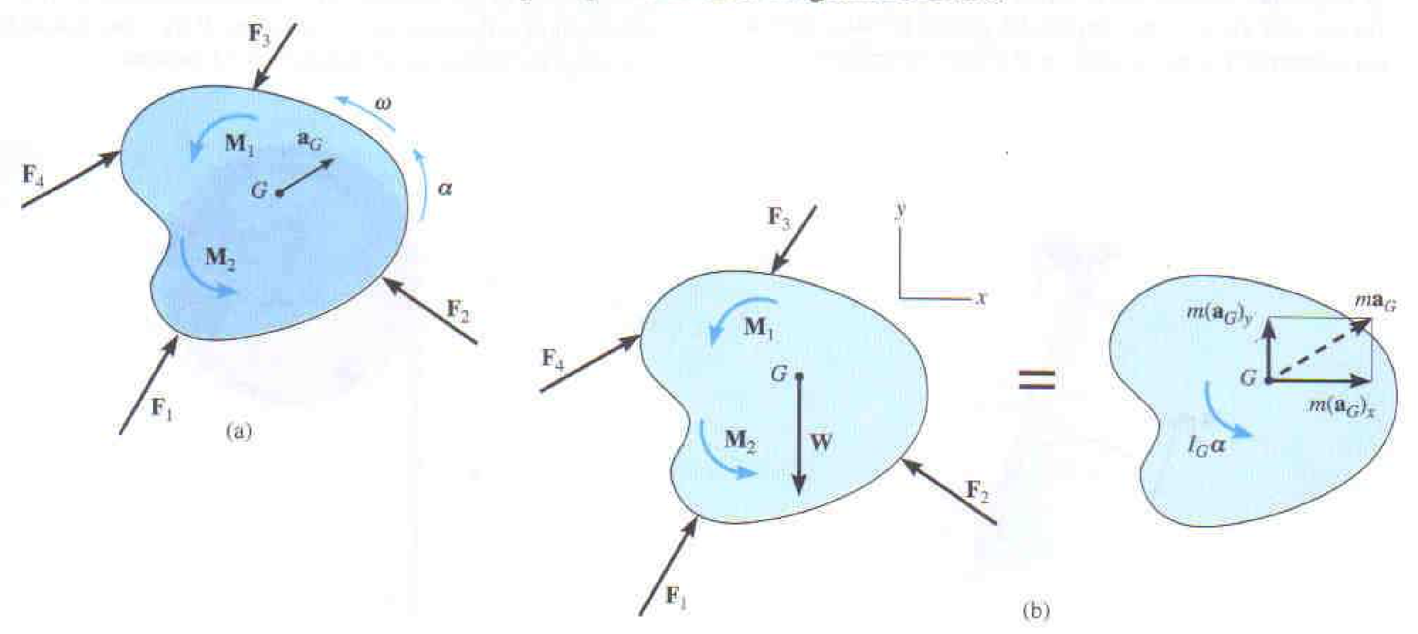



Fig. 17–20

**Problemas de rodamiento con fricción.** Hay una clase de problemas de cinética plana que merece mención especial. Estos problemas implican ruedas, cilindros o cuerpos de forma similar, que ruedan sobre una superficie plana *rugosa*. Debido a las cargas aplicadas, no se puede saber si el cuerpo *rueda sin deslizar*, o si *se desliza al rodar*. Por ejemplo, considere el disco homogéneo mostrado en la figura 17-21*a*, que tiene masa $m$ y está sometido a una fuerza $\mathbf{P}$ horizontal conocida. El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 17-21*b*. Como $\mathbf{a}_G$ está dirigida hacia la derecha y $\boldsymbol{\alpha}$ es en el sentido de las manecillas del reloj, tenemos

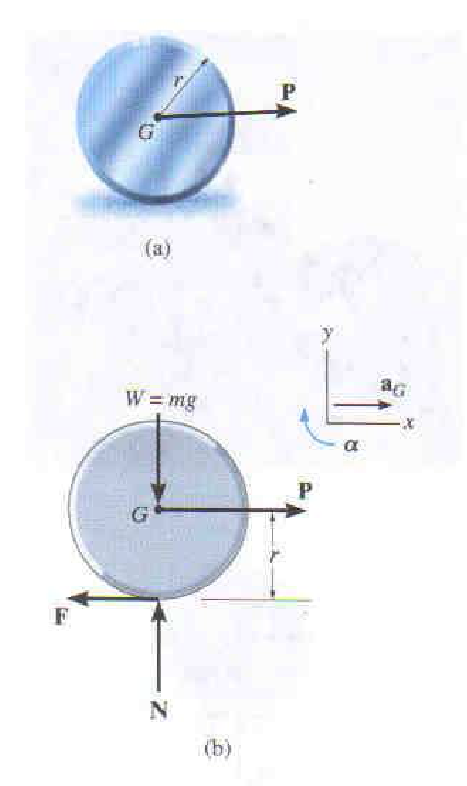



Fig. 17–21

$$\stackrel{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = m(a_G)_x; \qquad P - F = ma_G \qquad (17\text{–}19)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y; \qquad N - mg = 0 \qquad (17\text{–}20)$$

$$\circlearrowright + \Sigma M_G = I_G\alpha; \qquad Fr = I_G\alpha \qquad (17\text{–}21)$$

Se necesita una cuarta ecuación ya que estas *tres ecuaciones* contienen *cuatro incógnitas*: $F$, $N$, $\alpha$ y $a_G$.

**No deslizamiento.** Si la fuerza de fricción $F$ es lo suficientemente grande como para permitir que el disco ruede sin deslizar, entonces $a_G$ puede ser relacionada con $\alpha$ mediante la ecuación cinemática,*

$$(\circlearrowright +) \qquad a_G = \alpha r \qquad (17\text{–}22)$$

Las cuatro incógnitas son determinadas *resolviendo simultáneamente* las ecuaciones de la 17-19 a la 17-22. Cuando se obtiene la solución, el supuesto de no deslizamiento debe ser *revisado*. Recuerde que no ocurre deslizamiento si $F \leq \mu_s N$, donde $\mu_s$ es el coeficiente de fricción estática. Si la desigualdad es satisfecha, el problema está resuelto. Sin embargo, cuando $F > \mu_s N$, el problema debe *volverse a plantear*, ya que el disco desliza al rodar.

**Deslizamiento.** En el caso de que se tenga deslizamiento, $\alpha$ y $a_G$ son *independientes una de otra*, de manera que la ecuación 17-22 no es aplicable. En vez de ello, la magnitud de la fuerza de fricción es relacionada con la magnitud de la fuerza normal usando el coeficiente de fricción cinética $\mu_k$, esto es,

$$F = \mu_k N \qquad (17\text{–}23)$$

En este caso, se usan las ecuaciones de la 17-19 a la 17-21 y la 17-23 para encontrar la solución. Es importante recordar que siempre que se aplican las ecuaciones 17-22 o 17-23 es necesario mantener la consistencia en el sentido direccional de los vectores. En el caso de la ecuación 17-22, $\mathbf{a}_G$ debe estar dirigida hacia la derecha cuando $\boldsymbol{\alpha}$ es en el sentido de las manecillas del reloj, ya que el movimiento rodante así lo requiere. Y en la ecuación 17-23, $\mathbf{F}$ debe estar dirigida hacia la izquierda para prevenir el supuesto movimiento de deslizamiento hacia la derecha, figura 17-21*b*. Por otra parte, si estas ecuaciones *no se usan* para encontrar la solución, esos vectores pueden tener *cualquier* sentido direccional supuesto. Entonces, si el valor numérico calculado de estas cantidades es negativo, los vectores actúan en sus sentidos de dirección opuestos. Los ejemplos 17.15 y 17.16 ilustran numéricamente estos conceptos.

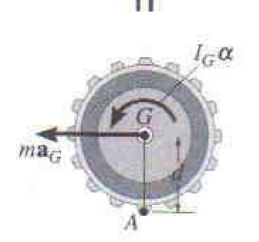


*Vea el ejemplo 16.3 o el 16.14.






=




Al moverse hacia delante el compactador de suelo, el rodillo tiene movimiento plano general. Las fuerzas mostradas en el diagrama de cuerpo libre del rodillo causan los efectos que ilustra el diagrama cinético. Si los momentos se suman con respecto al centro de masa $G$, entonces $\Sigma M_G = I_G\alpha$. Sin embargo, cuando los momentos se suman con respecto al punto $A$, entonces $\circlearrowleft+\Sigma M_A = I_G\alpha + (ma_G)d$.

## PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

Los problemas de cinética que implican movimiento plano general de un cuerpo rígido pueden ser resueltos usando el siguiente procedimiento.

### *Diagrama de cuerpo libre.*

- Establezca el sistema coordenado inercial $x, y$ y dibuje el diagrama de cuerpo libre para el cuerpo.
- Especifique la dirección y el sentido de la aceleración del centro de masa, $\mathbf{a}_G$, y la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del cuerpo.
- Calcule el momento de inercia $I_G$.
- Identifique las incógnitas en el problema.
- Si se decide que va a usarse la ecuación de movimiento rotacional $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$, entonces dibuje el diagrama cinético para ayudarse a "visualizar" los "momentos" desarrollados por las componentes $m(\mathbf{a}_G)_x$, $m(\mathbf{a}_G)_y$ e $I_G\boldsymbol{\alpha}$ al escribir los términos en la suma de momentos $\Sigma(\mathcal{M}_k)_P$.

### *Ecuaciones de movimiento.*

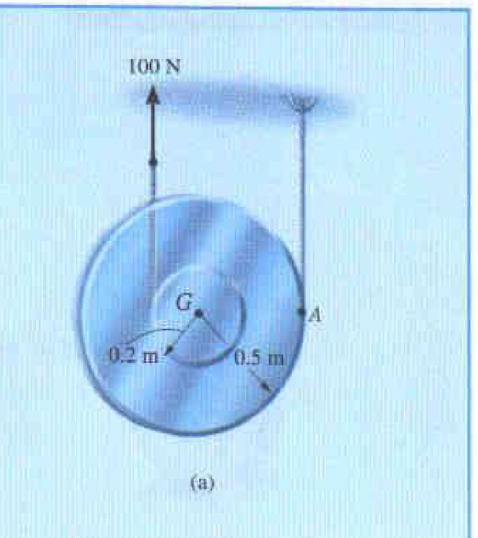
- Aplique las tres ecuaciones de movimiento de acuerdo con la convención de signos establecida.
- Cuando está presente la fricción, existe la posibilidad de que el movimiento sea sin deslizamiento o sin vuelco. Debe considerarse cada posibilidad de movimiento.

### *Cinemática.*

- Use cinemática si no puede obtenerse una solución completa estrictamente a partir de las ecuaciones de movimiento.
- Si el movimiento del cuerpo está restringido a causa de sus soportes, pueden obtenerse ecuaciones adicionales usando $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$, la cual relaciona las aceleraciones de dos puntos cualesquiera $A$ y $B$ sobre el cuerpo.
- Cuando una rueda, un disco, un cilindro o una bola *ruedan sin deslizar*, entonces $a_G = \alpha r$.

## EJEMPLO 17.14

El carrete que aparece en la figura 17-22*a* tiene masa de 8 kg y radio de giro $k_G = 0.35$ m. Si las cuerdas de masa insignificante están enrolladas alrededor de su cubo interior y su borde exterior como se muestra, determine la aceleración angular del carrete.



(a)

### Solución I

***Diagrama de cuerpo libre.*** Figura 17-22*b*. La fuerza de 100 N causa que $\mathbf{a}_G$ actúe hacia arriba. Además, $\boldsymbol{\alpha}$ actúa en el sentido de las manecillas del reloj, ya que el carrete se enrolla alrededor de la cuerda en $A$.

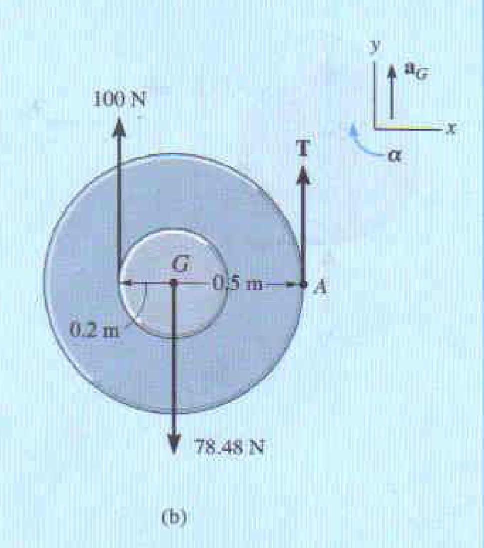
Hay tres incógnitas $T$, $a_G$ y $\alpha$. El momento de inercia del carrete con respecto a su centro de masa es

$$I_G = mk_G^2 = 8\text{ kg}(0.35\text{ m})^2 = 0.980\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

***Ecuaciones de movimiento.***

$$+\uparrow\Sigma F_y = m(a_G)_y; \qquad T + 100\text{ N} - 78.48\text{ N} = (8\text{ kg})a_G \qquad (1)$$

$$\circlearrowright+\Sigma M_G = I_G\alpha; \qquad 100\text{ N}(0.2\text{ m}) - T(0.5\text{ m}) = (0.980\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\alpha \qquad (2)$$



(b)

***Cinemática.*** Se obtiene una solución completa cuando se usa cinemática para relacionar $a_G$ con $\alpha$. En este caso el carrete "rueda sin deslizar" sobre la cuerda en $A$. Por consiguiente, podemos usar los resultados de los ejemplos 16.3 o 16.14, de modo que

$$(\circlearrowright+)a_G = \alpha r, \qquad a_G = 0.5\alpha \qquad (3)$$

Resolviendo las ecuaciones 1, 2 y 3, tenemos

$$\alpha = 10.3\text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$
$$a_G = 5.16\text{ m/s}^2$$
$$T = 19.8\text{ N}$$

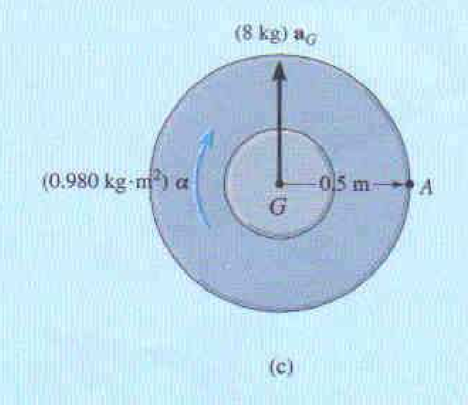
### Solución II

***Ecuaciones de movimiento.*** Podemos eliminar la $T$ desconocida sumando momentos con respecto al punto $A$. A partir de los diagramas de cuerpo libre y cinético, figuras 17-22*b* y 17-22*c*, tenemos

$$\circlearrowright+\Sigma M_A = \Sigma(\mathcal{M}_k)_A; \qquad 100\text{ N}(0.7\text{ m}) - 78.48\text{ N}(0.5\text{ m})$$
$$= (0.980\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\alpha + [(8\text{ kg})a_G](0.5\text{ m})$$

Usando la ecuación (3),

$$\alpha = 10.3\text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

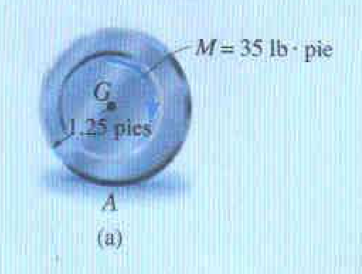


(c)

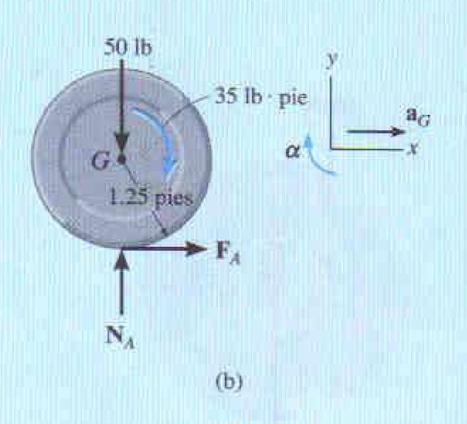
**Fig. 17-22**

## EJEMPLO 17.15

La rueda de 50 lb mostrada en la figura 17-23*a* tiene radio de giro $k_G = 0.70$ pies. Si se le aplica un momento de par de 35 lb · pie, determine la aceleración de su centro de masa *G*. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre la rueda y el plano en *A* son $\mu_s = 0.3$ y $\mu_k = 0.25$, respectivamente.



(a)



(b)

Fig. 17-23

### Solución

***Diagrama de cuerpo libre.*** Por inspección de la figura 17-23*b*, se aprecia que el momento de par causa que la rueda tenga una aceleración angular de $\boldsymbol{\alpha}$ en el sentido de las manecillas del reloj. Como resultado, la aceleración del centro de masa, $\mathbf{a}_G$, está dirigida hacia la derecha. El momento de inercia es

$$I_G = mk_G^2 = \frac{50 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}(0.70 \text{ pies})^2 = 0.761 \text{ slug} \cdot \text{pies}^2$$

Las incógnitas son $N_A$, $F_A$, $a_G$ y $\alpha$.

***Ecuaciones de movimiento.***

$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = m(a_G)_x; \qquad F_A = \frac{50 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2} a_G \tag{1}$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y; \qquad N_A - 50 \text{ lb} = 0 \tag{2}$$

$$\circlearrowright + \Sigma M_G = I_G\alpha; \; 35 \text{ lb} \cdot \text{pies} - 1.25 \text{ pies}(F_A) = (0.761 \text{ slug} \cdot \text{pies}^2)\alpha \tag{3}$$

Se requiere de una cuarta ecuación para tener la solución completa.

***Cinemática (Sin deslizamiento).*** Si se asume esta suposición, entonces

$$(\circlearrowright +) \qquad a_G = (1.25 \text{ pies})\alpha \tag{4}$$

Resolviendo las ecuaciones de la 1 a la 4,

$$N_A = 50.0 \text{ lb} \qquad F_A = 21.3 \text{ lb}$$
$$\alpha = 11.0 \text{ rad/s}^2 \qquad a_G = 13.7 \text{ pies/s}^2$$

La suposición original de que no hay deslizamiento requiere que $F_A \leq \mu_s N_A$. Sin embargo, como 21.3 lb > 0.3(50 lb) = 15 lb, la rueda desliza al rodar.

***(Deslizamiento).*** La ecuación 4 no es válida, por lo que $F_A = \mu_k N_A$, o

$$F_A = 0.25 N_A \tag{5}$$

Resolviendo las ecuaciones 1, 2, 3 y 5 resulta

$$N_A = 50.0 \text{ lb} \qquad F_A = 12.5 \text{ lb}$$
$$\alpha = 25.5 \text{ rad/s}^2$$
$$a_G = 8.05 \text{ pies/s}^2 \rightarrow \qquad \textit{Resp.}$$

## EJEMPLO 17.16

El poste uniforme esbelto mostrado en la figura 17-24*a* tiene masa de 100 kg y momento de inercia $I_G = 75\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$. Si los coeficientes de fricción estática y cinética entre el extremo del poste y la superficie son $\mu_s = 0.3$ y $\mu_k = 0.25$, respectivamente, determine la aceleración angular del poste en el instante que la fuerza horizontal de 400 N es aplicada. El poste está originalmente en reposo.

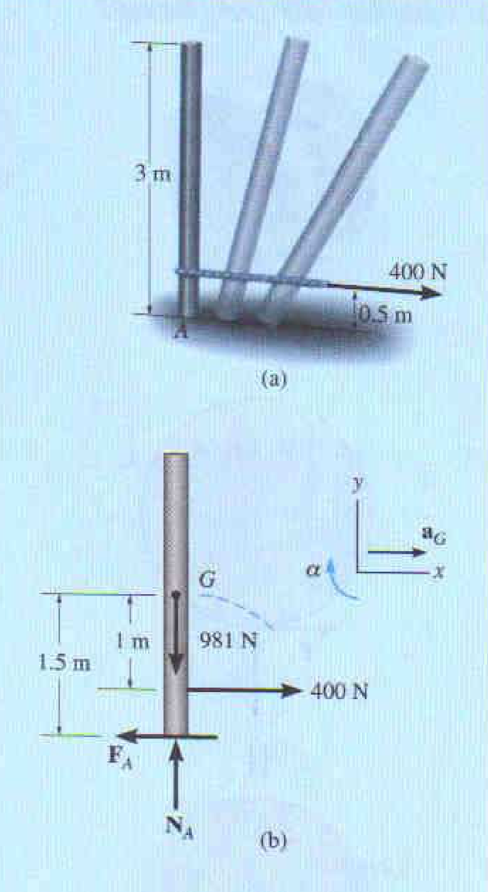



Fig. 17-24

### Solución

***Diagrama de cuerpo libre.*** Figura 17-24*b*. La trayectoria del movimiento del centro de masa $G$ será conforme a una trayectoria curva desconocida con radio de curvatura $\rho$, que inicialmente es paralela al eje $y$. No hay componente normal o $y$ de aceleración ya que el poste está originalmente en reposo, esto es, $\mathbf{v}_G = \mathbf{0}$, de manera que $(a_G)_y = v_G^2/\rho = 0$. Supondremos que el centro de masa acelera hacia la derecha y que el poste tiene una aceleración angular de $\boldsymbol{\alpha}$ en el sentido de las manecillas del reloj. Las incógnitas son $N_A$, $F_A$, $a_G$ y $\alpha$.

***Ecuaciones de movimiento.***

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = m(a_G)_x; \qquad 400\ \text{N} - F_A = (100\ \text{kg})a_G \qquad (1)$$

$$+\uparrow \Sigma F_y = m(a_G)_y; \qquad N_A - 981\ \text{N} = 0 \qquad (2)$$

$$\curvearrowright + \Sigma M_G = I_G\alpha; \qquad F_A(1.5\ \text{m}) - 400\ \text{N}(1\ \text{m}) = (75\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)\alpha \qquad (3)$$

Se requiere de una cuarta ecuación para lograr la solución completa.

***Cinemática (Sin deslizamiento).*** En este caso, el punto $A$ actúa como "pivote" de manera que si $\alpha$ es en el sentido de las manecillas del reloj, entonces $a_G$ está dirigida hacia la derecha.

$$\curvearrowright + a_G = \alpha r_{AG}; \qquad a_G = (1.5\ \text{m})\alpha \qquad (4)$$

Resolviendo las ecuaciones de la 1 a la 4 resulta

$$N_A = 981\ \text{N} \qquad F_A = 300\ \text{N}$$
$$a_G = 1\ \text{m/s}^2 \qquad \alpha = 0.667\ \text{rad/s}^2$$

Probar la suposición original de no deslizamiento requiere que $F_A \le \mu_s N_A$. Sin embargo, $300\ \text{N} > 0.3(981\ \text{N}) = 294\ \text{N}$. (Deslizamiento en $A$.)

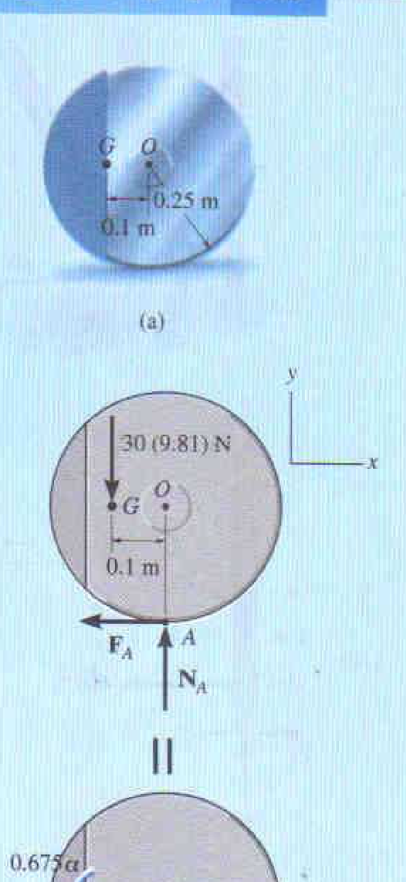
***(Deslizamiento).*** Para este caso la ecuación 4 *no* es aplicable. Se debe usar la ecuación de fricción $F_A = \mu_k N_A$. Por tanto,

$$F_A = 0.25 N_A \qquad (5)$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones 1, 2, 3 y 5 resulta

$$N_A = 981\ \text{N} \qquad F_A = 245\ \text{N} \qquad a_G = 1.55\ \text{m/s}^2$$
$$\alpha = -0.428\ \text{rad/s}^2 = 0.428\ \text{rad/s}^2 \circlearrowleft \qquad \textit{Resp.}$$

## EJEMPLO 17.17





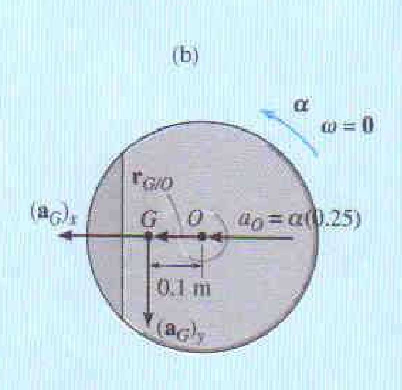




Fig. 17-25

La rueda de 30 kg mostrada en la figura 17-25*a* tiene su centro de masa en *G* y radio de giro $k_G = 0.15$ m. Si originalmente la rueda está en reposo y es liberada desde la posición que se muestra, determine su aceleración angular. No ocurre ningún deslizamiento.

### Solución

***Diagramas de cuerpo libre y cinético.*** Las dos incógnitas $\mathbf{F}_A$ y $\mathbf{N}_A$ mostradas en el diagrama de cuerpo libre, figura 17-25*b*, pueden ser eliminadas del análisis sumando momentos con respecto al punto *A*. El diagrama cinético acompaña la solución para ilustrar la aplicación de $\Sigma(\mathcal{M}_k)_A$. Como el punto *G* se mueve conforme a una trayectoria curva, las dos componentes $m(\mathbf{a}_G)_x$ y $m(\mathbf{a}_G)_y$ se muestran en el diagrama cinético, figura 17-25*b*.

El momento de inercia es

$$I_G = mk_G^2 = 30(0.15)^2 = 0.675 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

Hay cinco incógnitas, $N_A$, $F_A$, $(a_G)_x$, $(a_G)_y$ y $\alpha$.

***Ecuación de movimiento.*** Aplicando la ecuación rotacional de movimiento con respecto al punto *A* para eliminar $N_A$ y $F_A$, tenemos

$$\circlearrowleft + \Sigma M_A = \Sigma(\mathcal{M}_k)_A; \quad 30(9.81)\text{ N}(0.1\text{ m}) =$$
$$(0.675 \text{ kg}\cdot\text{m}^2)\alpha + (30\text{ kg})(a_G)_x(0.25\text{ m}) + (30\text{ kg})(a_G)_y(0.1\text{ m}) \quad (1)$$

Hay tres incógnitas en esta ecuación: $(a_G)_x$, $(a_G)_y$ y $\alpha$.

***Cinemática.*** Por medio de cinemática, $(a_G)_x$ y $(a_G)_y$ se relacionan con $\alpha$. Como se muestra en la figura 17-25*c*, estos vectores deben tener el mismo sentido de dirección que los vectores correspondientes en el diagrama cinético ya que buscamos una solución simultánea con la ecuación 1. Como no ocurre deslizamiento, $a_O = \alpha r = \alpha(0.25\text{ m})$, dirigida hacia la izquierda, figura 17-25*c*. Además, $\omega = 0$, ya que originalmente la rueda está en reposo. Aplicando la ecuación de aceleración al punto *O* (punto base) y al punto *G*, tenemos

$$\mathbf{a}_G = \mathbf{a}_O + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{G/O} - \omega^2\mathbf{r}_{G/O}$$
$$-(a_G)_x\mathbf{i} - (a_G)_y\mathbf{j} = -\alpha(0.25)\mathbf{i} + (\alpha\mathbf{k}) \times (-0.1\mathbf{i}) - \mathbf{0}$$

Desarrollando e igualando las respectivas componentes **i** y **j**, tenemos

$$(a_G)_x = \alpha(0.25) \quad (2)$$
$$(a_G)_y = \alpha(0.1) \quad (3)$$

Resolviendo las ecuaciones 1, 2 y 3, resulta

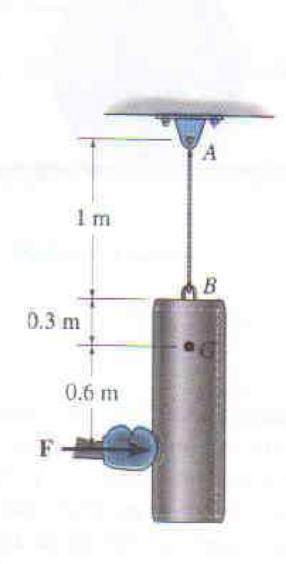
$$\alpha = 10.3 \text{ rad/s}^2 \circlearrowleft \qquad \textit{Resp.}$$
$$(a_G)_x = 2.58 \text{ m/s}^2$$
$$(a_G)_y = 1.03 \text{ m/s}^2$$

Como un ejercicio, demuestre que $F_A = 77.4$ N y $N_A = 263$ N.

# PROBLEMAS

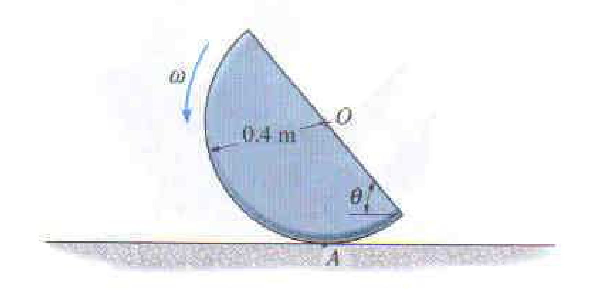
**17-87.** Si el disco mostrado en la figura 17-21*a rueda sin deslizar*, demuestre que cuando los momentos se suman con respecto al centro instantáneo de velocidad cero, *CI*, es posible usar la ecuación de momentos $\Sigma M_{CI} = I_{CI}\alpha$, donde $I_{CI}$ representa el momento de inercia del disco calculado con respecto al eje instantáneo de velocidad cero.

***17-88.** El saco de arena de 20 kg tiene un radio de giro con respecto a su centro de masa $G$ de $k_G = 0.4$ m. Si está inicialmente en reposo y sometido a una fuerza horizontal $F = 30$ N, determine la aceleración angular inicial del saco y la tensión en el cable $AB$ de soporte.



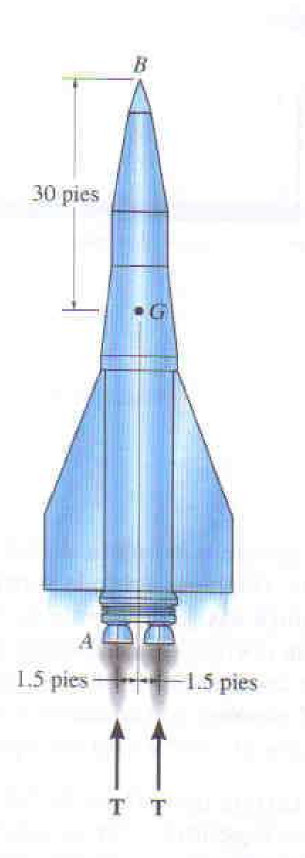

Prob. 17–88

**17-89.** El disco semicircular con masa de 10 kg está girando a $\omega = 4$ rad/s en el instante $\theta = 60°$. Si el coeficiente de fricción estática en $A$ es $\mu_s = 0.5$, determine si el disco desliza en este instante.



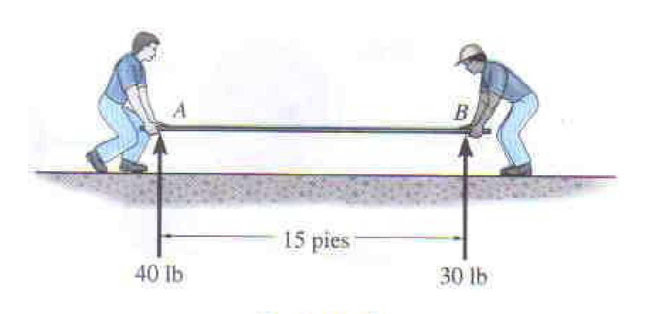

Prob. 17–89

**17-90.** Cuando es disparado el cohete tiene un peso de 20 000 lb, centro de masa en $G$, y radio de giro con respecto al centro de masa de $k_G = 21$ pies. Cada uno de sus dos motores proporciona un empuje $T = 50\,000$ lb. En un instante dado, el motor $A$ deja de operar repentinamente. Determine la aceleración angular del cohete y la aceleración de su nariz $B$.



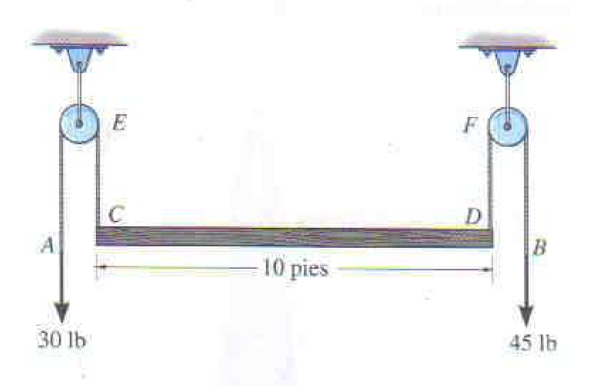

Prob. 17–90

**17-91.** Dos hombres ejercen fuerzas verticales constantes de 40 y 30 lb, respectivamente en los extremos $A$ y $B$ de un tablón uniforme que tiene un peso de 50 lb. Si el tablón está originalmente en reposo, determine la aceleración de su centro y su aceleración angular. Suponga que el tablón es una barra esbelta.




Prob. 17–91

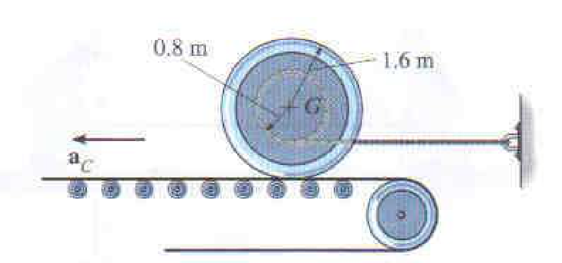
*17-92. La tabla uniforme de 50 lb está suspendida de cuerdas colocadas en $C$ y $D$. Si estas cuerdas están sometidas a fuerzas constantes de 30 y 45 lb, respectivamente, determine la aceleración del centro de la tabla y la aceleración angular de ésta. Suponga que la tabla es una placa delgada. Desprecie la masa de las poleas ubicadas en $E$ y $F$.




Prob. 17–92

17-93. El carrete tiene masa de 500 kg y radio de giro $k_G = 1.30$ m. Descansa sobre la superficie de una banda transportadora cuyo coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.5$ y su coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.4$. Si la banda acelera a $a_C = 1$ m/s$^2$, determine la tensión inicial en el alambre y la aceleración angular del carrete. Originalmente el carrete está en reposo.

17-94. El carrete tiene masa de 500 kg y radio de giro $k_G = 1.30$ m. Descansa sobre la superficie de una banda transportadora cuyo coeficiente de fricción estática es $\mu_s = 0.5$. Determine la máxima aceleración $a_C$ posible de la banda sin que el carrete resbale. ¿Cuáles son la tensión inicial en el alambre y la aceleración angular del carrete? Originalmente el carrete está en reposo.

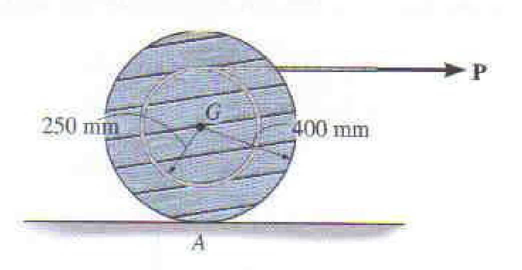



Probs. 17–93/94

17-95. El carrete tiene masa de 100 kg y radio de giro $k_G = 0.3$ m. Si los coeficientes de fricción estática y cinética en $A$ son $\mu_s = 0.2$ y $\mu_k = 0.15$, respectivamente, determine la aceleración angular del carrete si $P = 50$ N.

*17-96. Resuelva el problema 17-95 si la cuerda y la fuerza $P = 50$ N están dirigidas verticalmente hacia arriba.

17-97. El carrete tiene masa de 100 kg y radio de giro $k_G = 0.3$ m. Si los coeficientes de fricción estática y cinética en $A$ son $\mu_s = 0.2$ y $\mu_k = 0.15$, respectivamente, determine la aceleración angular del carrete si $P = 600$ N.



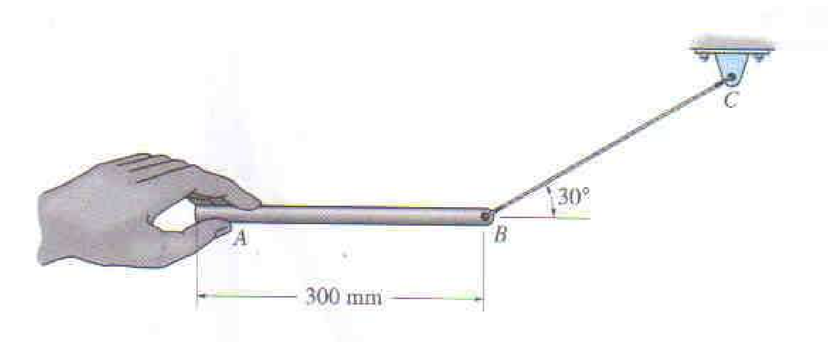

Probs. 17–95/96/97

17-98. El cuerpo superior del maniquí para pruebas de accidentes tiene masa de 75 lb, un centro de gravedad en $G$, y radio de giro con respecto a $G$ de $k_G = 0.7$ pies. Por medio del cinturón de seguridad, este segmento del cuerpo se supone conectado mediante un pasador al asiento del automóvil en el punto $A$. Si un choque ocasiona que el automóvil desacelere a 50 pies/s$^2$, determine la velocidad angular del cuerpo cuando éste ha girado $\theta = 30°$.




Prob. 17–98

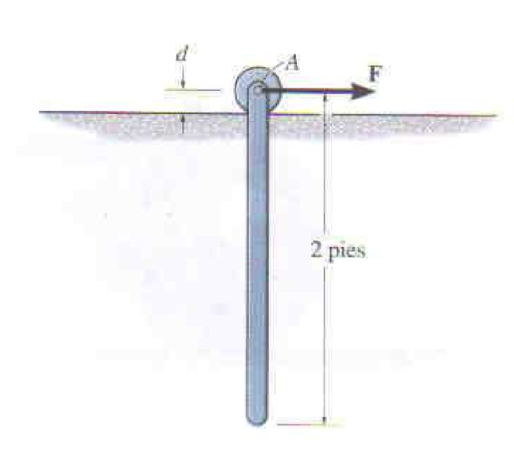
**17-99.** La barra esbelta de 2 kg está soportada mediante la cuerda $BC$ y luego es liberada del reposo en el punto $A$. Determine la aceleración angular inicial de la barra y la tensión en la cuerda.




Prob. 17–99

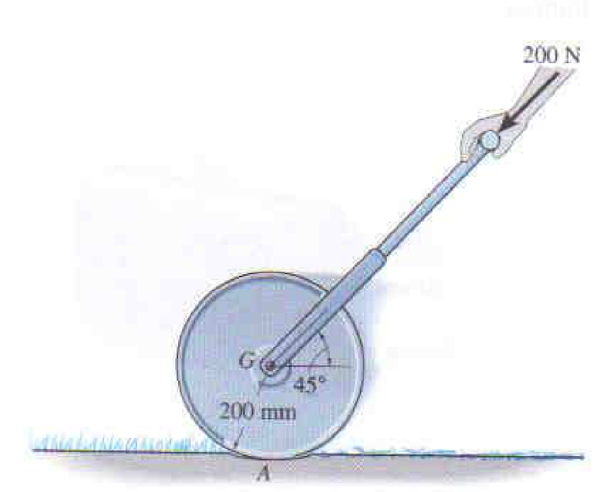
***17-100.** Una barra uniforme con peso de 10 lb está soportada mediante un pasador colocado en el punto $A$ de un rodillo que se mueve sobre una vía horizontal. Si la barra está originalmente en reposo, y una fuerza horizontal $F$ = 15 lb es aplicada al rodillo, determine la aceleración de éste. Desprecie la masa del rodillo y su tamaño $d$ en los cálculos.

**17-101.** Resuelva el problema 17-100 suponiendo que el rodillo ubicado en $A$ es reemplazado por un bloque deslizable con masa insignificante. El coeficiente de fricción cinética entre el bloque y la vía es $\mu_k = 0.2$. Desprecie la dimensión $d$ y el tamaño del bloque en los cálculos.



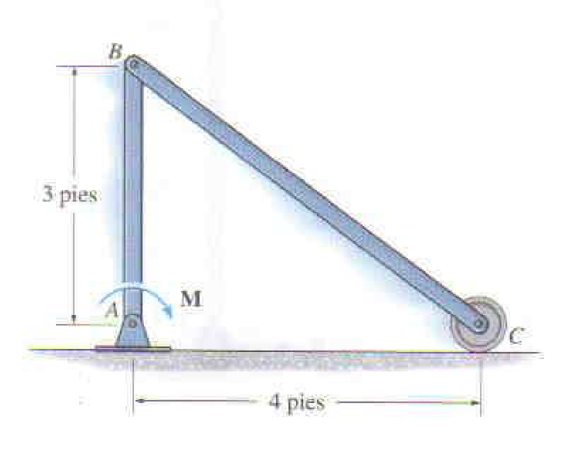

Probs. 17–100/101

**17-102.** El rodillo cortador de césped tiene masa de 80 kg y radio de giro $k_G$ = 0.175 m. Si es empujado hacia delante con una fuerza de 200 N cuando el mango está a 45°, determine su aceleración angular. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el terreno y el rodillo son $\mu_s = 0.12$ y $\mu_k = 0.1$, respectivamente.



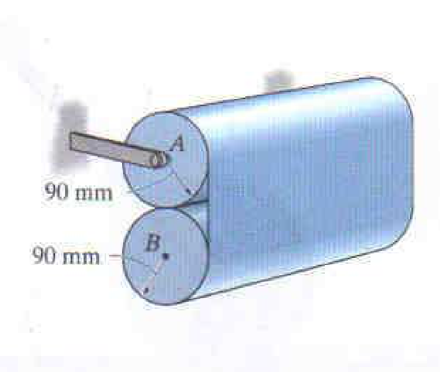

Prob. 17–102

**17-103.** Las dos barras conectadas mediante un pasador tienen peso de 10 lb/pie cada una. Si un momento $M$ = 60 lb · pie es aplicado a la barra $AB$, determine la reacción vertical inicial en $C$ y las componentes de reacción horizontal y vertical en $B$. Desprecie el tamaño del rodillo en el punto $C$. Las barras están inicialmente en reposo.



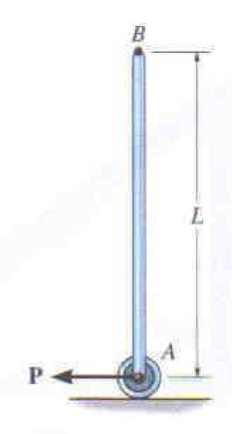

Prob. 17–103

***17-104.** Una larga tira de papel está enrollada en dos rodillos, cada uno con masa de 8 kg. El rodillo $A$ está soportado mediante un pasador que pasa por su centro mientras que el rodillo $B$ no está soportado centralmente. Si $B$ es llevado en contacto con $A$ y liberado del reposo, determine la tensión inicial en el papel entre los rodillos y la aceleración angular de cada rodillo. Al efectuar los cálculos suponga que los rodillos son aproximados por cilindros.



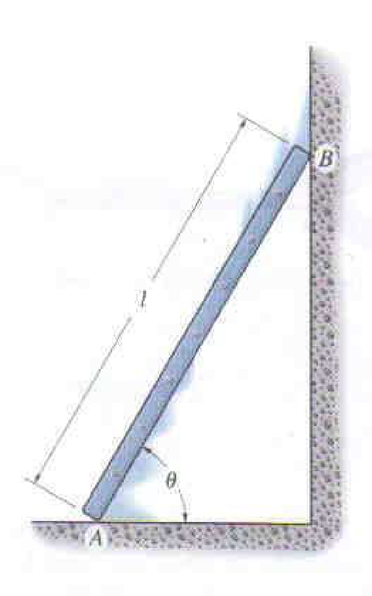

**Prob. 17–104**

**17-105.** La barra uniforme de masa $m$ y longitud $L$ está equilibrada en la posición vertical cuando la fuerza horizontal **P** es aplicada al rodillo ubicado en $A$. Determine la aceleración angular inicial de la barra y la aceleración de su punto superior $B$.



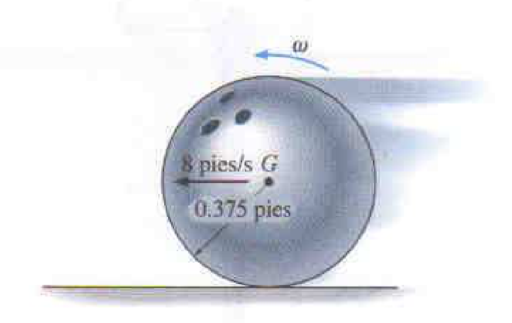

**Prob. 17–105**

**17-106.** La escalera tiene peso $W$ y descansa contra la pared y el suelo lisos. Determine su aceleración angular como una función de $\theta$ cuando es liberada y puede deslizarse hacia abajo. En los cálculos, trate a la escalera como una barra esbelta.



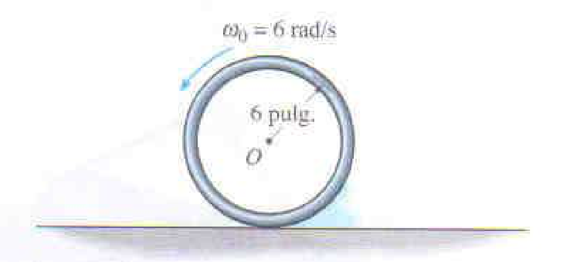

**Prob. 17–106**

**17-107.** El bolo de 16 lb es lanzado horizontalmente sobre una bolera de tal forma que inicialmente $\omega = 0$ y su centro de masa tiene velocidad $v = 8$ pies/s. Si el coeficiente de fricción cinética entre aquél y ésta es $\mu_k = 0.12$, determine la distancia que el bolo recorre antes de rodar sin deslizar. En los cálculos, desprecie los orificios hechos en el bolo para los dedos y suponga que tiene densidad uniforme.



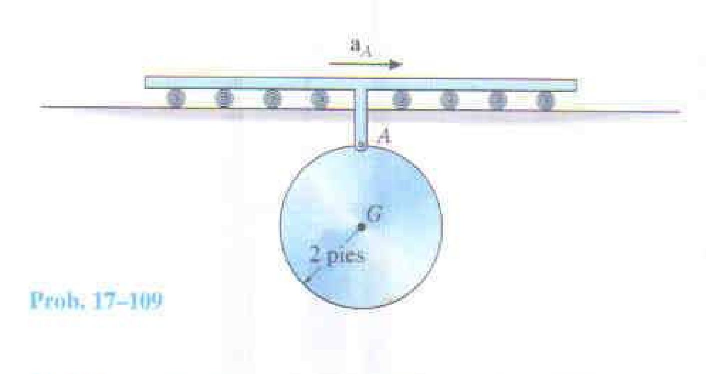

**Prob. 17–107**

*17-108. El aro o anillo delgado recibe una velocidad angular inicial de 6 rad/s cuando es colocado sobre la superficie. Si el coeficiente de fricción cinética entre el aro y la superficie es $\mu_k = 0.3$, determine la distancia que el aro se mueve antes de terminar de deslizar.



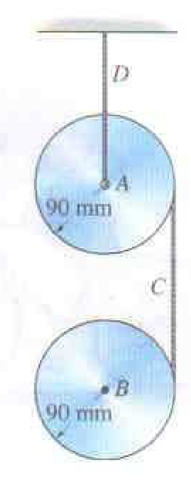

Prob. 17–108

17-109. La placa circular de 15 lb está suspendida de un pasador instalado en A. Si el pasador se encuentra conectado a una vía a la que se le da una aceleración $a_A = 3$ pies/s$^2$, determine las componentes de reacción horizontal y vertical en $A$ y la aceleración del centro de masa $G$ de la placa. La placa está originalmente en reposo.




Prob. 17–109

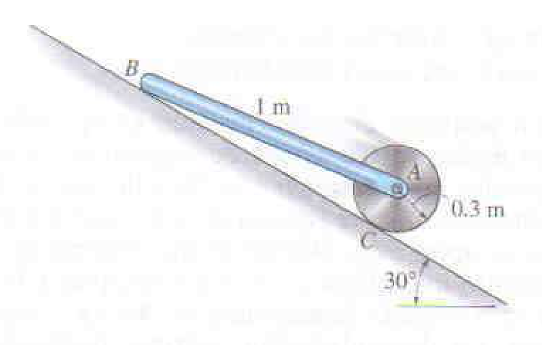
17-110. Una cuerda $C$ está enrollada alrededor de cada uno de dos discos de 10 kg. Si los discos son liberados del reposo, determine la tensión en la cuerda fija $D$. Desprecie la masa de la cuerda.




Prob. 17–110

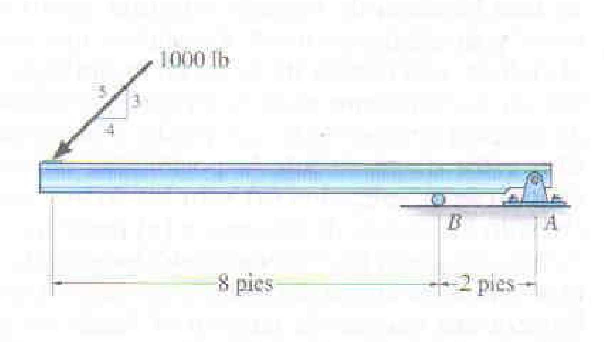
■17-111. El conjunto está constituido por un disco de 8 kg y una barra de 10 kg que está conectada mediante un pasador al disco. Si el sistema es liberado del reposo, determine la aceleración angular del disco. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el disco y el plano inclinado son $\mu_s = 0.6$ y $\mu_k = 0.4$, respectivamente. Desprecie la fricción en $B$.

*17-112. Resuelva el problema 17-111 si se retira la barra. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el disco y el plano inclinado son $\mu_s = 0.15$ y $\mu_k = 0.1$, respectivamente.




Probs. 17–111/112

17-113. La viga de 500 lb está soportada en $A$ y $B$ cuando es sometida a una fuerza de 1000 lb como se muestra. Si el soporte de pasador en $A$ falla repentinamente, determine la aceleración angular inicial de la viga y la fuerza del soporte de rodillo sobre la viga. Para el cálculo, suponga que la viga es una barra esbelta de manera que su espesor puede ser despreciado.

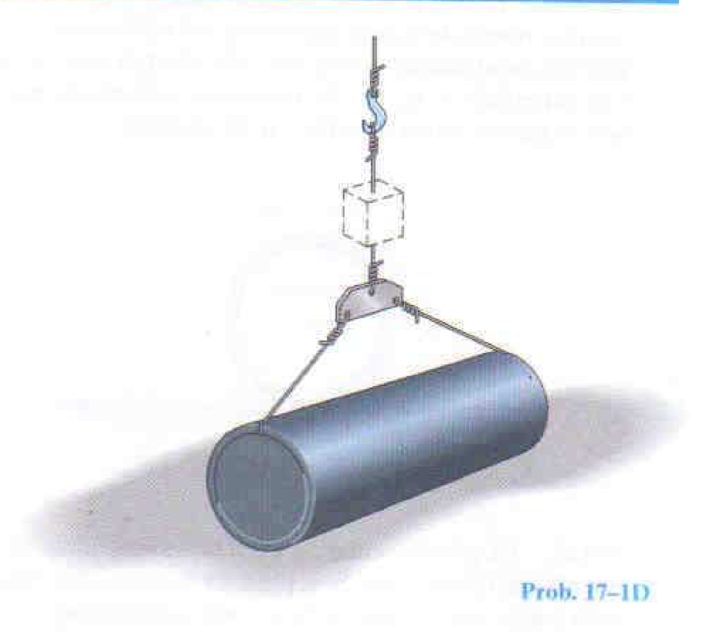



Prob. 17–113

# PROYECTOS DE DISEÑO

### 17-1D. DISEÑO DE UN DINAMÓMETRO

Para probar la resistencia dinámica de cables, debe usarse un instrumento llamado *dinamómetro* que mide la tensión en un cable cuando éste levanta un objeto muy pesado con movimiento acelerado. Diseñe un instrumento de tal tipo con base en el uso de uno o varios resortes, de manera que pueda ser utilizado en un cable que soporta un tubo de 300 kg y al que se le da una aceleración hacia arriba de 2 m/s$^2$. Presente un dibujo y explique cómo opera su dinamómetro.



Prob. 17-1D

### 17-2D. DISEÑO DE FRENO PARA UN ELEVADOR PEQUEÑO

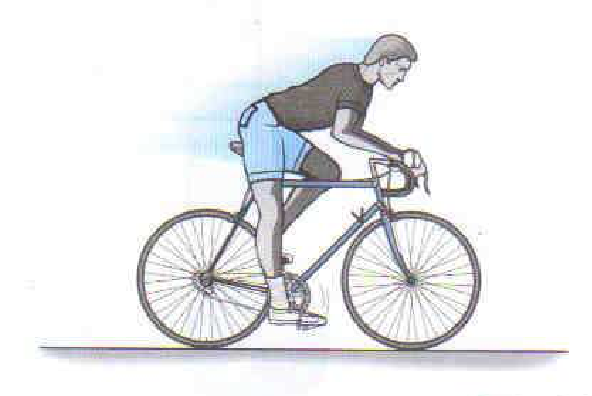
Un pequeño elevador privado es operado usando un malacate. Con fines de seguridad, es necesario instalar un mecanismo de frenado que se activaría automáticamente en caso de que el cable falle durante la operación. Diseñe el mecanismo de frenado usando miembros de acero y resortes. El elevador y su contenido tienen masa de 300 kg, y viajan a 2.5 m/s. La desaceleración máxima permisible para detener el movimiento es de 4 m/s$^2$. Suponga que el coeficiente de fricción cinética entre cualquier miembro de acero y las paredes del pozo del elevador es $\mu_k = 0.3$. La holgura entre el marco del elevador y cada pared del pozo es de 50 mm. Haga un dibujo a escala de su diseño junto con un análisis de fuerzas para mostrar que podrá detener el movimiento como es requerido. Analice en clase la seguridad y confiabilidad del mecanismo.



Prob. 17-2D

### 17-3D. SEGURIDAD EN UNA BICICLETA

Uno de los accidentes más comunes que puede tener alguien que se traslade en bicicleta es volcarse sobre el manubrio. Obtenga las medidas necesarias de una bicicleta de tamaño estándar, junto con su masa y su centro de masa. Considere que usted es el ciclista, con centro de masa en el ombligo. Efectúe un experimento para determinar el coeficiente de fricción cinética entre las ruedas y el pavimento. Con estos datos, calcule la posibilidad de volcarse cuando sean aplicados (a) sólo los frenos traseros, (b) sólo los frenos delanteros, y (c) tanto los frenos delanteros como los traseros simultáneamente. ¿Qué efecto tiene la altura del asiento en esos resultados? Sugiera una manera de mejorar el diseño de la bicicleta, y escriba un reporte sobre la seguridad del ciclismo con base en este análisis.



Prob. 17-3D

## REPASO DEL CAPÍTULO

- *Momento de inercia.* El momento de inercia es una medida de la resistencia de un cuerpo a un cambio en su velocidad angular. Es definido mediante $I = \int r^2\,dm$ y será diferente para cada eje con respecto al cual se calcule. Para un cuerpo con un eje de simetría, la integración es llevada a cabo empleando usualmente elementos de disco o de cáscara.

  Muchos cuerpos están compuestos de formas simples. Siendo este el caso, pueden usarse valores tabulados de $I$, como los dados en la cubierta interna posterior de este libro. Para obtener el momento de inercia de un cuerpo compuesto con respecto a cualquier eje específico, el momento de inercia de cada parte es determinado con respecto al eje y los resultados se suman. Al hacer esto se requiere a menudo usar el teorema de los ejes paralelos $I = I_G + md^2$. Los manuales de ingeniería también proporcionan valores de los radios de giro $k$ para el cuerpo. Si la masa del cuerpo es conocida, entonces el momento de inercia de masa se determina con $I = mk^2$.

- *Ecuaciones de movimiento plano.* La ecuación que define el movimiento traslacional de un cuerpo rígido es $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}_G$. Aquí, $\mathbf{a}_G$ es la aceleración del centro de masa del cuerpo.

  La ecuación que describe el movimiento rotatorio del cuerpo es determinada tomando los momentos de todas las partículas presentes en el cuerpo con respecto a un eje. Cuando el eje pasa por el centro de masa, el resultado es $\Sigma M_G = I_G\alpha$. Si los momentos se toman con respecto a algún punto arbitrario $P$, entonces obtenemos $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$. La suma del lado derecho representa los momentos de los vectores cinéticos $m\mathbf{a}_G$ e $I_G\boldsymbol{\alpha}$ con respecto al punto $P$.

  Para tomar en cuenta todos los términos que hay en estas ecuaciones, la aplicación debe ir acompañada siempre de un diagrama de cuerpo libre, y en algunos problemas, también puede ser conveniente dibujar el diagrama cinético.

- *Traslación.* Aquí $I_G\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$ ya que $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{0}$. Si el cuerpo experimenta traslación rectilínea, use un eje $x-y$ inercial, en cuyo caso las ecuaciones de movimiento son

$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$
$$\Sigma F_y = m(a_G)_y$$
$$\Sigma M_G = 0$$

  Para traslación curvilínea, use los ejes $n-t$ inerciales de manera que

$$\Sigma F_n = m(a_G)_n$$
$$\Sigma F_t = m(a_G)_t$$
$$\Sigma M_G = 0$$

- *Rotación con respecto a un eje fijo.* Para rotación con respecto a un eje fijo, el vector cinético $m(\mathbf{a}_G)_n$ no genera momento con respecto al eje de rotación, y entonces la ecuación rotacional de movimiento se reduce a una forma simplificada con respecto al punto $O$. Las ecuaciones de movimiento son

$$\Sigma F_n = m\omega^2 r_G \qquad \Sigma F_t = m\alpha r_G$$
$$\Sigma M_G = I_G\alpha \quad \text{o} \quad \Sigma M_O = I_O\alpha$$

- *Movimiento plano general.* Para movimiento plano general, tenemos

$$\Sigma F_x = m(a_G)_x \qquad \Sigma F_y = m(a_G)_y$$
$$\Sigma M_G = I_G\alpha \quad \text{o} \quad \Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$$

  Si el cuerpo está restringido por sus soportes, entonces pueden obtenerse ecuaciones adicionales de cinemática usando $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$ para relacionar las aceleraciones de dos puntos cualesquiera $A$ y $B$ presentes en el cuerpo.



El principio del trabajo y la energía juega un papel importante en el movimiento propio de los trabajos de extracción realizados para levantar tubería en este equipo de perforación.

CAPÍTULO 18

# Cinética plana de un cuerpo rígido: Trabajo y energía

## OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Desarrollar formulaciones para calcular la energía cinética de un cuerpo, y definir las diversas maneras en que una fuerza y un par efectúan trabajo.
- Aplicar el principio del trabajo y la energía para resolver problemas de cinética plana de un cuerpo rígido que implican fuerza, velocidad y desplazamiento.
- Mostrar cómo la conservación de la energía puede ser empleada para resolver problemas de cinética plana de un cuerpo rígido.

## 18.1 Energía cinética

En este capítulo aplicaremos métodos del trabajo y la energía a problemas que implican fuerza, velocidad y desplazamiento relacionados con el movimiento plano de un cuerpo rígido. Sin embargo, antes de hacer esto, será necesario desarrollar primero un medio para obtener la energía cinética del cuerpo cuando esté sometido a traslación, rotación con respecto a un eje fijo, o movimiento plano general.

Con este propósito consideraremos el cuerpo rígido mostrado en la figura 18-1, el cual está representado aquí por una *placa plana* que se mueve en el plano de referencia inercial $x-y$. Una partícula $i$-ésima arbitraria del cuerpo, con masa $dm$, está localizada en $r$ a partir del punto arbitrario $P$. Si en el *instante* mostrado la partícula tiene una velocidad $\mathbf{v}_i$, entonces la energía cinética de la partícula es $T_i = \frac{1}{2} dm\, v_i^2$.

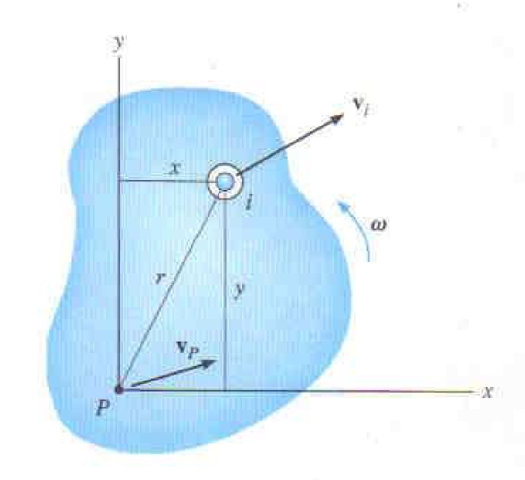



Fig. 18-1

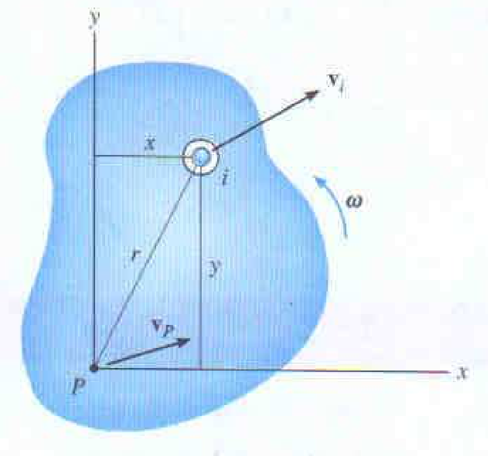



Fig. 18–1

La energía cinética de todo el cuerpo es determinada escribiendo expresiones similares para cada partícula del cuerpo e integrando los resultados, esto es,

$$T = \frac{1}{2}\int_m dm\, v_i^2$$

Esta ecuación también puede ser expresada en términos de la velocidad del punto $P$. Si el cuerpo tiene velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ entonces, a partir de la figura 18-1, tenemos

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_i &= \mathbf{v}_P + \mathbf{v}_{i/P}\\ &= (v_P)_x\mathbf{i} + (v_P)_y\mathbf{j} + \omega\mathbf{k} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})\\ &= [(v_P)_x - \omega y]\mathbf{i} + [(v_P)_y + \omega x]\mathbf{j}\end{aligned}$$

El cuadrado de la magnitud de $\mathbf{v}_i$ es entonces

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i = v_i^2 &= [(v_P)_x - \omega y]^2 + [(v_P)_y + \omega x]^2\\ &= (v_P)_x^2 - 2(v_P)_x\omega y + \omega^2 y^2 + (v_P)_y^2 + 2(v_P)_y\omega x + \omega^2 x^2\\ &= v_P^2 - 2(v_P)_x\omega y + 2(v_P)_y\omega x + \omega^2 r^2\end{aligned}$$

Sustituyendo en la ecuación de la energía cinética resulta

$$T = \tfrac{1}{2}\left(\int_m dm\right)v_P^2 - (v_P)_x\omega\left(\int_m y\, dm\right) + (v_P)_y\omega\left(\int_m x\, dm\right) + \tfrac{1}{2}\omega^2\left(\int_m r^2\, dm\right)$$

La primera integral a la derecha representa toda la masa del cuerpo. Como $\bar{y}m = \int y\, dm$ y $\bar{x}m = \int x\, dm$, la segunda y la tercera integrales establecen el centro de masa $G$ del cuerpo con respecto a $P$. La última integral representa el momento de inercia $I_P$ del cuerpo, calculado con respecto al eje $z$ que pasa por el punto $P$. Así,

$$T = \tfrac{1}{2}mv_P^2 - (v_P)_x\,\omega\bar{y}m + (v_P)_y\,\omega\bar{x}m + \tfrac{1}{2}I_P\,\omega^2 \qquad (18\text{–}1)$$

Como caso especial, si el punto $P$ coincide con el centro de masa $G$ para el cuerpo, entonces $\bar{y} = \bar{x} = 0$, y por tanto

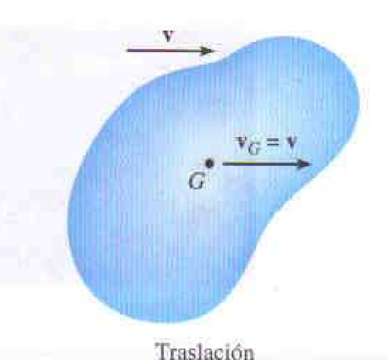
$$T = \tfrac{1}{2}mv_G^2 + \tfrac{1}{2}I_G\omega^2 \qquad (18\text{–}2)$$

Aquí $I_G$ es el momento de inercia para el cuerpo con respecto a un eje que es perpendicular al plano del movimiento y pasa por el centro de masa. Ambos términos del lado derecho son *siempre positivos*, ya que las velocidades están elevadas al cuadrado. Además, se puede verificar que esos términos tienen unidades de longitud multiplicada por fuerza, con unidades comunes de m · N o pies · lb. Sin embargo, recuerde que en el SI la unidad de energía es el joule (J), donde 1 J = 1 m · N.

**Traslación.** Cuando un cuerpo rígido de masa $m$ está sometido a *traslación* rectilínea o curvilínea, la energía cinética debida a la rotación es cero, ya que $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$. A partir de la ecuación 18-2, la energía cinética del cuerpo es, por tanto,

$$T = \tfrac{1}{2} m v_G^2 \qquad (18\text{–}3)$$

donde $v_G$ es la magnitud de la velocidad $\mathbf{v}$ de traslación en el instante considerado, figura 18-2.




Traslación

Fig. 18–2

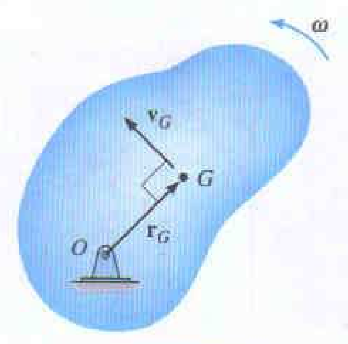
**Rotación con respecto a un eje fijo.** Cuando un cuerpo rígido está *girando con respecto a un eje fijo* que pasa por el punto $O$, figura 18-3, el cuerpo tiene energía cinética *traslacional* y *rotacional* como está definida por la ecuación 18-2, es decir,

$$T = \tfrac{1}{2} m v_G^2 + \tfrac{1}{2} I_G \omega^2 \qquad (18\text{–}4)$$

La energía cinética del cuerpo también puede ser formulada observando que $v_G = r_G\omega$, en cuyo caso $T = \frac{1}{2}(I_G + m r_G^2)\omega^2$. Por el teorema de los ejes paralelos, los términos dentro del paréntesis representan el momento de inercia $I_O$ del cuerpo con respecto a un eje perpendicular al plano del movimiento y que pasa por el punto $O$. Por consiguiente,*

$$T = \tfrac{1}{2} I_O \omega^2 \qquad (18\text{–}5)$$

Según la derivación, esta ecuación dará el mismo resultado que la 18-4, ya que toma en cuenta las energías cinéticas traslacional y rotacional del cuerpo.




Rotación con respecto a un eje fijo

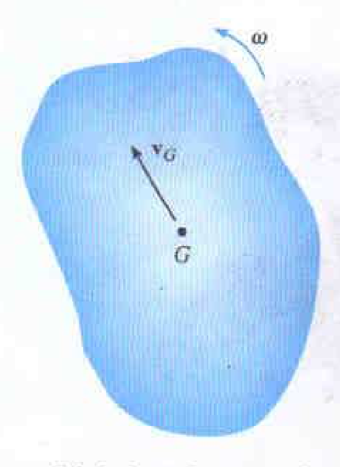
Fig. 18–3

**Movimiento plano general.** Cuando un cuerpo rígido está sometido a movimiento plano general, figura 18-4, tiene velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y su centro de masa tiene velocidad $\mathbf{v}_G$. Por consiguiente, la energía cinética es definida mediante la ecuación 18-2, es decir,

$$T = \tfrac{1}{2} m v_G^2 + \tfrac{1}{2} I_G \omega^2 \qquad (18\text{–}6)$$

Aquí se observa que la energía cinética total del cuerpo consta de la suma *escalar* de la energía cinética *traslacional* del cuerpo, $\frac{1}{2} m v_G^2$, y de la energía cinética *rotacional* con respecto a su centro de masa, $\frac{1}{2} I_G \omega^2$.

Debido a que la energía es una cantidad escalar, la energía cinética total para un sistema de cuerpos rígidos *conectados* es la suma de las energías cinéticas de todas sus partes móviles. Dependiendo del tipo de movimiento, la energía cinética de *cada cuerpo* se encuentra aplicando la ecuación 18-2 o las formas alternativas mencionadas líneas arriba.




Movimiento plano general

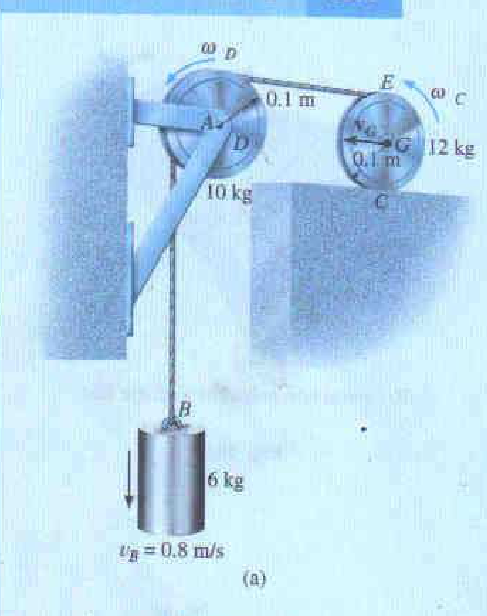
Fig. 18–4

*El lector debe notar la similitud que hay entre esta derivación y la de $\Sigma M_O = I_O\alpha$, ecuación 17-16. También advierta que se puede obtener el mismo resultado directamente a partir de la ecuación 18-1 seleccionando el punto $P$ en $O$, observando que $\mathbf{v}_O = \mathbf{0}$.

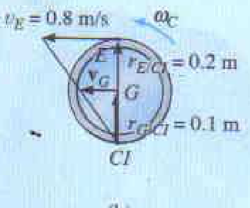


La energía cinética total de esta compactadora de suelo está constituida por la energía cinética del cuerpo de la máquina, debida a su traslación, y por las energías cinéticas traslacional y rotatoria del rodillo y las ruedas, originadas por su movimiento plano general. Aquí excluimos la energía cinética adicional desarrollada por las partes móviles del motor y del tren impulsor.

## EJEMPLO 18.1




(a)




(b)

**Fig. 18–5**

El sistema de tres elementos mostrado en la figura 18-5*a* consta de un bloque *B* de 6 kg, un disco *D* de 10 kg, y un cilindro *C* de 12 kg. Si no ocurre deslizamiento, determine la energía cinética total del sistema en el instante mostrado.

### Solución

Para calcular la energía cinética del disco y del cilindro, es necesario determinar primero $\omega_D$, $\omega_C$ y $v_G$, figura 18-5*a*. A partir de la *cinemática* del disco,

$$v_B = r_D\omega_D; \qquad 0.8 \text{ m/s} = (0.1 \text{ m})\omega_D \qquad \omega_D = 8 \text{ rad/s}$$

Como el cilindro rueda sin deslizar, el centro instantáneo de velocidad cero está en el punto de contacto con el suelo, figura 18-5*b*, por lo que,

$$v_E = r_{E/CI}\omega_C; \qquad 0.8 \text{ m/s} = (0.2 \text{ m})\omega_C \qquad \omega_C = 4 \text{ rad/s}$$

$$v_G = r_{G/CI}\omega_C; \qquad v_G = (0.1 \text{ m})(4 \text{ rad/s}) = 0.4 \text{ m/s}$$

***Bloque***

$$T_B = \tfrac{1}{2}m_B v_B^2 = \tfrac{1}{2}(6 \text{ kg})(0.8 \text{ m/s})^2 = 1.92 \text{ J}$$

***Disco***

$$T_D = \tfrac{1}{2}I_D\omega_D^2 = \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}m_D r_D^2)\omega_D^2$$
$$= \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}(10 \text{ kg})(0.1 \text{ m})^2](8 \text{ rad/s})^2 = 1.60 \text{ J}$$

***Cilindro***

$$T_C = \tfrac{1}{2}mv_G^2 + \tfrac{1}{2}I_G\omega_C^2 = \tfrac{1}{2}mv_G^2 + \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{2}m_C r_C^2)\omega_C^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(12 \text{ kg})(0.4 \text{ m/s})^2 + \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}(12 \text{ kg})(0.1 \text{ m})^2](4 \text{ rad/s})^2 = 1.44 \text{ J}$$

La energía cinética total del sistema es, por tanto,

$$T = T_B + T_D + T_C$$
$$= 1.92 \text{ J} + 1.60 \text{ J} + 1.44 \text{ J} = 4.96 \text{ J} \qquad \textit{Resp.}$$

## 18.2 El trabajo de una fuerza

En problemas de cinética plana que implican un cuerpo rígido, a menudo son encontrados varios tipos de fuerzas. El trabajo de cada una de esas fuerzas ha sido presentado en la sección 14.1 y se da a continuación como un resumen.

**Trabajo de una fuerza variable.** Si una fuerza externa **F** actúa sobre un cuerpo rígido, el trabajo realizado por la fuerza cuando se mueve a lo largo de la trayectoria $s$, figura 18-6, se define como

$$U_F = \mathbf{F} \cdot \mathbf{r} = \int_s F \cos\theta \, ds \qquad (18\text{–}7)$$

Aquí $\theta$ es el ángulo entre las "colas" del vector fuerza y del desplazamiento diferencial. En general, la integración debe tomar en cuenta la variación de la dirección y la magnitud de la fuerza.

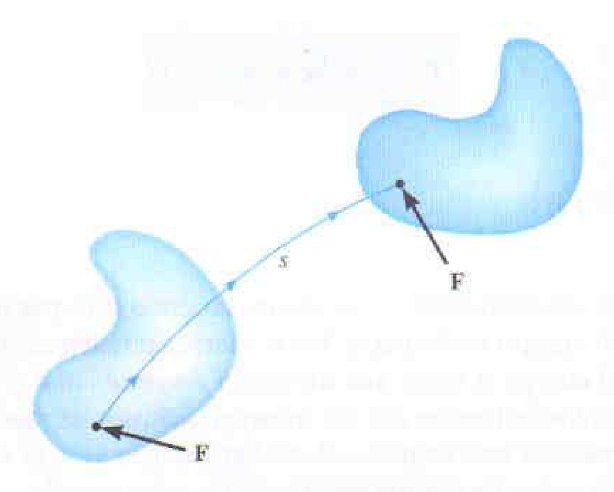



Fig. 18–6

**Trabajo de una fuerza constante.** Si una fuerza externa $\mathbf{F}_c$ actúa sobre un cuerpo rígido, figura 18-7, y mantiene una magnitud constante $F_c$ y una dirección constante $\theta$, mientras el cuerpo experimenta una traslación $s$, la ecuación 18-7 puede ser integrada de manera que el trabajo se convierte en

$$U_{F_c} = (F_c \cos\theta)s \qquad (18\text{–}8)$$

Aquí $F_c \cos\theta$ representa la magnitud de la componente de fuerza en la dirección del desplazamiento.

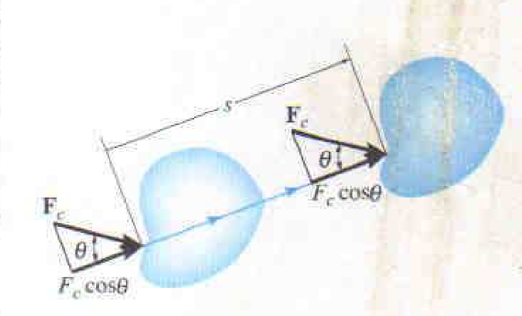



Fig. 18–7

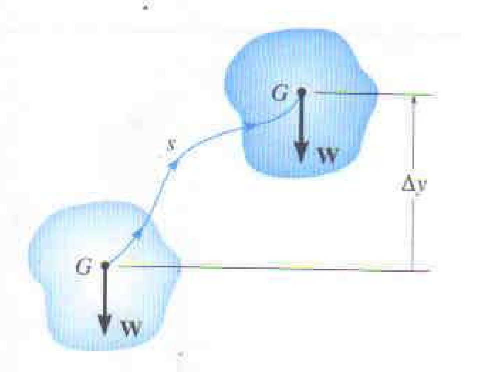



Fig. 18–8

**Trabajo de un peso.** El peso de un cuerpo efectúa trabajo sólo cuando el centro de masa $G$ del cuerpo experimenta un *desplazamiento vertical* $\Delta y$. Si este desplazamiento es *hacia arriba*, figura 18-8, el trabajo es negativo puesto que el peso y el desplazamiento están en direcciones opuestas.

$$U_W = -W\Delta y \qquad (18\text{–}9)$$

De la misma forma, si el desplazamiento es *hacia abajo* $(-\Delta y)$ el trabajo resulta *positivo*. En ambos casos el cambio de elevación se considera pequeño de manera que **W**, que es causado por la gravitación, es constante.

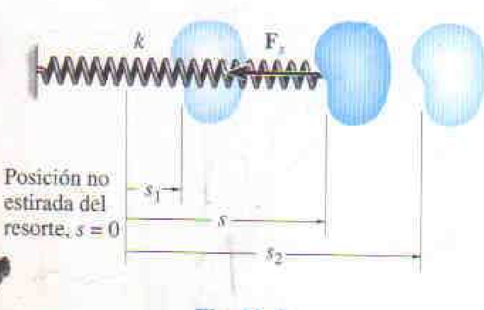



Fig. 18–9

**Trabajo de una fuerza de resorte.** Si un resorte elástico lineal está unido a un cuerpo, la fuerza presente en el resorte $F_s = ks$ *que actúa sobre el cuerpo* efectúa trabajo cuando el resorte se alarga o comprime desde $s_1$ hasta otra posición $s_2$. En ambos casos el trabajo será *negativo* ya que el *desplazamiento del cuerpo* es en la dirección opuesta a la fuerza, figura 18-9. El trabajo realizado es

$$U_s = -(\tfrac{1}{2}ks_2^2 - \tfrac{1}{2}ks_1^2) \qquad (18\text{–}10)$$

donde $|s_2| > |s_1|$.

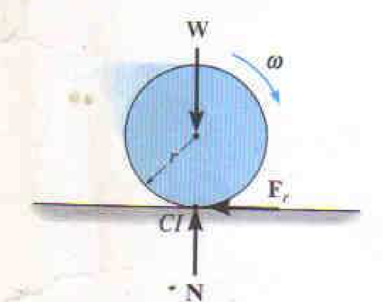


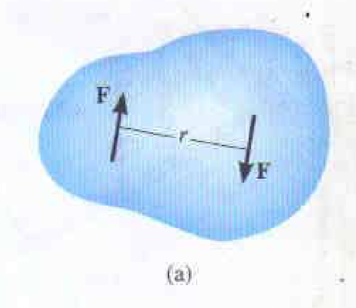

Fig. 18–10

**Fuerzas que no trabajan.** Hay algunas fuerzas externas que no trabajan cuando el cuerpo se desplaza. Estas fuerzas pueden actuar en *puntos fijos* sobre el cuerpo o tener una dirección *perpendicular a su desplazamiento*. Ejemplos de fuerzas que no trabajan incluyen las reacciones en un soporte de pasador con respecto al cual un cuerpo gira, la reacción normal que actúa sobre un cuerpo que se mueve a lo largo de una superficie fija, y el peso de un cuerpo cuando el centro de gravedad del cuerpo se mueve en un *plano horizontal*, figura 18-10. Una fuerza de resistencia al rodamiento, $\mathbf{F}_r$, actuando sobre un cuerpo redondo cuando éste *rueda sin deslizar* por una superficie rugosa tampoco efectúa trabajo, figura 18-10.* Esto es porque, durante cualquier *instante de tiempo dt*, $\mathbf{F}_r$ actúa en un punto (sobre el cuerpo) que tiene *velocidad cero* (centro instantáneo, *CI*), así que el trabajo realizado por la fuerza en el punto es cero. En otras palabras, el punto no es desplazado en la dirección de la fuerza durante ese instante. Como $\mathbf{F}_r$ entra en contacto con puntos sucesivos por sólo un instante, el trabajo de $\mathbf{F}_r$ será cero.

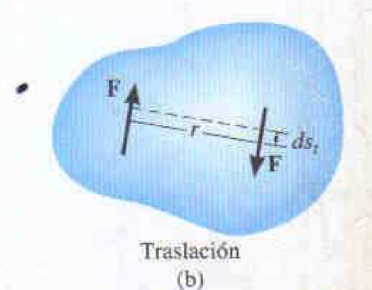
*El trabajo realizado por la fuerza de fricción *cuando el cuerpo desliza* fue analizado en la sección 14.3.

## 18.3 El trabajo de un par

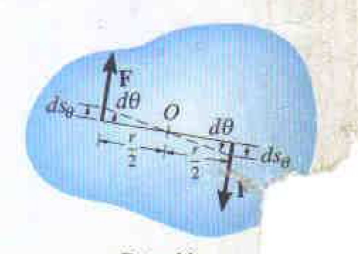
Cuando un cuerpo sometido a un par experimenta movimiento plano general, las dos fuerzas del par trabajan *sólo* cuando el cuerpo experimenta una *rotación*. Para demostrar esto, considere el cuerpo que aparece en la figura 18-11*a*, el cual está sometido a un momento de par $M = Fr$. Cualquier desplazamiento diferencial general del cuerpo puede ser considerado como una traslación más rotación. Cuando el cuerpo se *traslada*, de tal manera que la *componente de desplazamiento* a lo largo de la línea de acción de las fuerzas es $ds_t$, figura 18-11*b*, claramente el trabajo "positivo" de una fuerza *cancela* el trabajo "negativo" de la otra. Si el cuerpo experimenta una rotación diferencial $d\theta$ con respecto a un eje que es perpendicular al plano del par e interseca el plano en el punto $O$, figura 18-11*c*, entonces cada fuerza tendrá un desplazamiento $ds_\theta = (r/2)d\theta$ en la dirección de la fuerza. Por consiguiente, el trabajo total realizado es



(a)



Traslación
(b)

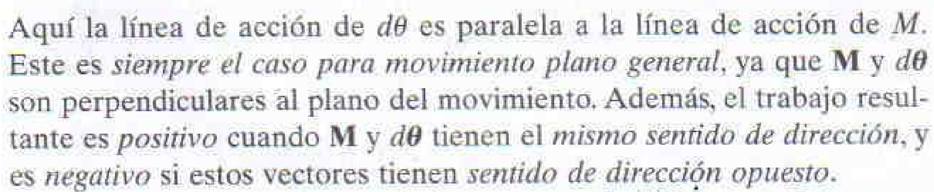


Rotación
(c)

**Fig. 18–11**

$$dU_M = F\left(\frac{r}{2}d\theta\right) + F\left(\frac{r}{2}d\theta\right) = (Fr)\,d\theta$$

$$= M\,d\theta$$



Aquí la línea de acción de $d\theta$ es paralela a la línea de acción de $M$. Este es *siempre el caso para movimiento plano general*, ya que $\mathbf{M}$ y $d\boldsymbol{\theta}$ son perpendiculares al plano del movimiento. Además, el trabajo resultante es *positivo* cuando $\mathbf{M}$ y $d\boldsymbol{\theta}$ tienen el *mismo sentido de dirección*, y es *negativo* si estos vectores tienen *sentido de dirección opuesto*.

Cuando el cuerpo gira en el plano un ángulo finito $\theta$ medido en radianes, desde $\theta_1$ hasta $\theta_2$, el trabajo de un par es

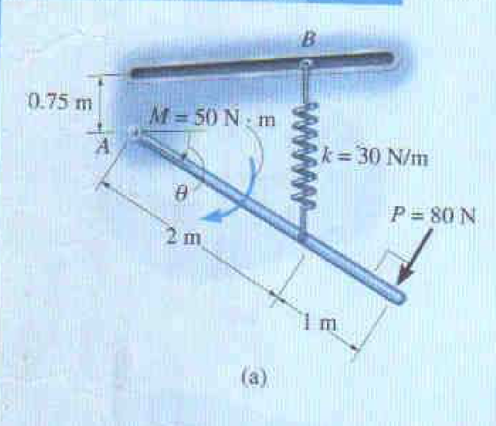
$$U_M = \int_{\theta_1}^{\theta_2} M\,d\theta \qquad (18\text{–}11)$$

Si el momento de par $\mathbf{M}$ tiene *magnitud constante*, entonces

$$U_M = M(\theta_2 - \theta_1) \qquad (18\text{–}12)$$

Aquí el trabajo es *positivo* si $\mathbf{M}$ y $(\boldsymbol{\theta}_2 - \boldsymbol{\theta}_1)$ están en la misma dirección.



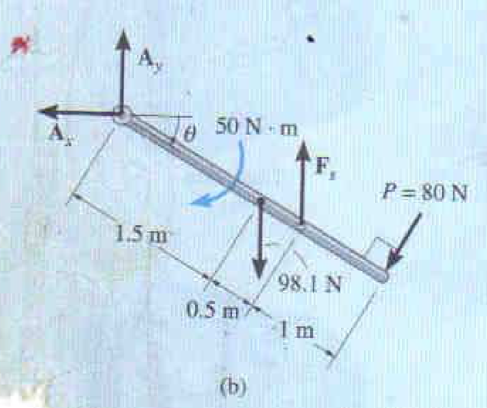




Fig. 18–12

La barra mostrada en la figura 18-12$a$ tiene masa de 10 kg y está sometida a un momento de par $M = 50$ N · m y a una fuerza $P = 80$ N, que siempre es aplicada perpendicularmente al extremo de la barra. También, el resorte tiene una longitud no alargada de 0.5 m y permanece en la posición vertical debido a la guía de rodillo colocada en $B$. Determine el trabajo total realizado por todas las fuerzas que actúan sobre la barra cuando ésta ha girado hacia abajo desde $\theta = 0°$ hasta $\theta = 90°$.

### Solución

Primero se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la barra para tomar en cuenta todas las fuerzas que actúan sobre ella, figura 18-12$b$.

*Peso W.* Como el peso $10(9.81)$ N $= 98.1$ N es desplazado hacia abajo 1.5 m, el trabajo es

$$U_W = 98.1\text{ N}(1.5\text{ m}) = 147.2\text{ J}$$

¿Por qué es positivo el trabajo?

*Momento de par M.* El momento de par gira un ángulo $\theta = \pi/2$ radianes. Por consiguiente

$$U_M = 50\text{ N}\cdot\text{m}(\pi/2) = 78.5\text{ J}$$

*Fuerza en el resorte $F_s$.* Cuando $\theta = 0°$ el resorte está estirado en $(0.75\text{ m} - 0.5\text{ m}) = 0.25$ m, y cuando $\theta = 90°$, el alargamiento es de $(2\text{ m} + 0.75\text{ m}) - 0.5\text{ m} = 2.25$ m. Entonces

$$U_s = -[\tfrac{1}{2}(30\text{ N/m})(2.25\text{ m})^2 - \tfrac{1}{2}(30\text{ N/m})(0.25\text{ m})^2] = -75.0\text{ J}$$

Por inspección, el resorte efectúa trabajo negativo sobre la barra ya que $F_s$ actúa en la dirección opuesta al desplazamiento. Esto concuerda con el resultado.

*Fuerza P.* Al moverse la barra hacia abajo, la fuerza es desplazada por una distancia de $(\pi/2)(3\text{ m}) = 4.712$ m. El trabajo es positivo. ¿Por qué?

$$U_P = 80\text{ N}(4.712\text{ m}) = 377.0\text{ J}$$

*Reacciones en el pasador.* Las fuerzas $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$ no trabajan ya que no se desplazan.

*Trabajo total.* El trabajo de todas las fuerzas cuando la barra es desplazada es entonces

$$U = 147.2\text{ J} + 78.5\text{ J} - 75.0\text{ J} + 377.0\text{ J} = 528\text{ J} \qquad \textit{Resp.}$$

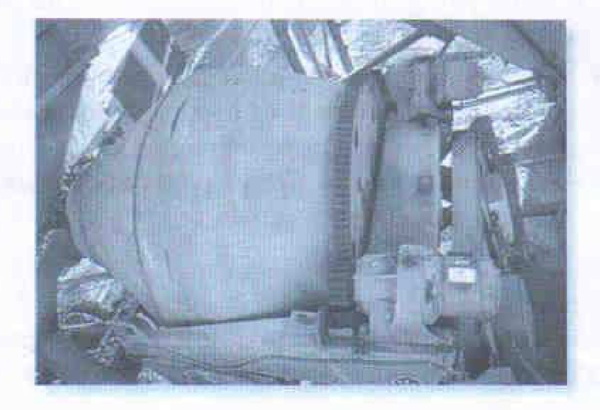
## 18.4 Principio del trabajo y la energía

Al aplicar el principio del trabajo y la energía desarrollado en la sección 14.2 a cada una de las partículas de un cuerpo rígido y sumando los resultados algebraicamente, ya que la energía es un escalar, el principio del trabajo y la energía para un cuerpo rígido toma la forma

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2 \qquad (18\text{–}13)$$

Esta ecuación establece que la energía cinética traslacional y rotatoria inicial del cuerpo, más el trabajo realizado por todas las fuerzas y momentos de par externos que actúan sobre el cuerpo cuando éste se mueve desde su posición inicial hasta su posición final, es igual a la energía cinética traslacional y rotacional final del cuerpo. Advierta que el trabajo de las *fuerzas internas* del cuerpo no tiene que ser considerado ya que el cuerpo es rígido. Estas fuerzas ocurren en pares iguales colineales pero opuestos, de manera que cuando el cuerpo se mueve, el trabajo de una fuerza cancela al de su contraparte. Además, como el cuerpo es rígido, *ningún movimiento relativo* ocurre entre estas fuerzas, y entonces ningún trabajo interno se lleva a cabo.

Cuando varios cuerpos rígidos están conectados por medio de pasadores, por cables inextensibles o acoplados entre sí, la ecuación 18-13 puede ser aplicada a todo el sistema de cuerpos conectados. En todos estos casos las fuerzas internas, que mantienen juntos los diversos miembros, no trabajan y, por consiguiente, son eliminadas del análisis.



El trabajo del par o momento desarrollado por los engranes impulsores sobre los dos motores es transformado en energía cinética de rotación del tambor de la mezcladora.

## PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

El principio del trabajo y la energía se usa para resolver problemas cinéticos que implican *velocidad*, *fuerza* y *desplazamiento*, ya que estos términos están implicados en la formulación. En aplicaciones, se sugiere usar el siguiente procedimiento.

***Energía cinética (Diagramas cinemáticos).***

- La energía cinética de un cuerpo está constituida por dos partes. La energía cinética de traslación se refiere a la velocidad del centro de masa, $T = \frac{1}{2} mv_G^2$, y la energía cinética de rotación es determinada cuando se conoce el momento de inercia con respecto al centro de masa, $T = \frac{1}{2} I_G\omega^2$. En el caso especial de rotación con respecto a un eje fijo, estas dos energías cinéticas son combinadas y pueden ser expresadas como $T = \frac{1}{2} I_O\omega^2$, donde $I_O$ es el momento de inercia con respecto al eje de rotación.
- Los *diagramas cinemáticos* para velocidad pueden ser útiles para determinar $v_G$ y $\omega$ o para establecer una *relación* entre $v_G$ y $\omega$.*

***Trabajo (Diagrama de cuerpo libre).***

- Dibuje un diagrama de cuerpo libre del cuerpo cuando esté ubicado en un punto intermedio a lo largo de la trayectoria para tomar en cuenta todas las fuerzas y los momentos de par que trabajen sobre el cuerpo al moverse éste a lo largo de la trayectoria.
- Una fuerza efectúa trabajo cuando se mueve por un desplazamiento en la dirección de la fuerza.
- Fuerzas que son funciones de desplazamiento deben ser integradas para obtener el trabajo. Gráficamente, el trabajo es igual al área bajo la curva fuerza-desplazamiento.
- El trabajo de un peso es el producto de su magnitud y el desplazamiento vertical, $U_W = Wy$. Es positivo cuando el peso se mueve hacia abajo.
- El trabajo de un resorte es de la forma $U_s = \frac{1}{2}ks^2$, donde $k$ es la rigidez del resorte y $s$ es el alargamiento o la compresión del resorte.
- El trabajo de un par es el producto del momento de par y del ángulo en radianes por el cual gira.
- Como se requiere la *suma algebraica* de los términos de trabajo, es importante que se especifique el signo apropiado de cada término. Específicamente, el trabajo es *positivo* cuando la fuerza (o momento de par) tiene la *misma dirección* que su desplazamiento (o rotación); de otra manera es negativo.

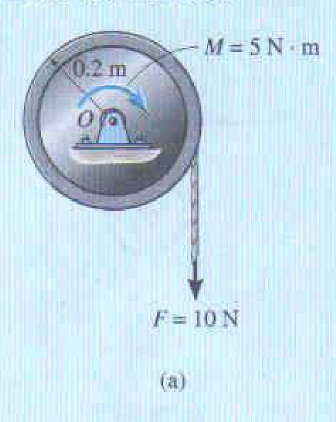
***Principio del trabajo y la energía.***

- Aplique el principio del trabajo y la energía, $T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$. Como esta es una ecuación escalar, puede usarse para resolver sólo una incógnita cuando se aplica a un solo cuerpo rígido.

*Un breve repaso de las secciones 16.5, 16.6 y 16.7 podría ser de utilidad para resolver problemas, ya que los cálculos que implican energía cinética requieren de un análisis cinemático de la velocidad.

## EJEMPLO 18.3

El disco de 30 kg mostrado en la figura 18-13$a$ está soportado mediante un pasador colocado en su centro. Determine el número de revoluciones que debe efectuar para alcanzar una velocidad angular de 20 rad/s partiendo del reposo. Sobre el disco actúan una fuerza constante $F = 10$ N, la cual se aplica a una cuerda enrollada alrededor de su periferia, y un momento de par constante $M = 5$ N · m. Desprecie la masa de la cuerda en los cálculos.




(a)

### Solución

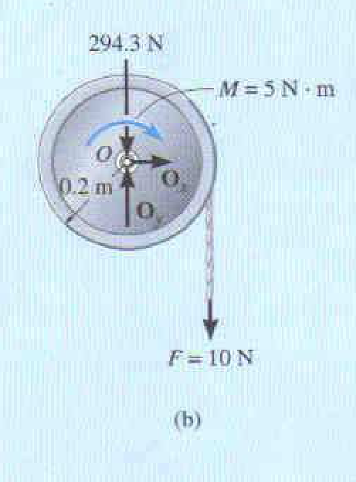
***Energía cinética.*** Como el disco gira con respecto a un eje fijo, la energía cinética puede ser calculada usando $T = \frac{1}{2}I_O\omega^2$, donde el momento de inercia es $I_O = \frac{1}{2}mr^2$. Inicialmente, el disco está en reposo, por lo que

$$T_1 = 0$$
$$T_2 = \tfrac{1}{2}I_O\omega_2^2 = \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}(30\text{ kg})(0.2\text{ m})^2](20\text{ rad/s})^2 = 120\text{ J}$$

***Trabajo (Diagrama de cuerpo libre).*** Como se muestra en la figura 18-13$b$, las reacciones $\mathbf{O}_x$ y $\mathbf{O}_y$ en el pasador y el peso (294.3 N) no trabajan, ya que no son desplazados. El *momento de par*, con magnitud constante, efectúa trabajo positivo $U_M = M\theta$ al *girar* el disco en un ángulo de $\theta$ radianes en el sentido de las manecillas del reloj, y la *fuerza constante* **F** efectúa trabajo positivo $U_F = Fs$ al *moverse* la cuerda hacia abajo $s = \theta r = \theta(0.2\text{ m})$.

***Principio del trabajo y la energía***

$$\{T_1\} + \{\Sigma U_{1-2}\} = \{T_2\}$$
$$\{T_1\} + \{M\theta + Fs\} = \{T_2\}$$
$$\{0\} + \{(5\text{ N}\cdot\text{m})\theta + (10\text{ N})\theta(0.2\text{ m})\} = \{120\text{ J}\}$$
$$\theta = 17.1\text{ rad} = 17.1\text{ rad}\left(\frac{1\text{ rev}}{2\pi\text{ rad}}\right) = 2.73\text{ rev} \qquad \textit{Resp.}$$




(b)

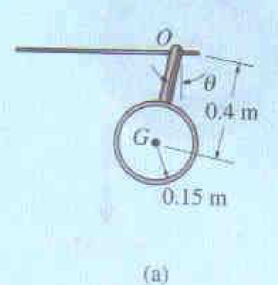
Fig. 18-13

Este problema también fue resuelto en el ejemplo 17.9. Compare los dos métodos de solución y observe que al estar implicados fuerza, velocidad y desplazamiento $\theta$, un enfoque de trabajo y energía da una solución más directa.

## EJEMPLO 18.4

El tubo de 700 kg está suspendido uniformemente de los dos dientes del elevador de carga mostrado en la foto. El tubo está experimentando un movimiento oscilatorio tal que cuando $\theta = 30°$ se encuentra momentáneamente en reposo. Determine las fuerzas normal y de fricción que actúan sobre cada diente y son necesarias para soportar el tubo en el instante $\theta = 0°$. Las medidas del tubo y del colgante se muestran en la figura 18-14*a*. Desprecie la masa del colgante y el espesor del tubo.






(a)

Fig. 18–14

### Solución

Debemos usar las ecuaciones de movimiento para encontrar las fuerzas sobre los dientes ya que esas fuerzas no trabajan. Sin embargo, antes de hacer esto, aplicaremos el principio del trabajo y la energía para determinar la velocidad angular del tubo cuando $\theta = 0°$.

***Energía cinética (Diagrama cinemático).*** Como el tubo está originalmente en reposo, entonces

$$T_1 = 0$$

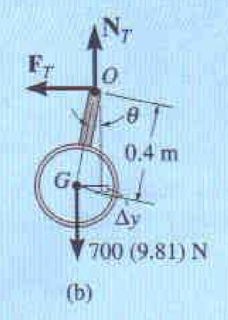
La energía cinética final puede ser calculada con referencia al punto fijo $O$ o al centro de masa $G$. Para el cálculo consideraremos al tubo como un anillo delgado tal que $I_G = mr^2$. Al considerar el punto $G$, tenemos

$$\begin{aligned} T_2 &= \tfrac{1}{2}m(v_G)_2^2 + \tfrac{1}{2}I_G\omega_2^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(700\text{ kg})[(0.4\text{ m})\omega_2]^2 + \tfrac{1}{2}[700\text{ kg}(0.15\text{ m})^2]\omega_2^2 \\ &= 63.875\omega_2^2 \end{aligned}$$

Si el punto $O$ es considerado, entonces debe usarse el teorema de los ejes paralelos para determinar $I_O$. Por consiguiente,

$$\begin{aligned} T_2 = \tfrac{1}{2}I_O\omega_2^2 &= \tfrac{1}{2}[700\text{ kg}(0.15\text{ m})^2 + 700\text{ kg}(0.4\text{ m})^2]\omega_2^2 \\ &= 63.875\omega_2^2 \end{aligned}$$

*Trabajo (Diagrama de cuerpo libre).* Figura 18-14*b*. Las fuerzas normal y de fricción sobre los dientes no trabajan ya que éstos no se mueven al oscilar el tubo. El peso, centrado en $G$, efectúa trabajo positivo ya que el peso se mueve hacia abajo una distancia vertical $\Delta y = 0.4\text{ m} - 0.4\cos 30°\text{ m} = 0.05359\text{ m}$.



(b)

*Principio del trabajo y la energía*

$$\{T_1\} + \{\Sigma U_{1-2}\} = \{T_2\}$$

$$\{0\} + \{700(9.81)\text{ N}(0.05359\text{ m})\} = \{63.875\omega_2^2\}$$

$$\omega_2 = 2.40\text{ rad/s}$$

*Ecuaciones de movimiento.* Con referencia a los diagramas de cuerpo libre y cinético mostrados en la figura 18-14*c*, y usando el resultado para $\omega_2$, tenemos

$$\overset{+}{\leftarrow} \Sigma F_t = m(a_G)_t; \qquad F_T = 700(a_G)_t$$

$$+\uparrow \Sigma F_n = m(a_G)_n; \quad N_T - 700(9.81)\text{ N} = 700\text{ kg}(2.40\text{ rad/s})^2(0.4\text{ m})$$

$$\circlearrowleft + \Sigma M_O = I_O\alpha; \quad 0 = [700\text{ kg}(0.15\text{ m})^2 + 700\text{ kg}(0.4\text{ m})^2]\alpha$$

Como $(a_G)_t = 0.4\alpha$, entonces

$$\alpha = 0, \ (a_G)_t = 0$$

$$F_T = 0$$

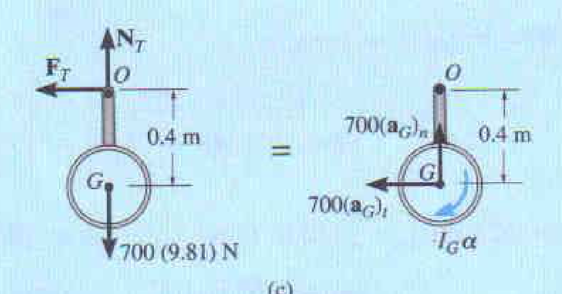
$$N_T = 8.48\text{ kN}$$

Se tienen dos dientes para soportar la carga, por lo que

$$F'_T = 0 \qquad \textit{Resp.}$$

$$N'_T = \frac{8.48\text{ kN}}{2} = 4.24\text{ kN} \qquad \textit{Resp.}$$

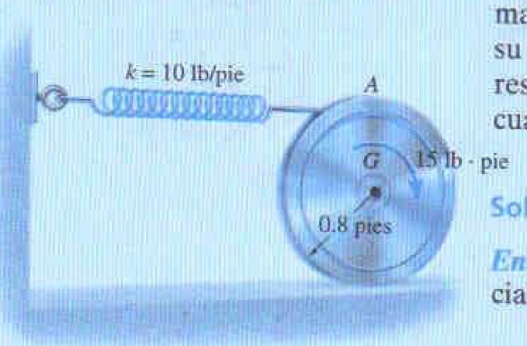
Debido al movimiento oscilatorio los dientes están sometidos a una fuerza normal *mayor* que si la carga fuese estática, en cuyo caso $N'_T = 700(9.81)\text{N}/2 = 3.43\text{ kN}$.



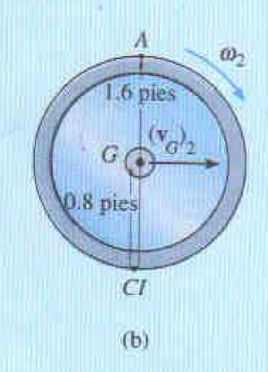
(c)

## EJEMPLO 18.5

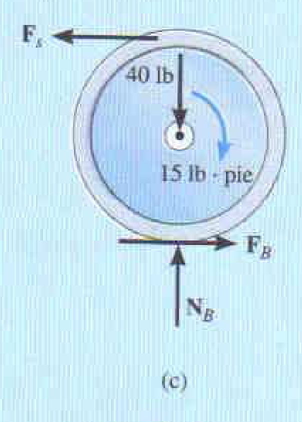
La rueda mostrada en la figura 18-15*a* pesa 40 lb y tiene radio de giro $k_G = 0.6$ pies con respecto a su centro de masa $G$. Si la rueda está sometida a un momento de par de 15 lb · pie en el sentido de las manecillas del reloj y rueda desde el reposo sin deslizar, determine su velocidad angular después que su centro $G$ se mueve 0.5 pies. El resorte tiene rigidez $k = 10$ lb/pie e inicialmente no está estirado cuando se aplica el momento de par.




(a)




(b)




(c)

**Fig. 18–15**

### Solución

***Energía cinética (Diagrama cinemático).*** Como la rueda está inicialmente en reposo,

$$T_1 = 0$$

El diagrama cinemático de la rueda cuando se encuentra en la posición final se muestra en la figura 18-15*b*. Por consiguiente, la energía cinética final es

$$T_2 = \tfrac{1}{2}m(v_G)_2^2 + \tfrac{1}{2}I_G\omega_2^2$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{40\text{ lb}}{32.2\text{ pies/s}^2}\right)(v_G)_2^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{40\text{ lb}}{32.2\text{ pies/s}^2}(0.6\text{ pies})^2\right]\omega_2^2$$

La velocidad del centro de masa puede relacionarse con la velocidad angular mediante el centro instantáneo de velocidad cero (*CI*), esto es, $(v_G)_2 = 0.8\omega_2$. Sustituyendo en la ecuación anterior y simplificando, tenemos

$$T_2 = 0.621\omega_2^2$$

***Trabajo (Diagrama de cuerpo libre).*** Como se muestra en la figura 18-15*c*, sólo la fuerza del resorte $\mathbf{F}_s$ y el momento de par efectúan trabajo. La fuerza normal no se mueve a lo largo de su línea de acción y la fuerza de fricción *no trabaja*, ya que la rueda no desliza al rodar.

El trabajo de $\mathbf{F}_s$ puede ser calculado usando $U_s = -\frac{1}{2}ks^2$. Aquí el trabajo es negativo ya que $\mathbf{F}_s$ tiene dirección opuesta al desplazamiento. Como la rueda no desliza cuando el centro $G$ se mueve 0.5 pies, la rueda gira $\theta = s_G/r_{G/CI} = 0.5\text{ pies}/0.8\text{ pies} = 0.625$ rad, figura 18-15*b*. Por consiguiente, el resorte se estira $s_A = \theta r_{A/CI} = 0.625$ rad (1.6 pies) = 1 pie.

***Principio del trabajo y la energía***

$$\{T_1\} + \{\Sigma U_{1-2}\} = \{T_2\}$$

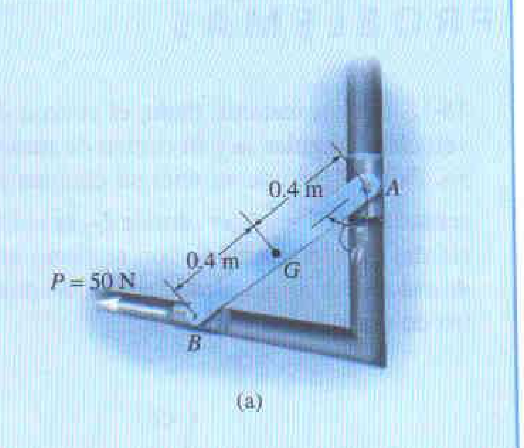
$$\{T_1\} + \{M\theta - \tfrac{1}{2}ks^2\} = \{T_2\}$$

$$\{0\} + \{15\text{ lb}\cdot\text{pies}(0.625\text{ rad}) - \frac{1}{2}(10\text{ lb/pies})(1\text{ pie})^2\} = \{0.621\omega_2^2\text{pies}\cdot\text{lb}\}$$

$$\omega_2 = 2.65\text{ rad/s}$$ *Resp.*

## EJEMPLO 18.6

La barra de 10 kg mostrada en la figura 18-16*a* está restringida a que sus extremos se muevan a lo largo de ranuras. La barra está inicialmente en reposo cuando $\theta = 0°$. Si sobre el bloque deslizable ubicado en el punto $B$ actúa una fuerza horizontal $P = 50$ N, determine la velocidad angular de la barra en el instante $\theta = 45°$. Desprecie la fricción y la masa de los bloques $A$ y $B$.



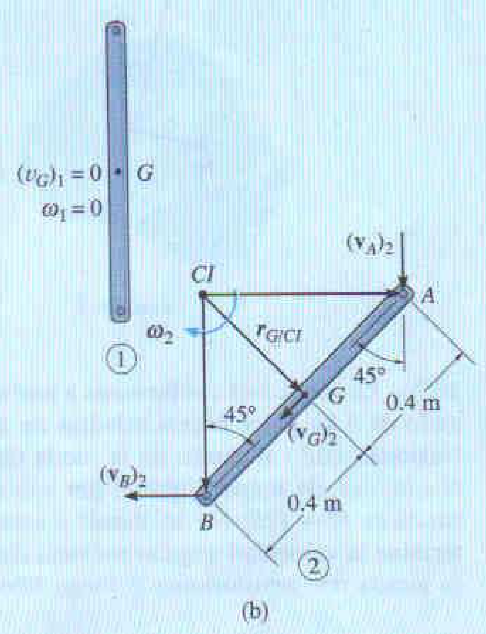
(a)

### Solución

¿Por qué puede usarse el principio del trabajo y la energía para resolver este problema?

***Energía cinética (Diagramas cinemáticos).*** En la figura 18-16*b* se muestran dos diagramas cinemáticos de la barra, cuando está en la posición inicial 1 y en la posición final 2. Cuando la barra está en la posición 1, $T_1 = 0$ ya que $(\mathbf{v}_G)_1 = \boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{0}$. En la posición 2, la velocidad angular es $\boldsymbol{\omega}_2$ y la velocidad del centro de masa es $(\mathbf{v}_G)_2$. Por consiguiente, la energía cinética es

$$\begin{aligned} T_2 &= \tfrac{1}{2}m(v_G)_2^2 + \tfrac{1}{2}I_G\omega_2^2 \\ &= \tfrac{1}{2}(10\text{ kg})(v_G)_2^2 + \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{12}(10\text{ kg})(0.8\text{ m})^2]\omega_2^2 \\ &= 5(v_G)_2^2 + 0.267(\omega_2)^2 \end{aligned}$$



(b)

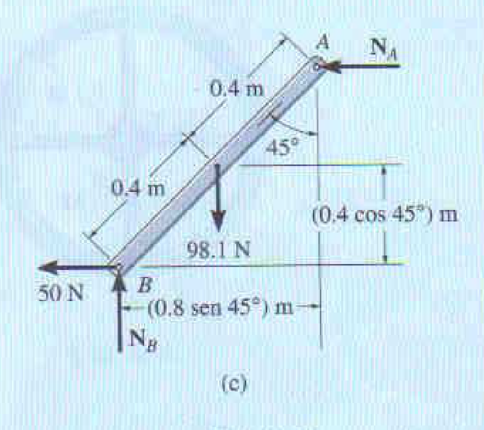
Las dos incógnitas $(v_G)_2$ y $\omega_2$ pueden ser relacionadas mediante el centro instantáneo de velocidad cero para la barra, figura 18-16*b*. Se aprecia que al moverse $A$ hacia abajo con velocidad $(\mathbf{v}_A)_2$, $B$ se mueve horizontalmente hacia la izquierda con velocidad $(\mathbf{v}_B)_2$. Conocidas estas direcciones, el $CI$ es determinado como se muestra en la figura. Así,

$$\begin{aligned} (v_G)_2 &= r_{G/CI}\omega_2 = (0.4 \tan 45°\text{ m})\omega_2 \\ &= 0.4\omega_2 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$T_2 = 0.8\omega_2^2 + 0.267\omega_2^2 = 1.067\omega_2^2$$

***Trabajo (Diagrama de cuerpo libre).*** Figura 18-16*c*. Las fuerzas normales $\mathbf{N}_A$ y $\mathbf{N}_B$ no trabajan cuando la barra se desplaza. ¿Por qué? El peso de 98.1 N se desplaza una distancia vertical de $\Delta y = (0.4 - 0.4 \cos 45°)$ m; mientras que la fuerza de 50 N se mueve una distancia horizontal $s = (0.8 \text{ sen } 45°)$ m. Estas dos fuerzas efectúan trabajo positivo. ¿Por qué?



(c)

**Fig. 18–16**

***Principio del trabajo y la energía***

$$\{T_1\} + \{\Sigma U_{1-2}\} = \{T_2\}$$

$$\{T_1\} + \{W\Delta y + Ps\} = \{T_2\}$$

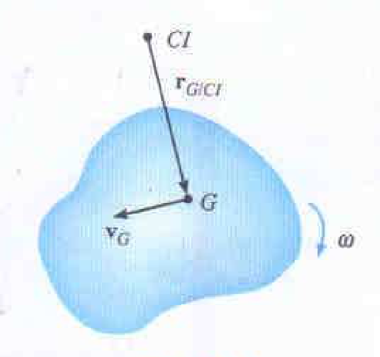
$$\{0\} + \{98.1\text{ N}(0.4\text{ m} - 0.4\cos 45°\text{ m}) + 50\text{ N}(0.8\text{ sen }45°\text{ m})\} = \{1.067\omega_2^2\text{J}\}$$

La solución para $\omega_2$ es

$$\omega_2 = 6.11\text{ rad/s}$$ *Resp.*

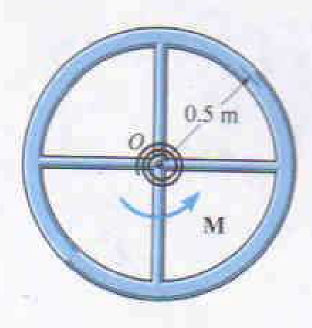
## PROBLEMAS

**18-1.** En un instante dado, el cuerpo de masa $m$ tiene velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y su centro de masa tiene velocidad $\mathbf{v}_G$. Demuestre que su energía cinética puede ser representada por $T = \frac{1}{2} I_{CI}\omega^2$, donde $I_{CI}$ es el momento de inercia del cuerpo calculado con respecto al eje instantáneo de velocidad cero, ubicado a una distancia $r_{G/CI}$ del centro de masa como se muestra.



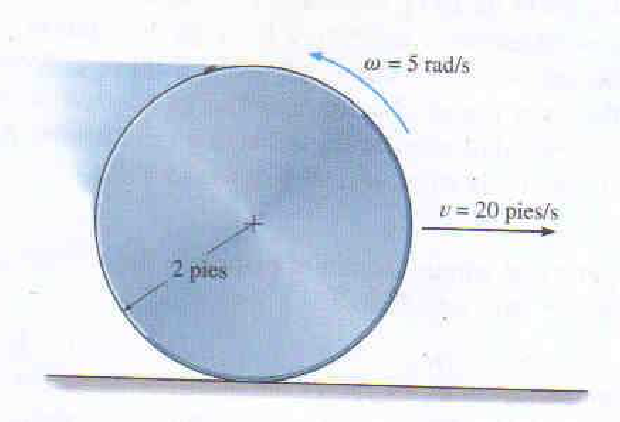

Prob. 18–1

**18-2.** La rueda está conformada a partir de un anillo delgado de 5 kg y dos barras esbeltas de 2 kg. Si el resorte torsional unido al centro de la rueda tiene rigidez $k = 2$ N · m/rad, de manera que el par sobre el centro de la rueda es $M = (2\theta)$ N · m, donde $\theta$ está en radianes, determine la velocidad angular máxima de la rueda cuando es girada dos revoluciones y luego liberada del reposo.



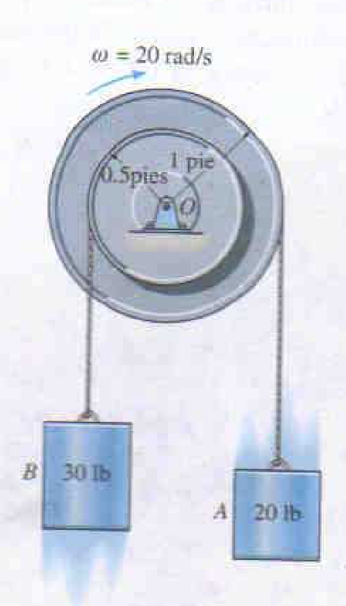

Prob. 18–2

**18-3.** En el instante mostrado, el disco de 30 lb tiene velocidad angular de 5 rad/s, en sentido contrario al de las manecillas del reloj, cuando su centro tiene velocidad de 20 pies/s. Determine la energía cinética del disco en este instante.




Prob. 18–3

***18-4.** La doble polea consta de dos partes unidas entre sí. Tiene un peso de 50 lb, radio de giro centroidal $k_O = 0.6$ pies, y está girando con velocidad angular de 20 rad/s en el sentido de las manecillas del reloj. Determine la energía cinética del sistema. Suponga que ninguno de los cables desliza sobre la polea.




Prob. 18–4

**18-5.** En el instante mostrado, el eslabón $AB$ tiene velocidad angular $\omega_{AB} = 2$ rad/s. Si cada eslabón es considerado como una barra uniforme esbelta con peso de 0.5 lb/pulg, determine la energía cinética total del sistema.

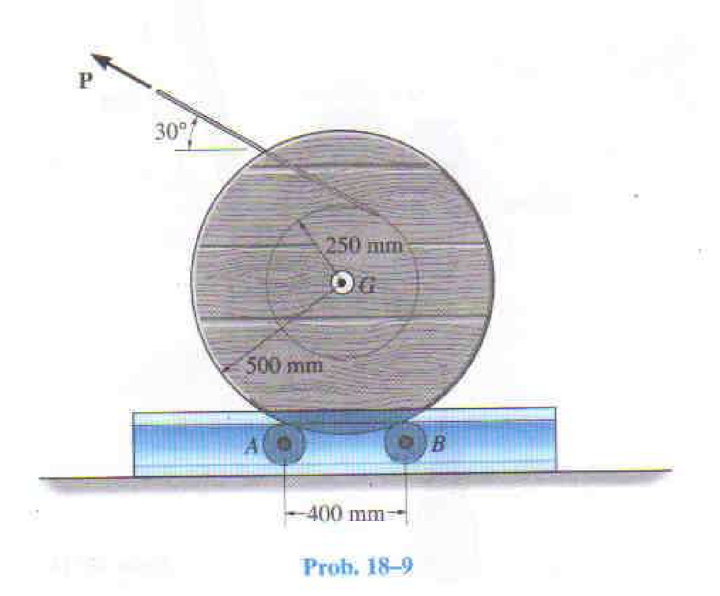
Prob. 18–5

**18-6.** Resuelva el problema 17-58 usando el principio del trabajo y la energía.

**18-7.** Resuelva el problema 17-59 usando el principio del trabajo y la energía.

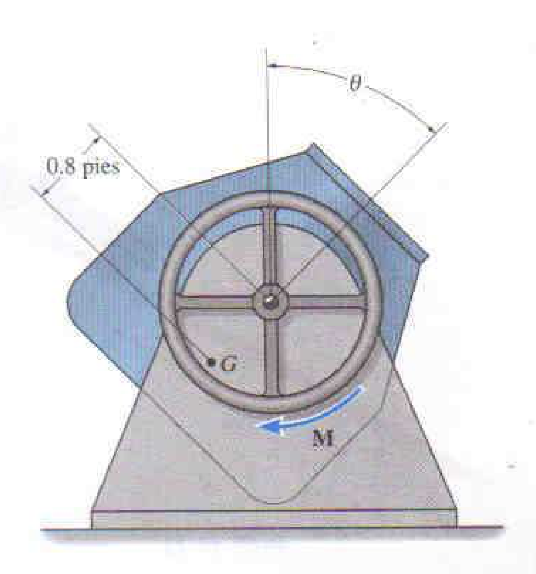
***18-8.** Resuelva el problema 17-63 usando el principio del trabajo y la energía.

**18-9.** Una fuerza $P = 20$ N es aplicada al cable y causa la rotación del carrete de 175 kg que descansa en los dos rodillos $A$ y $B$. Determine la velocidad angular del carrete después que ha realizado dos revoluciones partiendo del reposo. Desprecie la masa de los rodillos y la masa del cable. El radio de giro del carrete con respecto a su eje central es $k_G = 0.42$ m.




Prob. 18–9

**18-10.** La cubeta de la mezcladora tiene un peso de 70 lb y radio de giro $k_G = 1.3$ pies con respecto a su centro de gravedad. Si una torca constante $M = 60$ lb · pie es aplicada a la rueda volcadora, determine la velocidad angular de la cubeta cuando ha girado $\theta = 90°$. Originalmente la cubeta está en reposo cuando $\theta = 0°$.

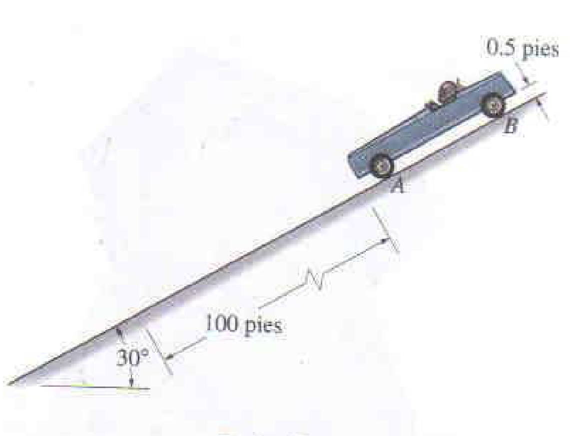



Prob. 18–10

**18-11.** Un yoyo tiene un peso de 0.3 lb y radio de giro $k_O = 0.06$ pies. Si es liberado del reposo, determine cuánto debe descender para alcanzar una velocidad angular $\omega = 70$ rad/s. Desprecie la masa de la cuerda y suponga que ésta se encuentra enrollada alrededor de la espiga central de manera que el radio medio en el cual se desenrolla es $r = 0.02$ pies.

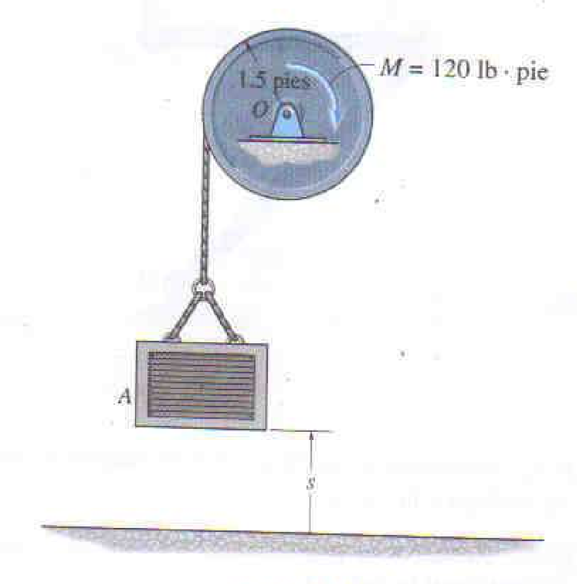
Prob. 18–11

*18-12. Un carro de juguete pesa 110 lb, incluido el pasajero pero *excluidas* las cuatro ruedas. Cada rueda tiene un peso de 5 lb, radio de 0.5 pies, y radio de giro $k = 0.3$ pies, calculado con respecto a un eje que pasa por el eje de las ruedas. Determine la rapidez del carro después que ha viajado 100 pies partiendo del reposo. Las ruedas ruedan sin deslizar. Desprecie la resistencia del aire.




Prob. 18–12

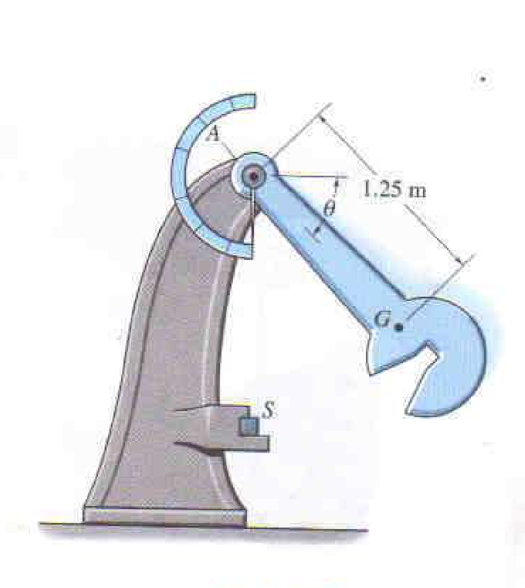
18-14. Cierto motor suministra una torca constante de $M = 120$ lb · pie al tambor. Si el tambor tiene un peso de 30 lb y radio de giro $k_O = 0.8$ pies, determine la rapidez de la caja $A$ de 15 lb después que se ha levantado $s = 4$ pies partiendo del reposo. Desprecie la masa de la cuerda.




Prob. 18–14

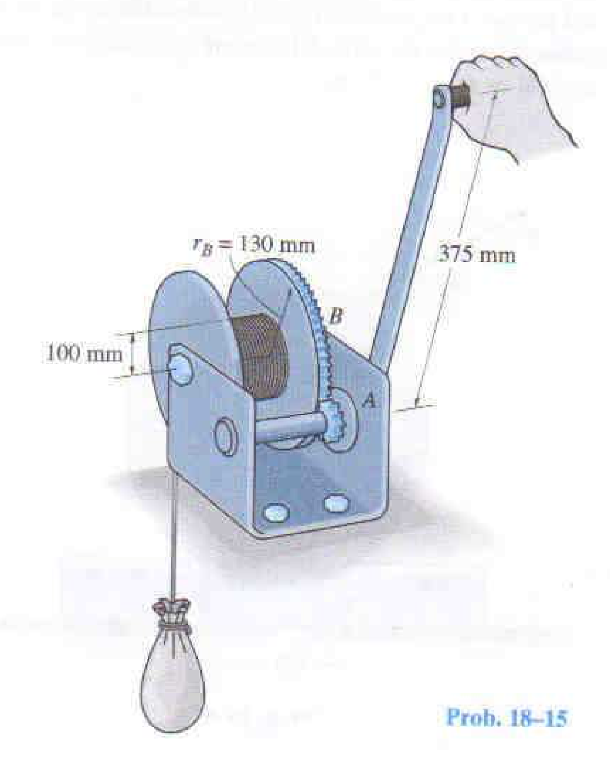


18-13. El péndulo de la máquina de pruebas de impacto Charpy tiene masa de 50 kg y radio de giro $k_A = 1.75$ m. Si es liberado del reposo cuando $\theta = 0°$, determine su velocidad angular justo antes de golpear al espécimen $S$, $\theta = 90°$.




Prob. 18–13

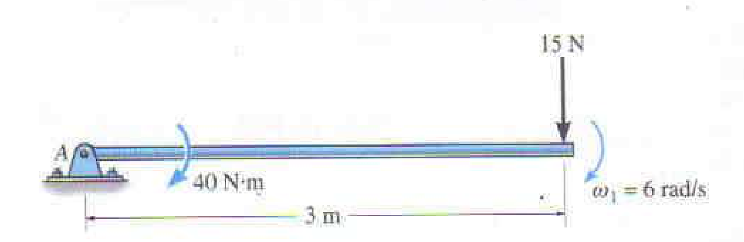
18-15. El malacate de mano se usa para levantar la carga de 50 kg. Determine el trabajo requerido para girar el manubrio cinco revoluciones. El engrane colocado en $A$ tiene radio de 20 mm.




Prob. 18–15

*18-16. La barra esbelta de 4 kg está sometida a una fuerza y a un momento de par. Cuando se encuentra en la posición mostrada tiene velocidad angular $\omega_1 = 6$ rad/s. Determine su velocidad angular en el instante en que ha girado hacia abajo 90°. La fuerza siempre es aplicada perpendicularmente al eje de la barra. El movimiento ocurre en el plano vertical.

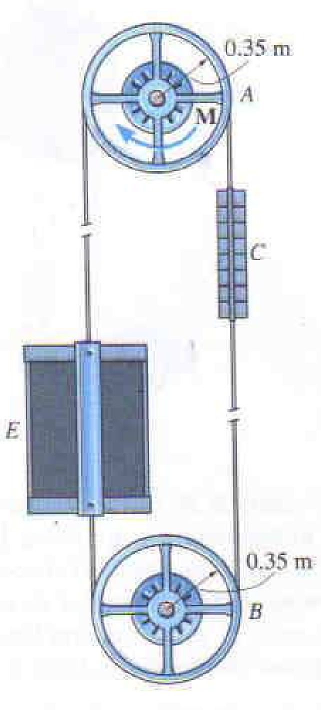
18-17. La barra esbelta de 4 kg está sometida a una fuerza y a un momento de par. Cuando se encuentra en la posición mostrada tiene velocidad angular $\omega_1 = 6$ rad/s. Determine su velocidad angular en el instante en que ha girado 360°. La fuerza siempre es aplicada perpendicularmente al eje de la barra y el movimiento ocurre en el plano vertical.




Probs. 18–16/17

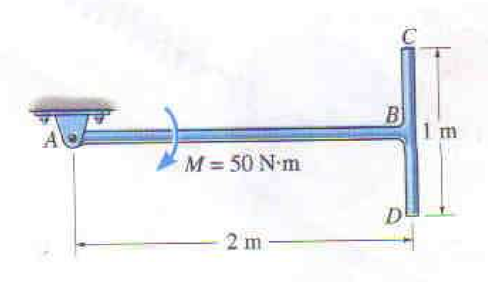
18-18. La cabina $E$ del elevador tiene masa de 1.80 Mg y el contrapeso $C$ tiene masa de 2.30 Mg. Si el motor gira la polea impulsora $A$ con una torca constante $M = 100$ N · m, determine la rapidez del elevador cuando ha ascendido 10 m partiendo del reposo. Cada polea $A$ y $B$ tiene masa de 150 kg y radio de giro $k = 0.2$ m con respecto a su centro de masa o eje articulado. Desprecie la masa del cable y suponga que éste no desliza sobre las poleas.

18-19. La cabina $E$ del elevador tiene masa de 1.80 Mg y el contrapeso $C$ tiene masa de 2.30 Mg. Si el motor gira la polea impulsora $A$ con una torca de $M = (0.06\theta^2 + 7.5)$ N · m, donde $\theta$ está en radianes, determine la rapidez del elevador cuando ha ascendido 12 m partiendo del reposo. Cada polea $A$ y $B$ tiene masa de 150 kg y radio de giro $k = 0.2$ m con respecto a su centro de masa o eje articulado. Desprecie la masa del cable y suponga que éste no desliza sobre las poleas.



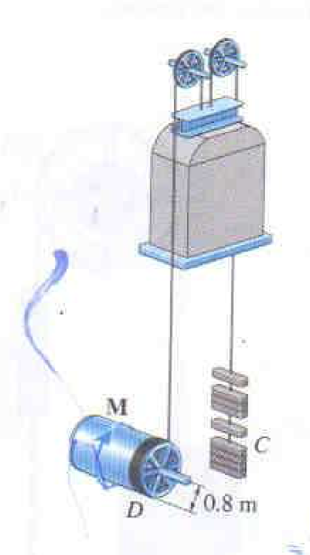

Probs. 18–18/19

*18-20. El péndulo consta de dos barras esbeltas, cada una con masa de 4 kg/m. Si sobre el péndulo actúa un momento $M = 50$ N · m y es liberado de la posición mostrada, determine su velocidad angular cuando ha girado (a) 90° y (b) 180°. El movimiento ocurre en el plano vertical.




Prob. 18–20

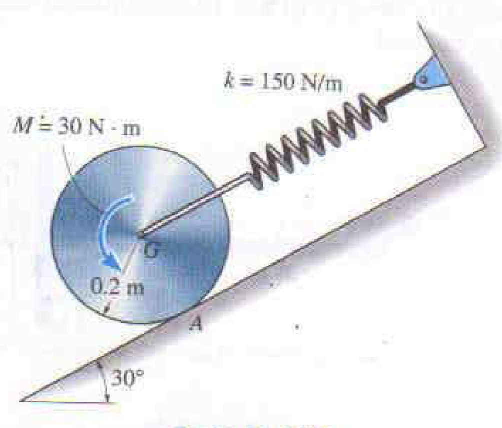
**18-21.** Un motor suministra una torca constante $M = 6$ kN · m al tambor de enrollado que opera el elevador. Si el elevador tiene masa de 900 kg, el contrapeso $C$ tiene masa de 200 kg, y el tambor tiene masa de 600 kg y radio de giro $k = 0.6$ m con respecto a su eje, determine la rapidez del elevador después que se ha elevado 5 m desde el reposo. Desprecie la masa de las poleas.




Prob. 18–21

**18-22.** El disco de 20 kg está originalmente en reposo y el resorte lo mantiene en equilibrio. Un momento de par $M = 30$ N · m es aplicado al disco como se muestra. Determine su velocidad angular en el instante en que su centro de masa $G$ se ha movido 0.8 m hacia abajo a lo largo del plano inclinado. El disco rueda sin deslizar.

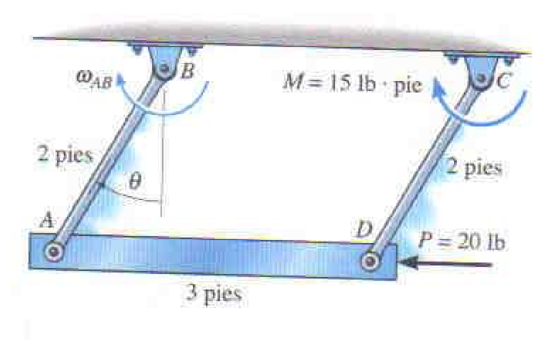
**18-23.** El disco de 20 kg está originalmente en reposo y el resorte lo mantiene en equilibrio. Un momento de par $M = 30$ N · m es aplicado al disco como se muestra. Determine qué tan lejos viaja el centro de masa del disco hacia abajo por el plano inclinado, medido desde la posición de equilibrio, antes de detenerse. El disco rueda sin deslizar.




Probs. 18–22/23

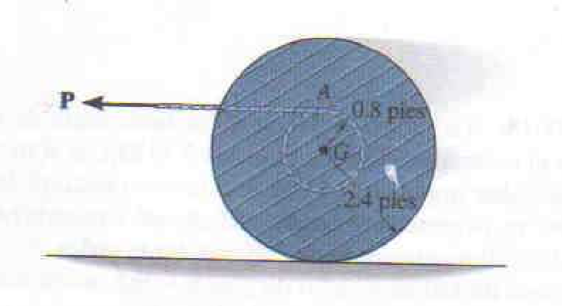
***18-24.** El eslabonamiento consta de dos barras $AB$ y $CD$ de 8 lb y de una barra $AD$ de 10 lb. Cuando $\theta = 0°$, la barra $AB$ está girando con velocidad angular $\omega_{AB} = 2$ rad/s. Si la barra $CD$ está sometida a un momento de par $M = 15$ lb · pie y la barra $AD$ está sometida a una fuerza horizontal $P = 20$ lb como se muestra, determine $\omega_{AB}$ en el instante $\theta = 90°$.

**18-25.** El eslabonamiento consta de dos barras $AB$ y $CD$ de 8 lb y de una barra $AD$ de 10 lb. Cuando $\theta = 0°$, la barra $AB$ está girando con velocidad angular $\omega_{AB} = 2$ rad/s. Si la barra $CD$ está sometida a un momento de par $M = 15$ lb · pie y la barra $AD$ está sometida a una fuerza horizontal $P = 20$ lb como se muestra, determine $\omega_{AB}$ en el instante $\theta = 45°$.



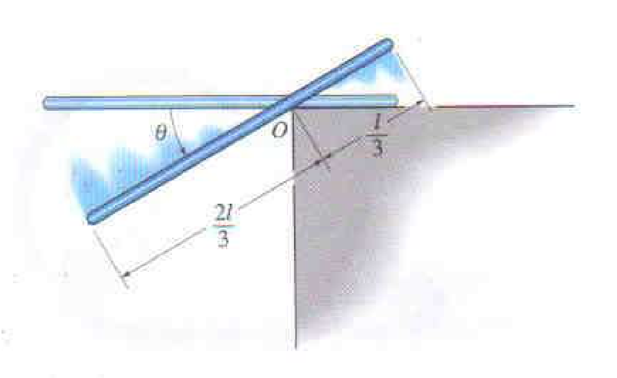

Probs. 18–24/25

**18-26.** El carrete tiene un peso de 500 lb y radio de giro $k_G = 1.75$ pies. Una fuerza horizontal $P = 15$ lb es aplicada a un cable enrollado alrededor de su núcleo interno. Si el carrete está originalmente en reposo, determine su velocidad angular después que el centro de masa $G$ se ha movido 6 pies hacia la izquierda. El carrete rueda sin deslizar. Desprecie la masa del cable.



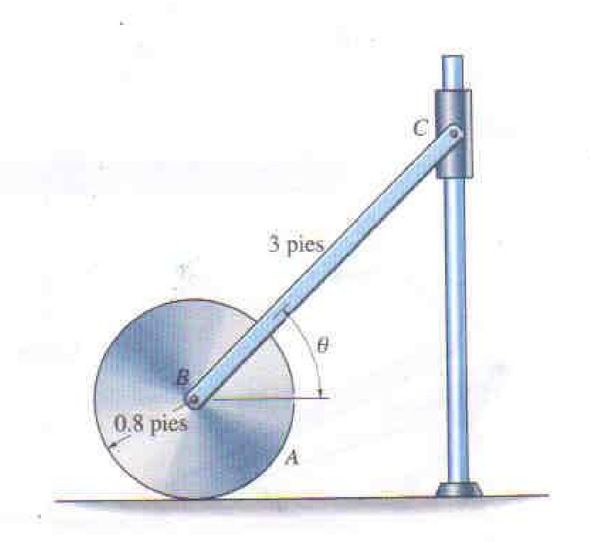

Prob. 18–26

**18-27.** La barra uniforme tiene masa $m$ y longitud $l$. Si es liberada del reposo cuando $\theta = 0°$, determine el ángulo $\theta$ al que empieza a deslizar primero. El coeficiente de fricción estática en $O$ es $\mu_s = 0.3$.



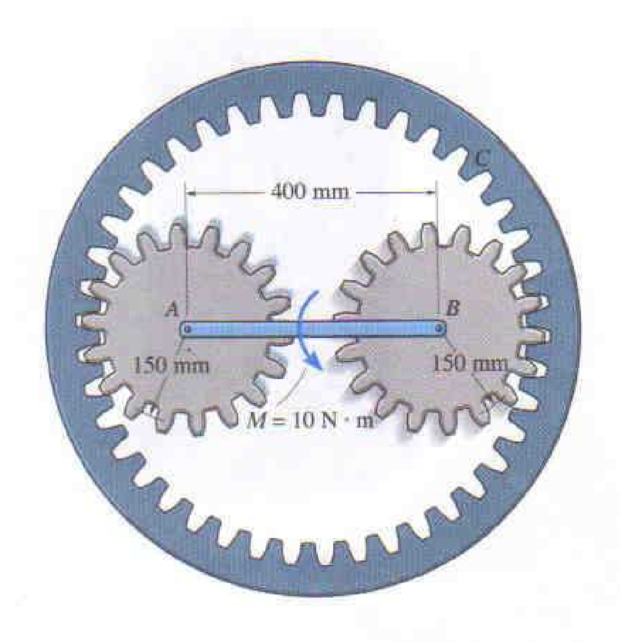

Prob. 18–27

•*18-28. El sistema consta de un disco $A$ de 20 kg, una barra esbelta $BC$ de 4 lb, y un collar liso $C$ de 1 lb. Si el disco rueda sin deslizar, determine la velocidad del collar en el instante en que la barra está en posición horizontal, esto es, $\theta = 0°$. El sistema es liberado del reposo cuando $\theta = 45°$.



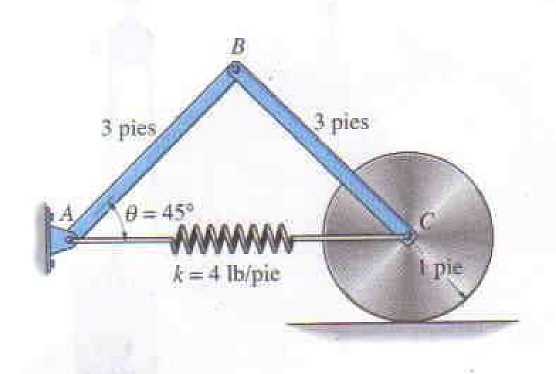

Prob. 18–28

**18-29.** Los dos engranes $A$ y $B$ de 2 kg están unidos a los extremos de una barra esbelta de 3 kg. Los engranes ruedan dentro del engrane anular fijo $C$ que se encuentra en un plano horizontal. Si se aplica una torca de 10 N · m al centro de la barra como se muestra, determine el número de revoluciones que la barra debe girar partiendo del reposo para que tenga una velocidad angular $\omega_{AB} = 20$ rad/s. Para los cálculos, suponga que los engranes pueden ser aproximados por discos delgados. ¿Cuál es el resultado si los engranes se encuentran en un plano vertical?



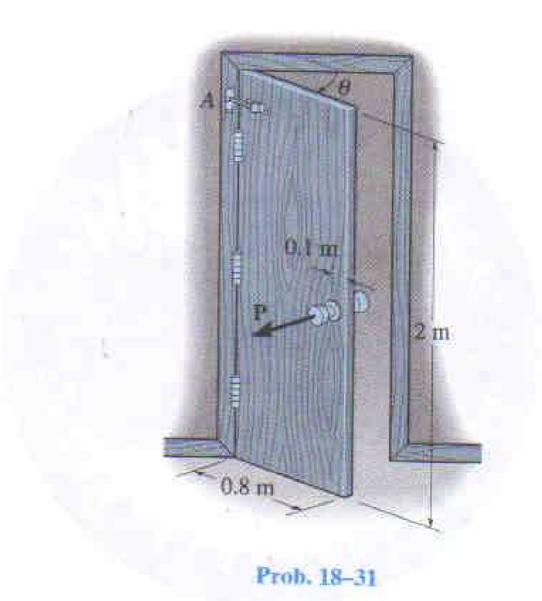

Prob. 18–29

**18-30.** El conjunto consta de dos barras esbeltas de 15 lb y un disco de 20 lb. Si el resorte no está estirado cuando $\theta = 45°$ y el conjunto es liberado del reposo en esta posición, determine la velocidad angular de la barra $AB$ en el instante en que $\theta = 0°$. El disco rueda sin deslizar.



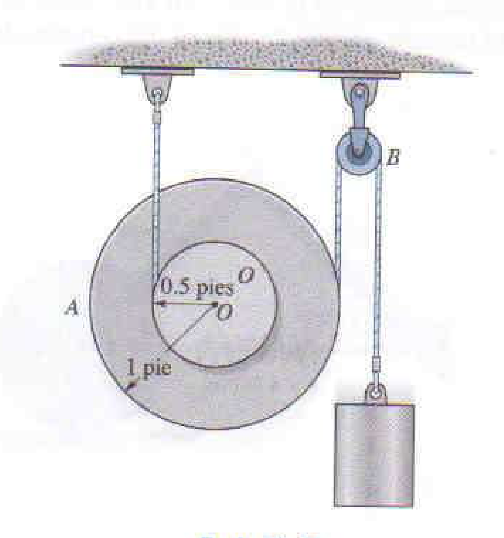

Prob. 18–30

**18-31.** La puerta uniforme tiene masa de 20 kg y puede ser tratada como una placa delgada con las dimensiones que se muestran. Si esta puerta se encuentra conectada a un resorte torsional colocado en $A$, el cual tiene rigidez $k = 80$ N · m/rad, determine la torsión inicial del resorte en radianes de manera que la puerta tenga una velocidad angular de 12 rad/s cuando se cierre en $\theta = 0°$ después de haber sido abierta en $\theta = 90°$ y liberada del reposo. *Sugerencia*: Para un resorte torsional, $M = k\theta$, donde $k$ es la rigidez y $\theta$ el ángulo de torsión.

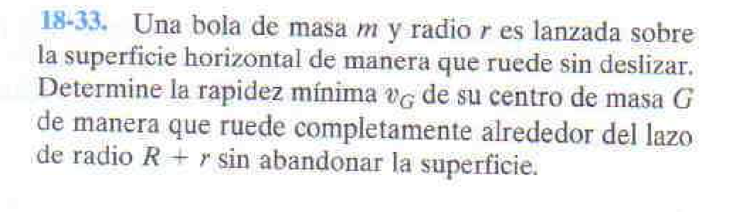


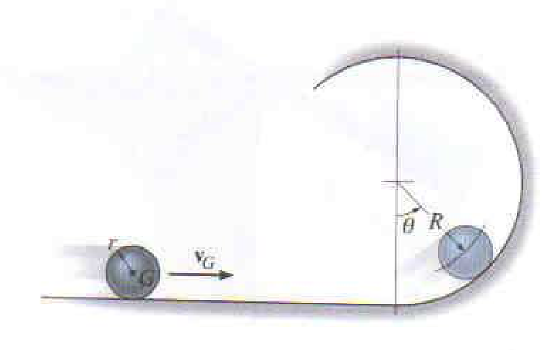

Prob. 18–31

*18-32. La polea $A$ pesa 15 lb y tiene radio de giro $k_O = 0.8$ pies. Si el sistema es liberado del reposo, determine la velocidad del centro $O$ de la polea después que el bloque de 10 lb se mueve hacia abajo 4 pies. Desprecie la masa de la polea colocada en $B$.



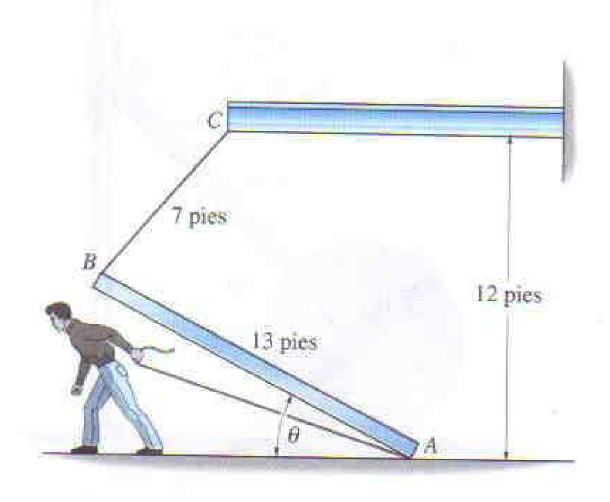

Prob. 18–32


**18-33.** Una bola de masa $m$ y radio $r$ es lanzada sobre la superficie horizontal de manera que ruede sin deslizar. Determine la rapidez mínima $v_G$ de su centro de masa $G$ de manera que ruede completamente alrededor del lazo de radio $R + r$ sin abandonar la superficie.




Prob. 18–33

**18-34.** La viga tiene un peso de 1500 lb y está siendo levantada a una posición vertical jalando muy despacio su extremo inferior $A$. Si la cuerda falla cuando $\theta = 60°$ y la viga está esencialmente en reposo, determine la rapidez de $A$ en el instante en que la cuerda $BC$ está en posición vertical. Desprecie la fricción y la masa de las cuerdas, y trate la viga como una barra esbelta.



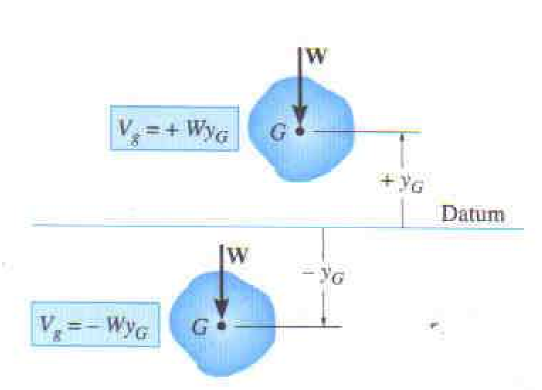

Prob. 18–34

## 18.5 Conservación de la energía

Cuando un sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo rígido está constituido sólo por *fuerzas conservativas*, el teorema de la conservación de la energía puede ser usado para resolver un problema que de otra manera sería resuelto mediante el principio del trabajo y la energía. Este teorema a menudo resulta más fácil de aplicar ya que el trabajo de una fuerza conservativa es *independiente de la trayectoria* y depende sólo de las posiciones inicial y final del cuerpo. En la sección 14.5 se demostró que el trabajo de una fuerza conservativa puede ser expresado como la diferencia en la energía potencial del cuerpo medida desde una referencia seleccionada arbitrariamente o datum.

**Energía potencial gravitatoria.** Como el peso total de un cuerpo puede considerarse concentrado en su centro de gravedad, la *energía potencial gravitatoria* del cuerpo es determinada conociendo la altura del centro de gravedad del cuerpo por arriba o por debajo de un datum horizontal. Midiendo $y_G$ como *positiva hacia arriba*, la energía potencial gravitatoria del cuerpo es entonces

$$V_g = W y_G \tag{18–14}$$



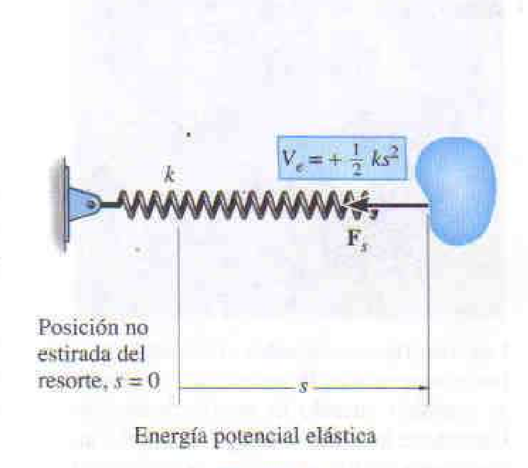

Energía potencial gravitatoria

**Fig. 18–17**

Aquí la energía potencial es *positiva* cuando $y_G$ es positiva, ya que el peso tiene la capacidad de efectuar *trabajo positivo* cuando el cuerpo es movido de regreso al datum, figura 18-17. De la misma manera, si el cuerpo está ubicado por *debajo* del datum $(-y_G)$, la energía potencial gravitatoria es *negativa*, ya que el peso efectúa *trabajo negativo* cuando el cuerpo retorna al datum.

**Energía potencial elástica.** La fuerza desarrollada por un resorte elástico es también una fuerza conservativa. La *energía potencial elástica* que un resorte imparte a un cuerpo unido a él cuando el resorte es alargado o comprimido desde una posición inicial no deformada ($s = 0$) hasta una posición final $s$, figura 18-18, es

$$V_e = +\tfrac{1}{2}ks^2 \tag{18–15}$$




Energía potencial elástica

**Fig. 18–18**

En la posición deformada, la fuerza existente en el resorte y que actúa *sobre el cuerpo* siempre tiene la capacidad de efectuar trabajo positivo cuando el resorte es llevado de regreso a su posición original no deformada (vea la sección 14.5).

**Conservación de la energía.** En general, si un cuerpo está sometido a fuerzas gravitatorias y elásticas, la *energía potencial* total es expresada como una función potencial $V$ representada como la suma algebraica

$$V = V_g + V_e \tag{18–16}$$

Aquí la medición de $V$ depende de la ubicación del cuerpo con respecto al datum seleccionado.

Observando que el trabajo de fuerzas conservativas puede ser escrito como una diferencia en sus energías potenciales, esto es, $(\Sigma U_{1-2})_{\text{cons}} = V_1 - V_2$, ecuación 14-16, podemos reescribir el principio del trabajo y la energía para un cuerpo rígido como

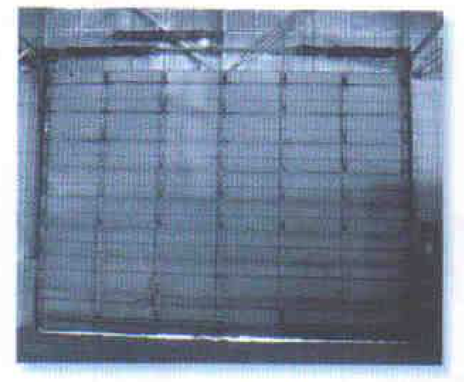
$$T_1 + V_1 + (\Sigma U_{1-2})_{\text{no cons}} = T_2 + V_2 \tag{18-17}$$

Aquí $(\Sigma U_{1\text{-}2})_{\text{no cons}}$ representa el trabajo de las fuerzas no conservativas como la fricción. Si este término es cero, entonces

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2 \tag{18–18}$$

Esta ecuación representa la conservación de la energía mecánica; y establece que la *suma* de las energías potencial y cinética del cuerpo permanece *constante* cuando el cuerpo se mueve de una posición a otra. También se aplica a un sistema de cuerpos rígidos lisos conectados por pasadores, a cuerpos conectados por cuerdas inextensibles, y a cuerpos acoplados con otros cuerpos. En todos estos casos, las fuerzas que actúan en los puntos de contacto son *eliminadas* del análisis, ya que ocurren en pares iguales colineales pero opuestos y cada par de fuerzas se mueve una distancia igual cuando el sistema experimenta desplazamiento.

Es importante recordar que sólo problemas que impliquen sistemas de fuerzas conservativas son los que pueden ser resueltos usando la ecuación 18-18. Como se estableció en la sección 14.5, la fuerza de fricción u otras fuerzas resistentes, las cuales dependen de la velocidad o de la aceleración, son no conservativas. El trabajo de tales fuerzas es transformado en energía térmica usada para calentar las superficies de contacto, y en consecuencia esta energía es disipada en los alrededores y puede no ser recuperada. Por tanto, los problemas que impliquen fuerzas de fricción pueden ser resueltos usando el principio del trabajo y la energía escrito en la forma de la ecuación 18-17, si es aplicable, o bien mediante las ecuaciones de movimiento.



Los resortes torsionales ubicados en la parte superior de la puerta de la cochera se enrollan cuando la puerta desciende. Cuando se levanta, la energía potencial almacenada en los resortes se convierte en energía potencial gravitatoria del peso de la puerta, logrando que ésta se abra más fácilmente.

## PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

La ecuación de la conservación de la energía se usa para resolver problemas que implican *velocidad*, *desplazamiento* y *sistemas de fuerza conservativa*. En aplicaciones se sugiere usar el siguiente procedimiento.

*Energía potencial.*

- Dibuje dos diagramas que muestren al cuerpo en sus posiciones inicial y final a lo largo de la trayectoria.
- Si el centro de gravedad, $G$, está sometido a un *desplazamiento vertical*, establezca un datum horizontal fijo desde el cual se mida la energía potencial $V_g$ gravitatoria del cuerpo.
- Los datos pertinentes a la elevación $y_G$ del centro de gravedad del cuerpo desde el datum y la extensión o compresión de cualquier resorte conectado pueden ser determinados a partir de la geometría del problema y anotados en los dos diagramas.
- Recuerde que la energía potencial $V = V_g + V_e$. Aquí $V_g = Wy_G$, que puede ser positiva o negativa, y $V_e = \frac{1}{2}ks^2$, la cual es siempre positiva.

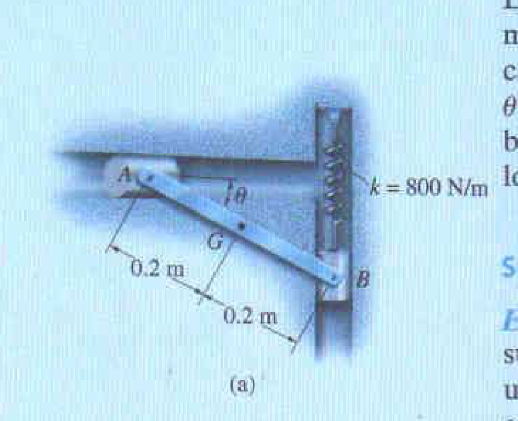
*Energía cinética.*

- La energía cinética del cuerpo consta de dos partes: la energía cinética traslacional, $T = \frac{1}{2}mv_G^2$, y la energía cinética rotatoria, $T = \frac{1}{2}I_G\omega^2$.
- Los diagramas cinemáticos para la velocidad pueden ser útiles para determinar $v_G$ y $\omega$ y establecer una *relación* entre estas cantidades.

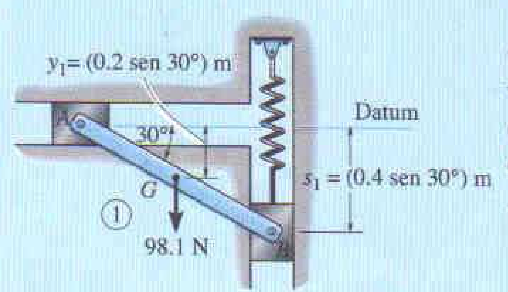
*Conservación de la energía.*

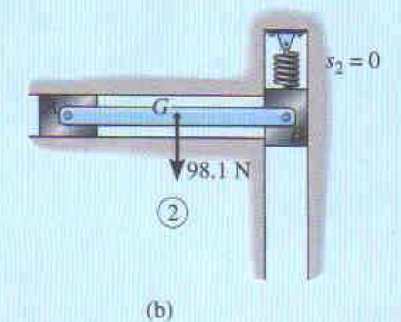
- Aplique la ecuación de la conservación de la energía $T_1 + V_1 = T_2 + V_2$.

## EJEMPLO 18.7

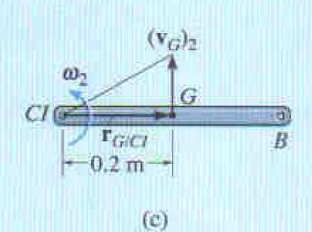



(a)




(b)




(c)

Fig. 18-19

La barra $AB$ de 10 kg mostrada en la figura 18-19*a* está confinada de modo que sus extremos se mueven en las ranuras horizontal y vertical. El resorte tiene rigidez $k = 800$ N/m y no está estirado cuando $\theta = 0°$. Determine la velocidad angular de $AB$ cuando $\theta = 0°$, si la barra es liberada del reposo cuando $\theta = 30°$. Desprecie la masa de los bloques deslizables.

### Solución

***Energía potencial.*** Los dos diagramas de la barra, cuando está en sus posiciones inicial y final, se muestran en la figura 18-19*b*. El datum, usado para medir la energía potencial gravitatoria, queda alineado con la barra cuando $\theta = 0°$.

Cuando la barra está en la posición 1, el centro de gravedad $G$ se ubica por *debajo del datum* de manera que la energía potencial gravitatoria es *negativa*. Además, energía potencial elástica (positiva) está almacenada en el resorte, ya que éste se encuentra alargado una distancia $s_1 = (0.4 \text{ sen } 30°)$ m. Entonces,

$$V_1 = -Wy_1 + \tfrac{1}{2}ks_1^2$$
$$= -98.1 \text{ N}(0.2 \text{ sen } 30° \text{ m}) + \tfrac{1}{2}(800 \text{ N/m})(0.4 \text{ sen } 30° \text{ m})^2 = 6.19 \text{ J}$$

Cuando la barra está en la posición 2, su energía potencial es cero, ya que el resorte no está alargado, $s_2 = 0$, y el centro de gravedad $G$ se ubica en el datum. Así,

$$V_2 = 0$$

***Energía cinética.*** La barra es liberada del reposo desde la posición 1, por lo que $(\mathbf{v}_G)_1 = \mathbf{0}$ y $\boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{0}$, y

$$T_1 = 0$$

En la posición 2, la velocidad angular es $\boldsymbol{\omega}_2$ y el centro de masa de la barra tiene velocidad $(\mathbf{v}_G)_2$. Entonces,

$$T_2 = \tfrac{1}{2}m(v_G)_2^2 + \tfrac{1}{2}I_G\omega_2^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(10 \text{ kg})(v_G)_2^2 + \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{12}(10 \text{ kg})(0.4 \text{ m})^2]\omega_2^2$$

Usando *cinemática*, $(\mathbf{v}_G)_2$ puede relacionarse con $\boldsymbol{\omega}_2$ como se muestra en la figura 18-19*c*. En el instante considerado, el centro instantáneo de velocidad cero ($CI$) para la barra está en el punto $A$; por consiguiente, $(v_G)_2 = (r_{G/CI})\omega_2 = (0.2)\omega_2$. Sustituyendo en la expresión anterior y simplificando, obtenemos

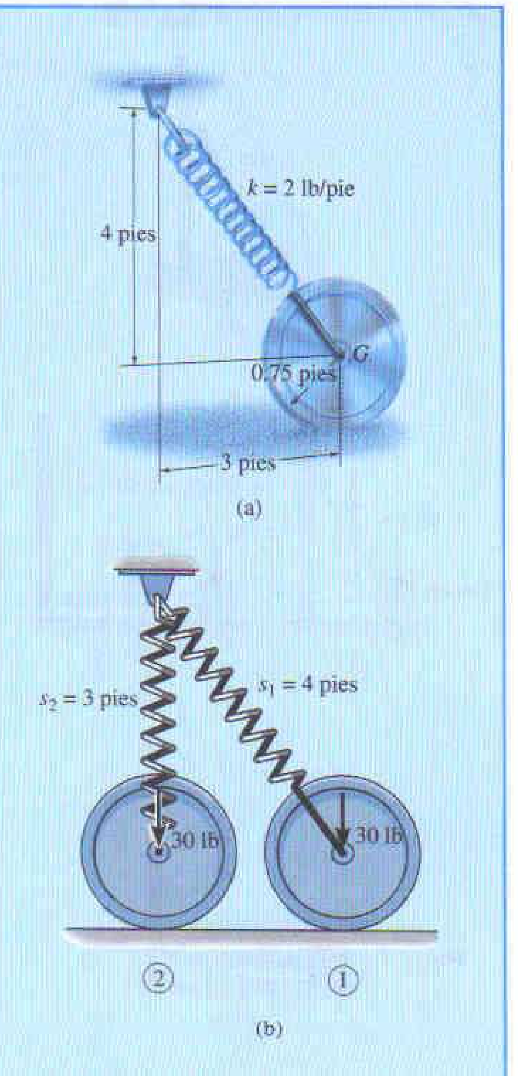
$$T_2 = 0.267\omega_2^2$$

***Conservación de la energía***

$$\{T_1\} + \{V_1\} = \{T_2\} + \{V_2\}$$
$$\{0\} + \{6.19\} = \{0.267\omega_2^2\} + \{0\}$$
$$\omega_2 = 4.82 \text{ rad/s} \circlearrowleft \qquad \textit{Resp.}$$

## EJEMPLO 18.8

El disco mostrado en la figura 18-20*a* tiene un peso de 30 lb y radio de giro $k_G = 0.6$ pies, y está unido a un resorte que tiene rigidez $k = 2$ lb/pie y longitud no estirada de 1 pie. Si el disco es liberado del reposo en la posición mostrada y rueda sin deslizar, determine su velocidad angular en el instante en que $G$ se mueve 3 pies hacia la izquierda.



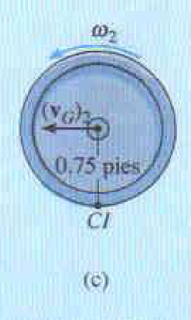




Fig. 18–20

### Solución

***Energía potencial.*** Dos diagramas del disco, cuando está en sus posiciones inicial y final, se muestran en la figura 18-20*b*. No se necesita aquí un datum gravitatorio puesto que el peso no es desplazado verticalmente. A partir de la geometría del problema, el resorte está estirado $s_1 = (\sqrt{3^2 + 4^2} - 1) = 4$ pies y $s_2 = (4 - 1) = 3$ pies en las posiciones inicial y final, respectivamente. Así,

$$V_1 = \tfrac{1}{2}ks_1^2 = \tfrac{1}{2}(2 \text{ lb/pies})(4 \text{ pies})^2 = 16 \text{ J}$$
$$V_2 = \tfrac{1}{2}ks_2^2 = \tfrac{1}{2}(2 \text{ lb/pies})(3 \text{ pies})^2 = 9 \text{ J}$$

***Energía cinética.*** El disco es liberado del reposo de manera que $(\mathbf{v}_G)_1 = \mathbf{0}$, $\boldsymbol{\omega}_1 = \mathbf{0}$, y

$$T_1 = 0$$

En la posición final,

$$T_2 = \frac{1}{2}m(v_G)_2^2 + \frac{1}{2}I_G\omega_2^2$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{30 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}\right)(v_G)_2^2 + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{30 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}\right)(0.6 \text{ pies})^2\right]\omega_2^2$$

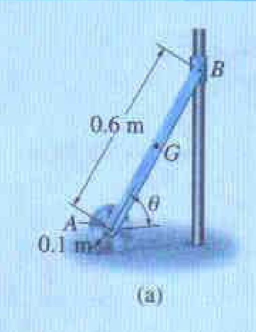
Como el disco rueda sin deslizar, $(\mathbf{v}_G)_2$ puede ser relacionada con $\boldsymbol{\omega}_2$ mediante el centro instantáneo de velocidad cero, figura 18-20*c*, esto es, $(v_G)_2 = (0.75 \text{ pies})\omega_2$. Sustituyendo y simplificando resulta

$$T_2 = 0.430\omega_2^2$$

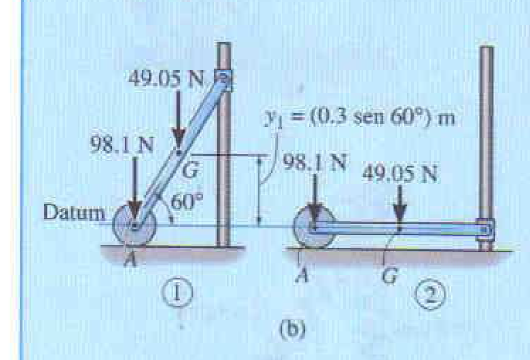
***Conservación de la energía***

$$\{T_1\} + \{V_1\} = \{T_2\} + \{V_2\}$$
$$\{0\} + \{16\} = \{0.430\omega_2^2\} + \{9\}$$
$$\omega_2 = 4.04 \text{ rad/s} \circlearrowleft \qquad \textit{Resp.}$$

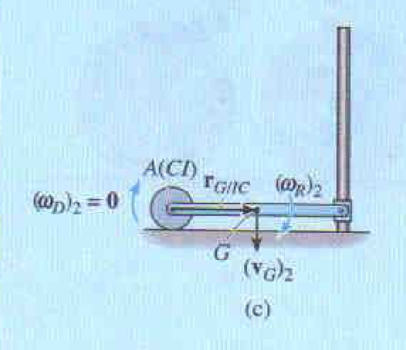
## EJEMPLO 18.9



(a)



(b)



(c)

Fig. 18-21

El disco homogéneo de 10 kg mostrado en la figura 18-21*a* está unido a una barra *AB* uniforme de 5 kg. Si el conjunto es liberado del reposo cuando $\theta = 60°$, determine la velocidad angular de la barra cuando $\theta = 0°$. Suponga que el disco rueda sin deslizar. Desprecie la fricción a lo largo de la guía y la masa del collar situado en *B*.

### Solución

*Energía potencial.* Dos diagramas para la barra y el disco, cuando están ubicados en sus posiciones inicial y final, se muestran en la figura 18-21*b*. Por conveniencia, el datum pasa por el punto *A*.

Cuando el sistema está en la posición 1, el peso de la barra tiene energía potencial positiva. Así,

$$V_1 = W_R y_1 = 49.05 \text{ N}(0.3 \text{ sen } 60° \text{ m}) = 12.74 \text{ J}$$

Cuando el sistema está en la posición 2, tanto el peso de la barra como el peso del disco tienen energía potencial cero. ¿Por qué? Así,

$$V_2 = 0$$

*Energía cinética.* Como todo el sistema está en reposo en la posición inicial,

$$T_1 = 0$$

En la posición final, la barra tiene velocidad angular $(\boldsymbol{\omega}_R)_2$ y su centro de masa tiene velocidad $(\mathbf{v}_G)_2$, figura 18-21*c*. Como la barra está *totalmente extendida* en esta posición, el disco se encuentra momentáneamente en reposo, por lo que $(\boldsymbol{\omega}_D)_2 = \mathbf{0}$ y $(\mathbf{v}_A)_2 = \mathbf{0}$. Para la barra, $(\mathbf{v}_G)_2$ puede relacionarse con $(\boldsymbol{\omega}_R)_2$ por medio del centro instantáneo de velocidad cero, el cual se ubica en el punto *A*, figura 18-21*c*. Por consiguiente, $(v_G)_2 = r_{G/CI}(\omega_R)_2$ o $(v_G)_2 = 0.3(\omega_R)_2$. Entonces,

$$\begin{aligned} T_2 &= \frac{1}{2}m_R(v_G)_2^2 + \frac{1}{2}I_G(\omega_R)_2^2 + \frac{1}{2}m_D(v_A)_2^2 + \frac{1}{2}I_A(\omega_D)_2^2 \\ &= \frac{1}{2}(5 \text{ kg})[0.3 \text{ m}(\omega_R)_2]^2 + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{12}(5 \text{ kg})(0.6 \text{ m})^2\right](\omega_R)_2^2 + 0 + 0 \\ &= 0.3(\omega_R)_2^2 \end{aligned}$$

*Conservación de la energía*

$$\{T_1\} + \{V_1\} = \{T_2\} + \{V_2\}$$
$$\{0\} + \{12.74\} = \{0.3(\omega_R)_2^2\} + \{0\}$$
$$(\omega_R)_2 = 6.52 \text{ rad/s} \circlearrowright \qquad \textit{Resp.}$$

# PROBLEMAS

**18-35.** Resuelva el problema 18-13 usando la ecuación de la conservación de la energía.

***18-36.** Resuelva el problema 18-12 usando la ecuación de la conservación de la energía.

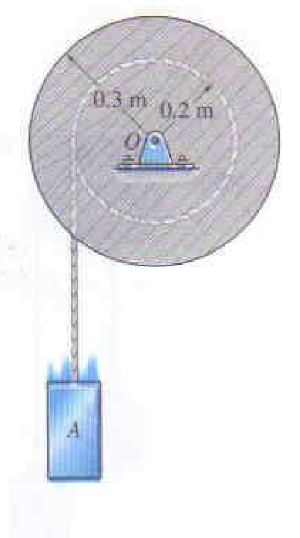
**18-37.** Resuelva el problema 18-30 usando la ecuación de la conservación de la energía.

**18-38.** Resuelva el problema 18-11 usando la ecuación de la conservación de la energía.

**18-39.** Resuelva el problema 18-34 usando la ecuación de la conservación de la energía.

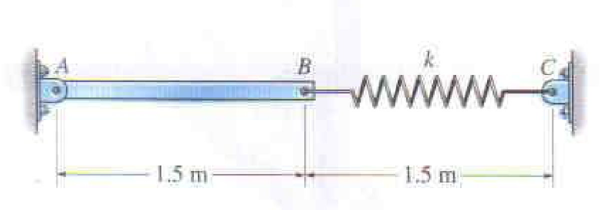
***18-40.** Resuelva el problema 18-28 usando la ecuación de la conservación de la energía.

**18-41.** El carrete tiene masa de 50 kg y radio de giro $k_O = 0.280$ m. Si el bloque $A$ de 20 kg es liberado del reposo, determine la distancia que debe caer para que el carrete tenga velocidad angular $\omega = 5$ rad/s. ¿Cuál es la tensión en la cuerda mientras el bloque está en movimiento? Desprecie la masa de la cuerda.



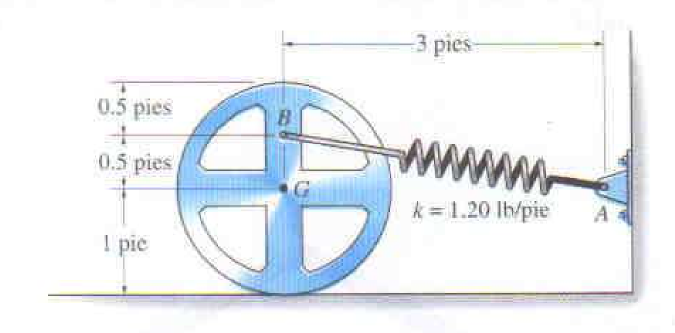

**Prob. 18–41**

**18-42.** Cuando la barra esbelta $AB$ de 10 kg tiene posición horizontal se encuentra en reposo y el resorte no está estirado. Determine la rigidez $k$ del resorte de manera que el movimiento de la barra es detenido momentáneamente cuando ésta ha girado hacia abajo 90°.



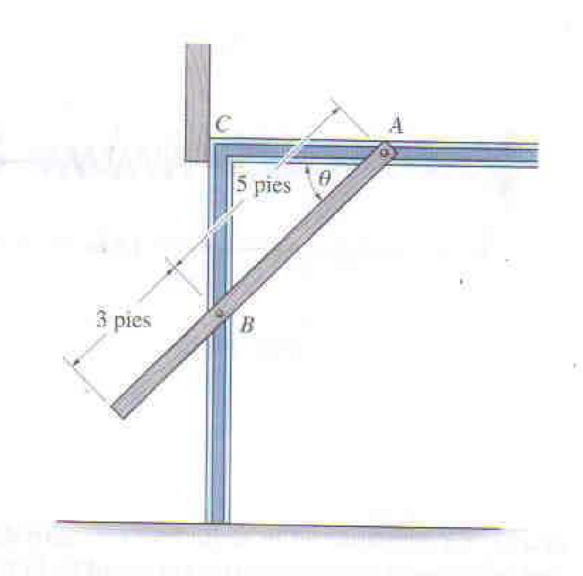

**Prob. 18–42**

**18-43.** La rueda de 50 lb tiene radio de giro $k_G = 0.7$ pies con respecto a su centro de gravedad $G$. Si rueda sin deslizar, determine su velocidad angular cuando ha girado 90°en el sentido de las manecillas del reloj desde la posición mostrada. El resorte $AB$ tiene rigidez $k = 1.20$ lb/pie y longitud no estirada de 0.5 pies. La rueda es liberada del reposo.



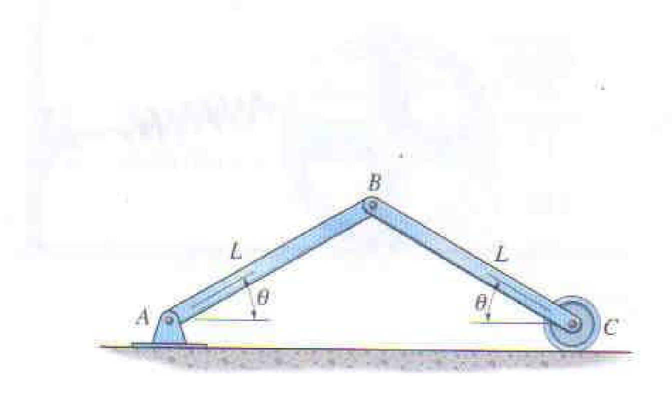

**Prob. 18–43**

***18-44.** La puerta está hecha a partir de una pieza cuyos extremos se mueven a lo largo de las guías horizontal y vertical. Si la puerta se encuentra en la posición abierta, $\theta = 0°$, y entonces es liberada, determine la rapidez con que su extremo $A$ golpea el tope colocado en $C$. Suponga que la puerta es una placa delgada de 180 lb con ancho de 10 pies.



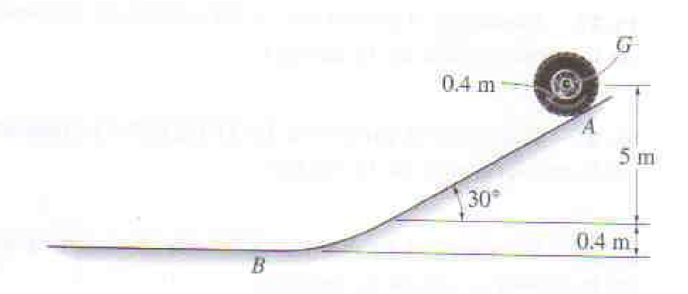

**Prob. 18–44**

**18-45.** Las dos barras son liberadas del reposo en la posición $\theta$. Determine sus velocidades angulares en el instante en que están en posición horizontal. Desprecie la masa del rodillo en $C$. Cada barra tiene masa $m$ y longitud $L$.



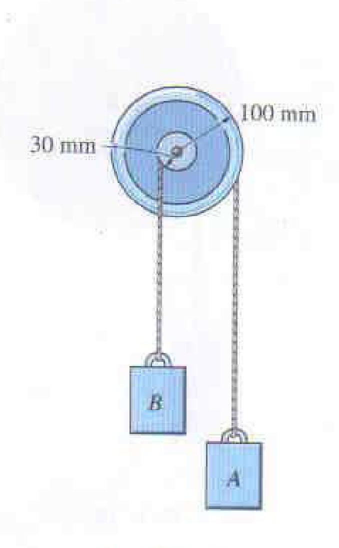

**Prob. 18–45**

**18-46.** Un neumático de automóvil tiene masa de 7 kg y radio de giro $k_G = 0.3$. Si es liberado del reposo en el punto $A$ sobre el plano inclinado, determine su velocidad angular cuando alcanza el plano horizontal. El neumático rueda sin deslizar.



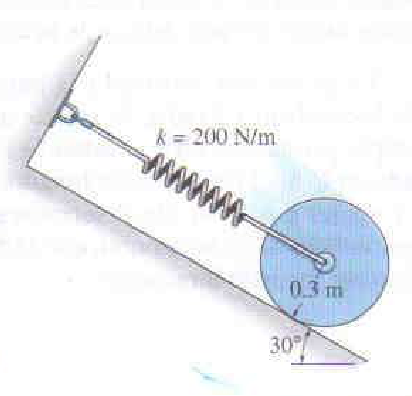

**Prob. 18–46**

**18-47.** La polea de disco compuesto consta de un cubo y un borde exterior unido al disco. Si la polea tiene masa de 3 kg y radio de giro $k_G = 45$ mm, determine la rapidez del bloque $A$ después que ha descendido 0.2 m desde el reposo. Los bloques $A$ y $B$ tienen masa de 2 kg cada uno. Desprecie la masa de las cuerdas.



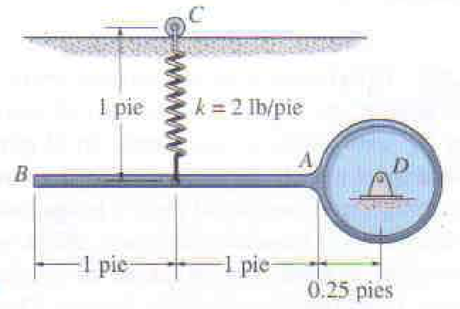

**Prob. 18–47**

*18-48. En el instante en que el resorte no está deformado, el centro del disco de 40 kg tiene rapidez de 4 m/s. Desde este punto determine la distancia $d$ que el disco se mueve hacia abajo por el plano antes de detenerse momentáneamente. El disco rueda sin deslizar.



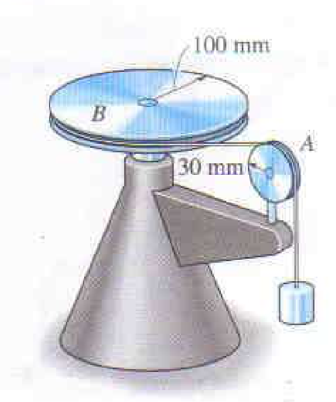

Prob. 18–48

18-49. El péndulo consta de una barra $BA$ de 2 lb y un disco de 6 lb. El resorte está estirado 0.3 pies cuando la barra se encuentra en posición horizontal como se muestra. Si el péndulo es liberado del reposo y gira con respecto al punto $D$, determine su velocidad angular en el instante en que la barra está en posición vertical. El rodillo colocado en $C$ permite que el resorte permanezca vertical al caer la barra.



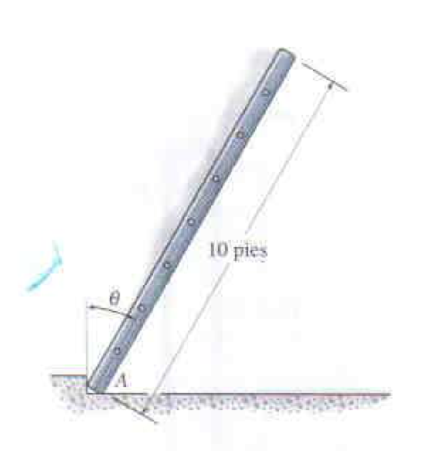

Prob. 18–49

18-50. El conjunto consta de la polea $A$ de 3 kg y la polea $B$ de 10 kg. Si un bloque de 2 kg es suspendido de la cuerda, determine su rapidez después que desciende 0.5 m partiendo del reposo. Desprecie la masa de la cuerda y trate las poleas como discos delgados. No ocurre ningún deslizamiento.




Prob. 18–50

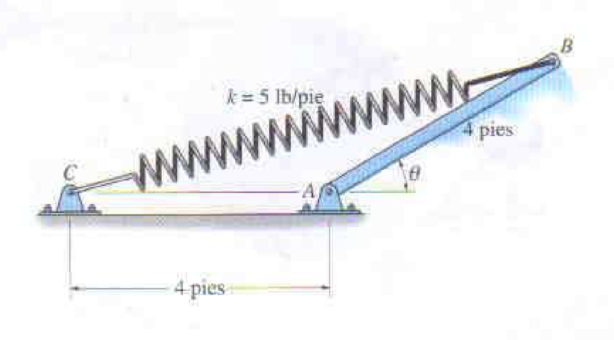
18-51. Una escalera uniforme con peso de 30 lb es liberada del reposo cuando está en posición vertical. Si se permite que caiga libremente, determine el ángulo $\theta$ en el que el extremo $A$ inferior empieza a levantarse del suelo. Para el cálculo, suponga que la escalera es una barra esbelta y desprecie la fricción en el punto $A$.




Prob. 18–51

*18-52. La barra esbelta $AB$ de 25 lb está unida a un resorte $BC$ que tiene longitud no estirada de 4 pies. Si la barra es liberada del reposo cuando $\theta = 30°$, determine su velocidad angular en el instante $\theta = 90°$.

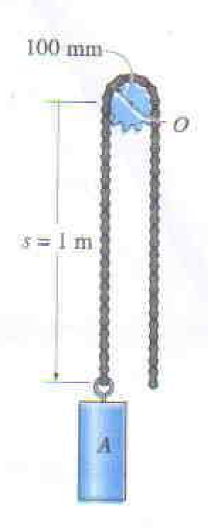
18-53. La barra esbelta $AB$ de 25 lb está unida a un resorte $BC$ que tiene longitud no estirada de 4 pies. Si la barra es liberada del reposo cuando $\theta = 30°$, determine su velocidad angular en el instante en que el resorte no está estirado.




Probs. 18–52/53

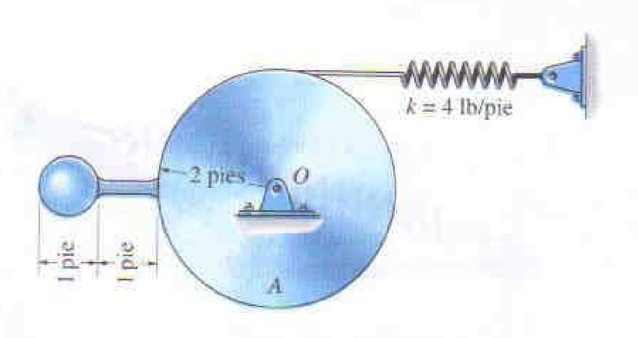
**18-54.** Una cadena con masa insignificante cuelga de una rueda dentada que tiene masa de 2 kg y radio de giro $k_O$ = 50 mm. Si el bloque $A$ de 4 kg es liberado del reposo en la posición $s$ = 1 m, determine la velocidad angular de la rueda en el instante $s$ = 2 m.

**18-55.** Resuelva el problema 18-54 si la cadena tiene masa de 0.8 kg/m. Para el cálculo desprecie la porción de la cadena que se enrolla sobre la rueda dentada.




Probs. 18–54/55

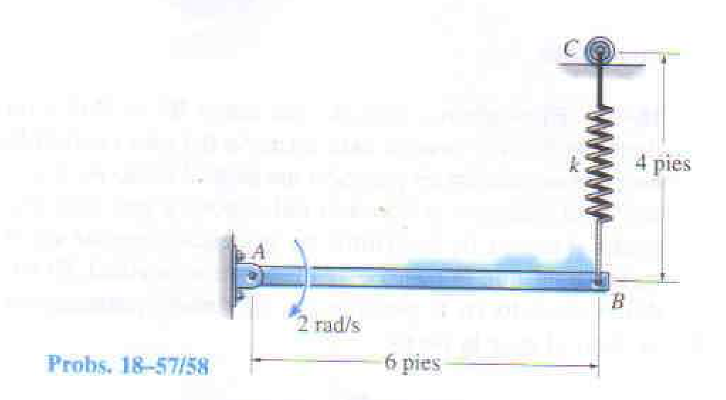
***18-56.** El disco $A$ está articulado en el punto $O$ y pesa 15 lb. Una barra de 1 pie y que pesa 2 lb, y una esfera de 1 pie de diámetro y peso de 10 lb están soldadas al disco, como se muestra. Si originalmente el resorte está estirado 1 pie y la esfera se libera desde la posición mostrada, determine la velocidad angular del disco cuando ha girado 90°.




Prob. 18–56

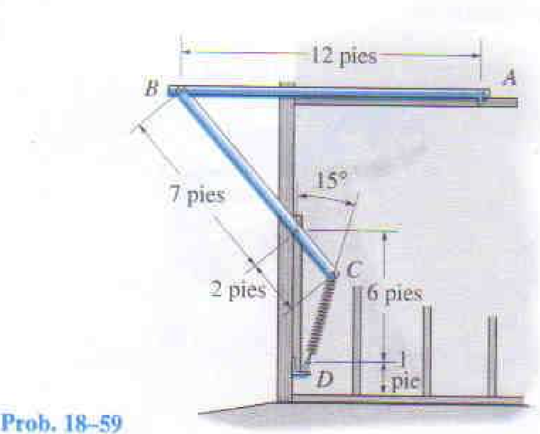
**18-57.** En el instante mostrado, la barra de 50 lb está girando hacia abajo a 2 rad/s. El resorte unido a su extremo siempre permanece vertical debido a la guía de rodillo instalada en $C$. Si el resorte tiene longitud no estirada de 2 pies y rigidez $k$ = 6 lb/pie, determine la velocidad angular de la barra en el instante en que ha girado hacia abajo 30° por debajo de la horizontal.

**18-58.** En el instante mostrado, la barra de 50 lb está girando hacia abajo a 2 rad/s. El resorte unido a su extremo siempre permanece vertical debido a la guía de rodillo instalada en $C$. Si el resorte tiene longitud no estirada de 2 pies y rigidez $k$ = 12 lb/pie, determine el ángulo $\theta$, medido por debajo de la horizontal, que la barra gira antes de detenerse momentáneamente.




Probs. 18–57/58

**18-59.** El extremo $A$ de la puerta de una cochera, $AB$, viaja a lo largo de la guía horizontal, y el extremo del miembro $BC$ está unido a un resorte en el punto $C$. Si originalmente el resorte no está estirado, determine la rigidez $k$ de manera que cuando la puerta caiga hacia abajo desde el reposo en la posición mostrada, tenga velocidad angular cero en el momento en que se cierra, esto es, cuando la puerta y $BC$ están en posición vertical. Desprecie la masa del miembro $BC$ y suponga que la puerta es una placa delgada con peso de 200 lb y ancho y altura de 12 pies. Se tiene una conexión similar con todo y resorte en el otro lado de la puerta.




Prob. 18–59

## REPASO DEL CAPÍTULO

- *Energía cinética.* La energía cinética de un cuerpo rígido que experimenta movimiento plano puede ser referida a su centro de masa. Para un cuerpo en traslación, $T = \frac{1}{2}mv_G^2$. Si el cuerpo está girando con respecto a un eje fijo que pasa por el punto $O$, entonces su centro de masa tiene cierta velocidad, y el cuerpo tiene también velocidad angular. Por tanto, $T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$. Usando $v_G = \omega r$ y el teorema de los ejes paralelos, incluso podemos determinar la energía cinética relativa al punto $O$. Tenemos $T = \frac{1}{2}I_O\omega^2$.

  Para movimiento plano general, la energía cinética es simplemente $T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega^2$, la suma escalar de sus energías cinéticas traslacional y rotatoria.

- *Trabajo de una fuerza y un momento de par.* Una fuerza efectúa trabajo cuando experimenta un desplazamiento $ds$ en la dirección de la fuerza. El trabajo es $U = \int F\,ds$. Si la fuerza es constante y tiene la dirección de su desplazamiento $\Delta s$, entonces $U = F\,\Delta s$. Si un peso **W** es desplazado hacia abajo $\Delta y$, entonces $U = W\,\Delta y$. Si una fuerza **F** estira un resorte una distancia $s$, entonces $U = \frac{1}{2}ks^2$. Las fuerzas de fricción y normal que actúan sobre un cilindro o una esfera que ruedan sin deslizar no trabajarán, ya que la fuerza normal no se desplaza y la fuerza de fricción actúa sobre puntos sucesivos localizados en la superficie del cuerpo. Un momento de par trabajará cuando experimente una rotación $\theta$ en la dirección del momento del par. Si este momento es constante, entonces $U = M\theta$.

- *Principio del trabajo y la energía.* Los problemas que implican velocidad, fuerza y desplazamiento pueden ser resueltos usando el principio del trabajo y la energía.

$$T_1 + \Sigma U_{1\text{-}2} = T_2$$

  Aquí, la energía cinética es la suma de sus partes rotatoria y traslacional. En las aplicaciones, deberá dibujarse un diagrama de cuerpo libre para tomar en cuenta el trabajo de todas las fuerzas y momentos de par que actúan sobre el cuerpo al moverse éste a lo largo de su trayectoria.

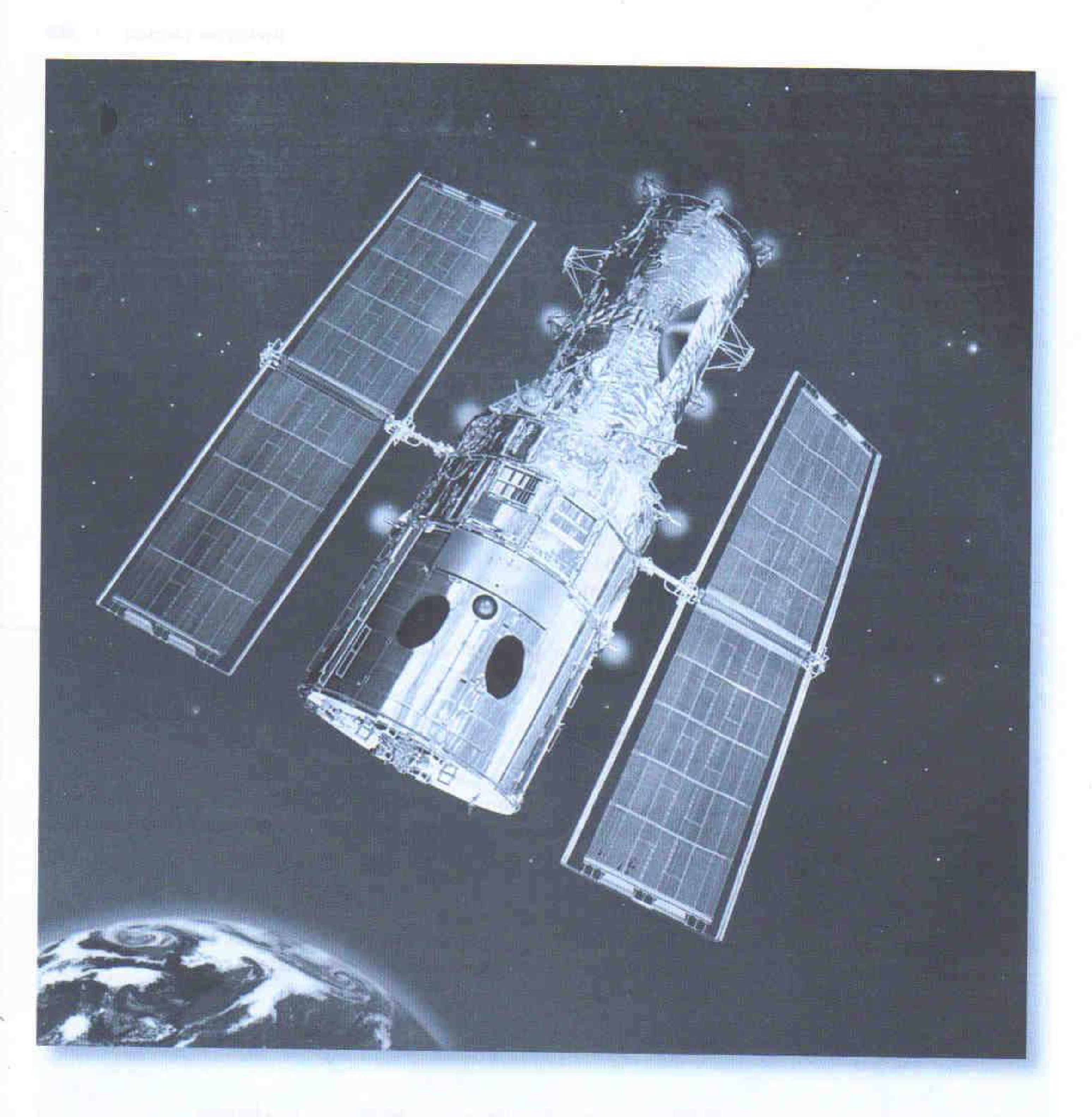
- *Conservación de la energía.* Si un cuerpo rígido está sometido sólo a fuerzas conservativas, entonces la ecuación de la conservación de la energía puede usarse para resolver el problema. Esta ecuación requiere que la suma de las energías potencial y cinética del cuerpo continúe siendo la misma en dos puntos cualesquiera a lo largo de la trayectoria, esto es,

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

  Aquí, la energía potencial es la suma de sus energías potenciales gravitatorias y elásticas.

$$V = V_g + V_e$$

  En particular, la energía potencial gravitatoria será positiva si el centro de masa del cuerpo está ubicado por arriba de un datum. Si el centro de masa está por debajo del datum, entonces la energía potencial gravitatoria será negativa. La energía potencial elástica es siempre positiva, independientemente de si el resorte está alargado o comprimido.



El lanzamiento de este satélite meteorológico requiere la aplicación de los principios de impulso y momentum para predecir exactamente su movimiento angular orbital y la orientación apropiada.

CAPÍTULO 19

# Cinética plana de un cuerpo rígido: Impulso y momentum

## OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Desarrollar formulaciones para el momentum lineal y el momentum angular de un cuerpo.
- Aplicar los principios del impulso lineal y angular, del momentum lineal y del momentum angular para resolver problemas cinéticos de cuerpo rígido planos que implican fuerza, velocidad y tiempo.
- Estudiar la aplicación de la conservación del momentum.
- Analizar la mecánica del impacto excéntrico.

## 19.1 Momentum lineal y momentum angular

En este capítulo usaremos los principios del impulso lineal y angular y del momentum lineal y momentum angular para resolver problemas que implican fuerza, velocidad y tiempo del movimiento plano de cuerpos rígidos. Sin embargo, antes hacerlo, será necesario formalizar primero los métodos para obtener el momentum lineal y el momentum angular del cuerpo cuando se encuentre sometido a traslación, rotación con respecto a un eje fijo, y a movimiento plano general. Supondremos aquí que el cuerpo es simétrico con respecto a un plano de referencia inercial $x$-$y$.

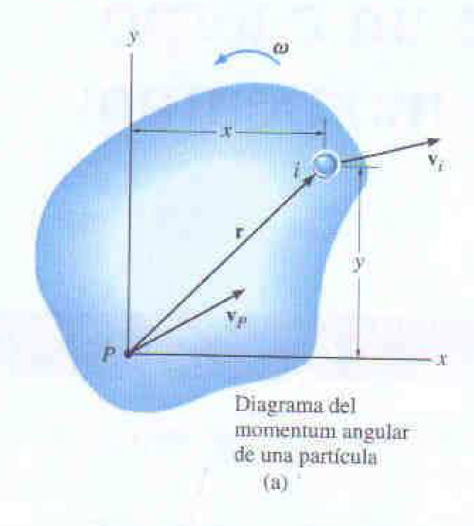
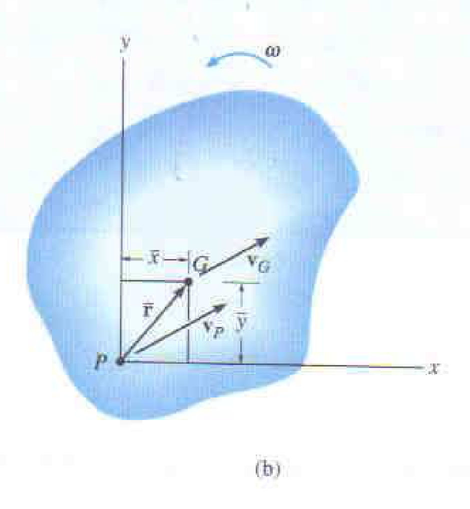



Diagrama del momentum angular de una partícula

(a)




(b)

Fig. 19–1

**Momentum lineal.** El momentum lineal de un cuerpo rígido es determinado sumando vectorialmente los momentos lineales de todas las partículas del cuerpo, esto es, $\mathbf{L} = \Sigma m_i\mathbf{v}_i$. Como $\Sigma m_i\mathbf{v}_i = m\mathbf{v}_G$ (vea la sección 15.2) también podemos escribir

$$\mathbf{L} = m\mathbf{v}_G \qquad (19\text{–}1)$$

Esta ecuación establece que el momentum lineal de un cuerpo es una cantidad vectorial con *magnitud* $mv_G$, la cual se mide comúnmente en unidades de kg · m/s o slug · pie/s, y una *dirección* definida por $\mathbf{v}_G$, que es la velocidad del centro de masa del cuerpo.

**Momentum angular.** Considere el cuerpo que presenta la figura 19-1*a*, el cual está sometido a movimiento plano general. En el instante mostrado, el punto arbitrario $P$ tiene velocidad $\mathbf{v}_P$, y el cuerpo tiene velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$. Si la velocidad de la partícula $i$-ésima del cuerpo debe ser determinada, figura 19-1*a*, entonces

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_P + \mathbf{v}_{i/P} = \mathbf{v}_P + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

El momentum angular de la partícula $i$ con respecto al punto $P$ es igual al "momento" del momentum lineal de la partícula con respecto al punto $P$, figura 19-1*a*. Así,

$$(\mathbf{H}_P)_i = \mathbf{r} \times m_i\mathbf{v}_i$$

Expresando $\mathbf{v}_i$ en términos de $\mathbf{v}_P$ y usando vectores cartesianos, tenemos

$$(H_P)_i\mathbf{k} = m_i(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \times [(v_P)_x\mathbf{i} + (v_P)_y\mathbf{j} + \omega\mathbf{k} \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j})]$$
$$(H_P)_i = -m_iy(v_P)_x + m_ix(v_P)_y + m_i\omega r^2$$

Haciendo $m_i \to dm$ e integrando sobre toda la masa $m$ del cuerpo, obtenemos

$$H_P = -\left(\int_m y\,dm\right)(v_P)_x + \left(\int_m x\,dm\right)(v_P)_y + \left(\int_m r^2\,dm\right)\omega$$

Aquí $H_P$ representa el momentum angular del cuerpo con respecto a un eje (el eje $z$) perpendicular al plano del movimiento y pasa por el punto $P$. Como $\bar{y}m = \int y\,dm$ y $\bar{x}m = \int x\,dm$, las integrales de los términos primero y segundo a la derecha se usan para ubicar el centro de masa $G$ del cuerpo con respecto a $P$, figura 19-1*b*. Además, la última integral representa el momento de inercia del cuerpo calculado con respecto al eje $z$, esto es, $I_P = \int r^2\,dm$. Entonces,

$$H_P = -\bar{y}m(v_P)_x + \bar{x}m(v_P)_y + I_P\omega \qquad (19\text{–}2)$$

Esta ecuación se reduce a una forma más simple si el punto $P$ coincide con el centro de masa $G$ del cuerpo,* en cuyo caso $\bar{x} = \bar{y} = 0$. Por consiguiente,

*También se reduce a la misma forma simple, $H_P = I_P\omega$, si el punto $P$ es un *punto fijo* (vea la ecuación 19-9) o la velocidad del punto $P$ está dirigida a lo largo de la línea $PG$.

$$H_G = I_G\omega \qquad (19\text{–}3)$$

*Esta ecuación establece que el momentum angular del cuerpo calculado con respecto a G es igual al producto del momento de inercia del cuerpo con respecto a un eje que pase por G y la velocidad angular del cuerpo.* Es importante observar que $\mathbf{H}_G$ es una cantidad vectorial con *magnitud* $I_G\omega$, la cual comúnmente es medida en unidades de kg · m²/s o slug · pie²/s, y *dirección* definida mediante $\boldsymbol{\omega}$, que siempre es perpendicular al plano del movimiento.

La ecuación 19-2 también puede ser reescrita en términos de las componentes $x$ y $y$ de la velocidad del centro de masa del cuerpo, $(v_G)_x$ y $(v_G)_y$, y del momento de inercia $I_G$ del cuerpo. Como el punto $G$ está ubicado en las coordenadas $\bar{x}, \bar{y}$, entonces, por el teorema de los ejes paralelos, $I_P = I_G + m(\bar{x}^2 + \bar{y}^2)$. Sustituyendo en la ecuación 19-2 y reordenando términos, tenemos

$$H_P = \bar{y}m[-(v_P)_x + \bar{y}\omega] + \bar{x}m[(v_P)_y + \bar{x}\omega] + I_G\omega \qquad (19\text{–}4)$$

A partir del diagrama cinemático de la figura 19-1b, $\mathbf{v}_G$ puede ser expresada en términos de $\mathbf{v}_P$ como

$$\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_p + \boldsymbol{\omega} \times \bar{\mathbf{r}}$$

$$(v_G)_x\mathbf{i} + (v_G)_y\mathbf{j} = (v_p)_x\mathbf{i} + (v_p)_y\mathbf{j} + \omega\mathbf{k} \times (\bar{x}\mathbf{i} + \bar{y}\mathbf{j})$$

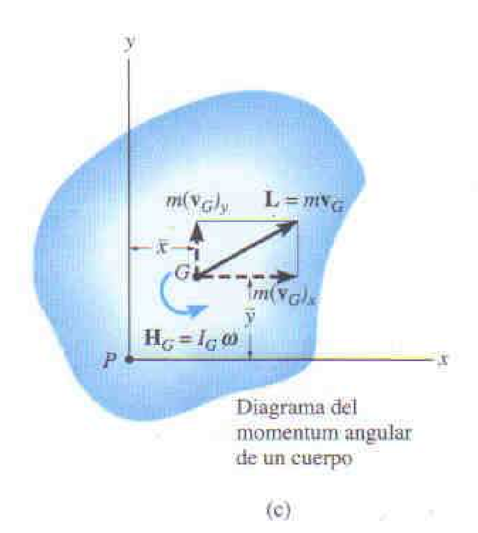
Efectuando el producto cruz e igualando las respectivas componentes $\mathbf{i}$ y $\mathbf{j}$ resultan las dos ecuaciones escalares

$$(v_G)_x = (v_P)_x - \bar{y}\omega$$
$$(v_G)_y = (v_P)_y + \bar{x}\omega$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación 19-4 resulta

$$H_P = -\bar{y}m(v_G)_x + \bar{x}m(v_G)_y + I_G\omega \qquad (19\text{–}5)$$

Con referencia a la figura 19-1*c*, *este resultado indica que cuando el momentum angular del cuerpo se calcula con respecto al punto P, es equivalente al momento del momentum lineal* $m\mathbf{v}_G$ *o de sus componentes* $m(\mathbf{v}_G)_x$ y $m(\mathbf{v}_G)_y$ *con respecto a P más el momentum angular* $I_G\boldsymbol{\omega}$. Advierta que como $\boldsymbol{\omega}$ es un vector libre, $\mathbf{H}_G$ *puede actuar en cualquier punto sobre el cuerpo* siempre que conserve sus mismas magnitud y dirección. Además, como el momentum angular es igual al "momento" del momentum lineal, la *línea de acción de* $\mathbf{L}$ *debe pasar por el centro de masa G del cuerpo* para conservar la magnitud correcta de $\mathbf{H}_P$ cuando se calculan "momentos" con respecto a $P$, figura 19-1*c*. Como resultado de este análisis, consideraremos ahora tres tipos de movimiento.




(c)

**Fig. 19–1**

**Traslación.** Cuando un cuerpo rígido de masa $m$ está sometido a *traslación* rectilínea o curvilínea, figura 19-2$a$, su centro de masa tiene una velocidad $\mathbf{v}_G = \mathbf{v}$ y $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ para el cuerpo. Por consiguiente, el momentum lineal y el momentum angular calculados con respecto a $G$ se convierten en

$$L = mv_G \qquad H_G = 0 \tag{19-6}$$

Si el momentum angular es calculado con respecto a cualquier otro punto $A$ sobre o fuera del cuerpo, figura 19-2$a$, el "momento" del momentum lineal $\mathbf{L}$ debe ser calculado con respecto al punto. Ya que $d$ es el "brazo de momento" como se muestra en la figura, entonces, de acuerdo con la ecuación 19-5, $H_A = (d)\,(mv_G)$ ↰.

**Rotación con respecto a un eje fijo.** Cuando un cuerpo rígido está *girando con respecto a un eje fijo* que pasa por el punto $O$, figura 19-2$b$, el momentum lineal y el momentum angular con respecto a $G$ son

$$L = mv_G \qquad H_G = I_G\omega \tag{19-7}$$

A veces es conveniente calcular el momentum angular del cuerpo con respecto al punto $O$. En este caso es necesario tomar en cuenta el "momento" de $\mathbf{L}$ y $\mathbf{H}_G$ con respecto a $O$. Observando que $\mathbf{L}$ (o $\mathbf{v}_G$) es siempre *perpendicular a* $\mathbf{r}_G$, tenemos

$$\circlearrowleft + \qquad H_O = I_G\omega + r_G(mv_G) \tag{19-8}$$

Esta ecuación puede ser *simplificada* sustituyendo primero $v_G = r_G\omega$, en cuyo caso $H_O = (I_G + mr^2_G)\omega$, y, por el teorema de los ejes paralelos, observando que los términos dentro del paréntesis representan el momento de inercia $I_O$ del cuerpo con respecto a un eje perpendicular al plano del movimiento que pasa a través del punto $O$. Por consiguiente,*

$$H_O = I_O\omega \tag{19-9}$$

Entonces, para el cálculo, pueden usarse las ecuaciones 19-8 o 19-9.

*Debe observarse la similitud entre esta derivación y la de la ecuación 17-16 ($\Sigma M_O = I_O\alpha$) y la ecuación 18-5 ($T = \frac{1}{2}I_O\omega^2$). También advierta que el mismo resultado puede ser obtenido a partir de la ecuación 19-2 seleccionando el punto $P$ en $O$, ya que $(v_O)_x = (v_O)_y = 0$.




Fig. 19–2

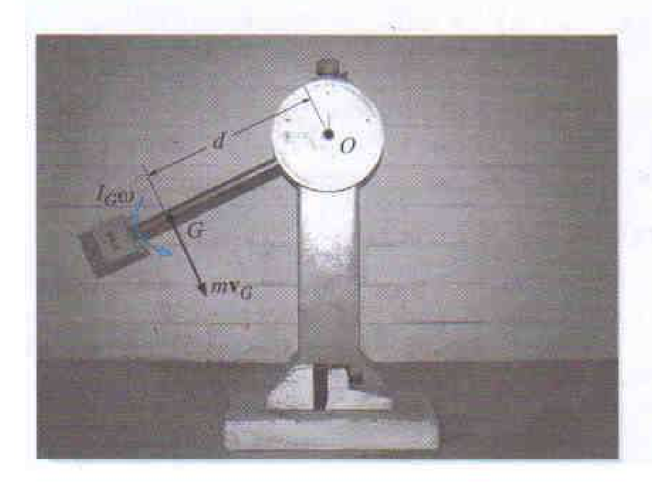
**Movimiento plano general.** Cuando un cuerpo rígido está sometido a movimiento plano general, figura 19-2*c*, el momentum lineal y el momentum angular calculados con respecto a *G* se convierten en

$$L = mv_G \qquad H_G = I_G \boldsymbol{\omega} \qquad (19\text{–}10)$$

Si el momentum angular es calculado con respecto a un punto *A* ubicado sobre o fuera del cuerpo, figura 19-2*c*, es necesario encontrar los momentos de **L** y $\mathbf{H}_G$ con respecto a ese punto. En este caso,

$$\circlearrowright + \qquad H_A = I_G\omega + (d)(mv_G)$$

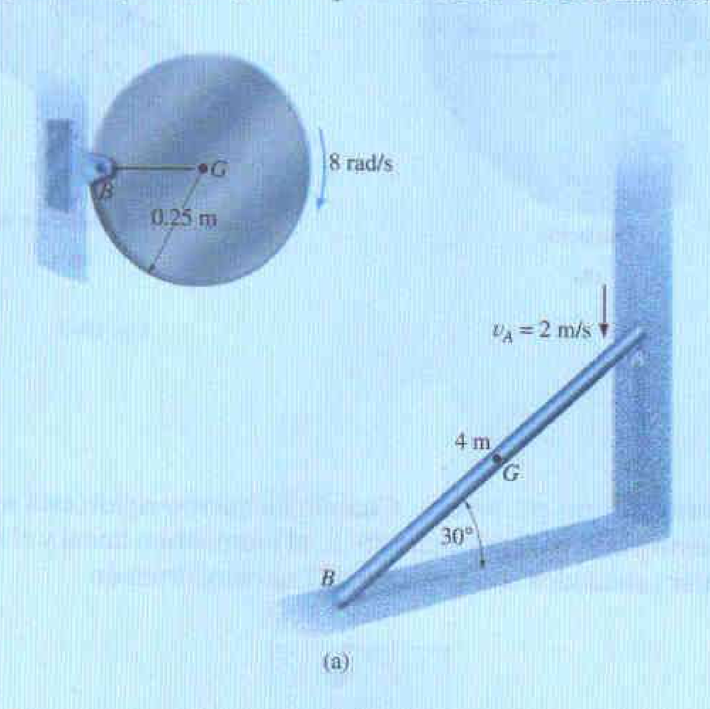
Aquí *d* es el brazo de momento, como se muestra en la figura.




Cuando el péndulo oscila hacia abajo, su momentum angular con respecto al punto *O* puede ser determinado calculando el momento de $I_G\boldsymbol{\omega}$ y $m\mathbf{v}_G$ con respecto a *O*. Esto es, $H_O = I_G\omega + (mv_G)d$. Como $v_G = \omega d$, entonces $H_O = I_G\omega + m(\omega d)\,d = (I_G + md^2)\omega = I_O\omega$.

## EJEMPLO 19.1

En un instante dado, el disco de 10 kg y la barra de 5 kg tienen los movimientos mostrados en la figura 19-3*a*. Determine sus momentos angulares con respecto al punto *G* y al punto *B* para el disco y con respecto al punto *G* y al *CI* para la barra en este instante.



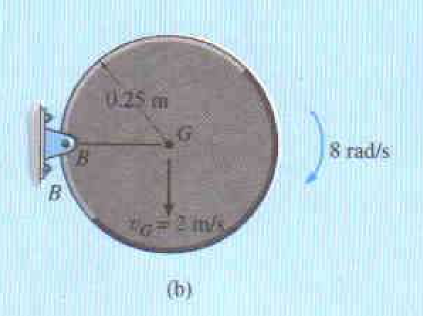

(a)

### Solución

***Disco.*** Como el disco está *girando con respecto a un eje fijo* (a través del punto *B*), entonces $v_G = (8 \text{ rad/s})(0.25 \text{ m}) = 2 \text{ m/s}$, figura 19-3*b*. Por consiguiente,

$$\circlearrowright + H_G = I_G\omega = [\tfrac{1}{2}(10 \text{ kg})(0.25 \text{ m})^2](8 \text{ rad/s}) = 2.50 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}$$ *Resp.*

$$\circlearrowright + H_B = I_G\omega + (mv_G)r_G = 2.50 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s} + (10 \text{ kg})(2 \text{ m/s})(0.25 \text{ m})$$
$$= 7.50 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}\circlearrowright$$ *Resp.*




(b)

También, a partir de la tabla proporcionada en la cubierta interna posterior de este libro, $I_B = (3/2)mr^2$, por lo que

$$\circlearrowright + H_B = I_B\omega = [\tfrac{3}{2}(10 \text{ kg})(0.25 \text{ m})^2](8 \text{ rad/s}) = 7.50 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}\circlearrowright$$ *Resp.*

***Barra.*** La barra experimenta *movimiento plano general*. El *CI* está establecido en la figura 19-3c, por lo que $\omega = (2 \text{ m/s})/(3.464 \text{ m}) = 0.5774 \text{ rad/s}$ y $v_G = (0.5774 \text{ rad/s})(2 \text{ m}) = 1.155 \text{ m/s}$. Entonces,

$$\circlearrowright + H_G = I_G\omega = [\tfrac{1}{12}(5 \text{ kg})(4 \text{ m})^2](0.5774 \text{ rad/s}) = 3.85 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}\circlearrowright$$ *Resp.*

Los momentos de $I_G\omega$ y $mv_G$ con respecto al *CI* son

$$\circlearrowright + H_{IC} = I_G\omega + d(mv_G) = 3.85 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s} + (2 \text{ m})(5 \text{ kg})(1.155 \text{ m/s})$$
$$= 15.4 \text{ kg}\cdot\text{m}^2/\text{s}\circlearrowright$$ *Resp.*

(c)

**Fig. 19-3**

## 19.2 Principio del impulso y momentum lineal

Como en el caso del movimiento de una partícula, el principio del impulso y del momentum para un cuerpo rígido se desarrolla *combinando* la ecuación del movimiento con cinemática. La ecuación resultante permite lograr una *solución directa de problemas que implican fuerza, velocidad y tiempo*.

**Principio del impulso y momentum lineal.** La ecuación de movimiento traslacional para un cuerpo rígido puede escribirse como $\Sigma\mathbf{F} = m\mathbf{a}_G = m(d\mathbf{v}_G/dt)$. Como la masa del cuerpo es constante,

$$\Sigma\mathbf{F} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}_G)$$

Multiplicando ambos lados por $dt$ e integrando a partir de $t = t_1$, $\mathbf{v}_G = (\mathbf{v}_G)_1$ a $t = t_2$, $\mathbf{v}_G = (\mathbf{v}_G)_2$ se obtiene

$$\Sigma\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt = m(\mathbf{v}_G)_2 - m(\mathbf{v}_G)_1 \qquad (19\text{–}11)$$

A esta ecuación se le llama *principio del impulso y momentum lineal*. Establece que la suma de todos los impulsos creados por el *sistema de fuerzas externas* que actúan sobre el cuerpo durante el intervalo de tiempo $t_1$ a $t_2$ es igual al cambio en el momentum lineal del cuerpo durante el intervalo de tiempo, figura 19-4.

**Principio del impulso y momentum angular.** Si el cuerpo tiene *movimiento plano general*, podemos escribir $\Sigma M_G = I_G\alpha = I_G(d\omega/dt)$. Como el momento de inercia es constante,

$$\Sigma M_G = \frac{d}{dt}(I_G\omega)$$

Multiplicando ambos lados por $dt$ e integrando a partir de $t = t_1$, $\omega = \omega_1$ a $t = t_2$, $\omega = \omega_2$, obtenemos

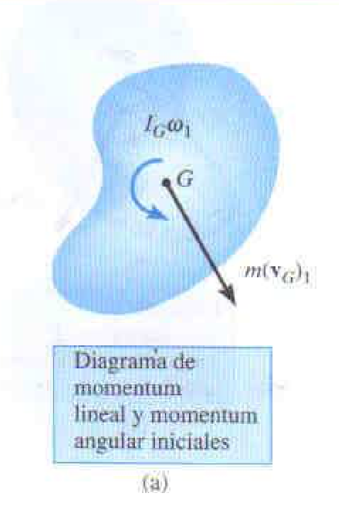
$$\Sigma\int_{t_1}^{t_2} M_G\,dt = I_G\omega_2 - I_G\omega_1 \qquad (19\text{–}12)$$

De manera similar, para *rotación alrededor de un eje fijo* que pase por el punto $O$, cuando se integra la ecuación 17-16 ($\Sigma M_O = I_O\alpha$) resulta

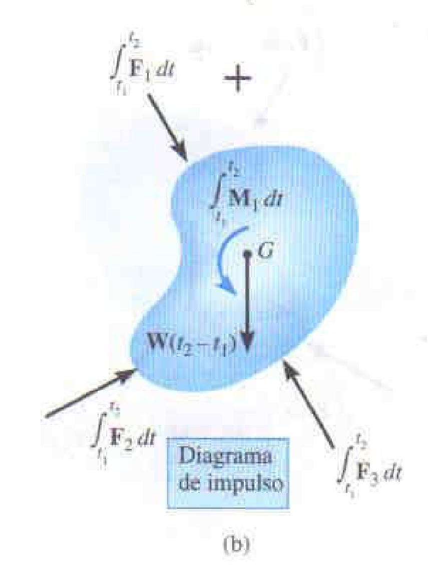
$$\Sigma\int_{t_1}^{t_2} M_O\,dt = I_O\omega_2 - I_O\omega_1 \qquad (19\text{–}13)$$

Las ecuaciones 19-12 y 19-13 son llamadas *principio del impulso y momentum angular*. Ambas establecen que la suma de los impulsos angulares que actúan sobre el cuerpo durante el intervalo de tiempo $t_1$ a $t_2$ es igual al cambio en el momentum angular del cuerpo durante este intervalo de tiempo. En particular, el impulso angular considerado se determina integrando los momentos con respecto al punto $G$ u $O$ de todas las fuerzas externas y momentos de par aplicados al cuerpo.

Para resumir los conceptos precedentes, si el movimiento ocurre en el plano $x - y$, usando los principios de impulso y momentum las siguientes

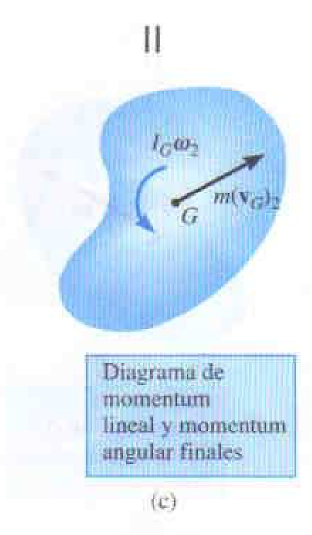



(a)




(b)

=




(c)

**Fig. 19–4**

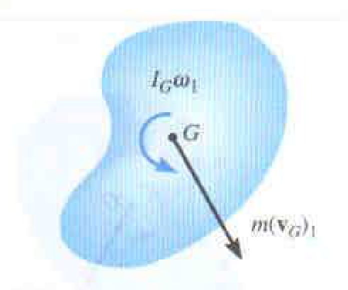



Diagrama de momentum lineal y momentum angular iniciales

(a)

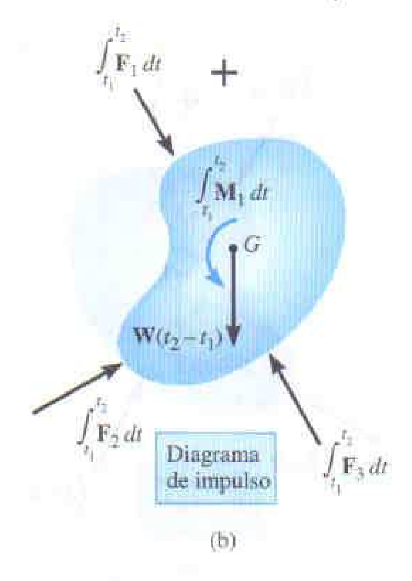



Diagrama de impulso

(b)

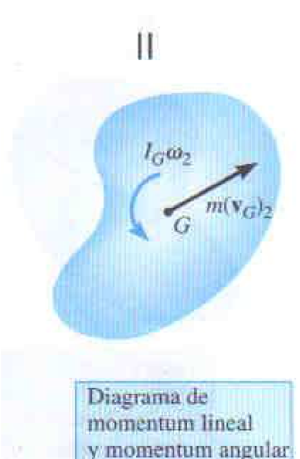



Diagrama de momentum lineal y momentum angular finales

(c)

**Fig. 19–4**

*tres ecuaciones escalares* pueden ser escritas para describir el *movimiento plano* del cuerpo:

$$
\begin{aligned}
m(v_{Gx})_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_x\, dt &= m(v_{Gx})_2 \\
m(v_{Gy})_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} F_y\, dt &= m(v_{Gy})_2 \\
I_G\omega_1 + \Sigma \int_{t_1}^{t_2} M_G\, dt &= I_G\omega_2
\end{aligned}
\tag{19–14}
$$

Las primeras dos de estas ecuaciones representan el principio del impulso lineal y del momentum lineal en el plano $x$-$y$, ecuación 19-11, y la tercera ecuación representa el principio del impulso angular y del momentum angular con respecto al eje $z$, el cual pasa por el centro de masa $G$ del cuerpo, ecuación 19-12.

Los términos en las ecuaciones 19-14 pueden ser tomados en cuenta gráficamente dibujando un conjunto de diagramas de impulso y momentum para el cuerpo, figura 19-4. Advierta que los momentos lineales $m\mathbf{v}_G$ son aplicados en el centro de masa del cuerpo, figuras 19-4*a* y 19-4*c*; mientras que los momentos angulares $I_G\omega$ son vectores libres, y por tanto, igual que un momento de par, pueden ser aplicados en cualquier punto sobre el cuerpo. Cuando el diagrama de impulso es construido, figura 19-4*b*, la fuerza **F** y el momento **M** varían con el tiempo, y están indicadas por medio de las integrales. Sin embargo, si **F** y **M** son *constantes* desde $t_1$ hasta $t_2$, la integración de los impulsos da $\mathbf{F}(t_2 - t_1)$ y $\mathbf{M}(t_2 - t_1)$, respectivamente. Tal es el caso para el peso **W** del cuerpo, figura 19-4*b*.

Las ecuaciones 19-14 también pueden ser aplicadas a todo un sistema de cuerpos conectados en vez de a cada cuerpo por separado. Haciéndolo así se elimina la necesidad de incluir los impulsos reactivos que ocurren en las conexiones ya que éstos son *internos* al sistema. Las ecuaciones resultantes pueden ser escritas en forma simbólica como

$$
\begin{aligned}
\left(\sum \begin{matrix}\text{momento}\\ \text{lineal del}\\ \text{sistema}\end{matrix}\right)_{x1} + \left(\sum \begin{matrix}\text{impulso}\\ \text{lineal del}\\ \text{sistema}\end{matrix}\right)_{x(1-2)} &= \left(\sum \begin{matrix}\text{momento}\\ \text{lineal del}\\ \text{sistema}\end{matrix}\right)_{x2} \\
\left(\sum \begin{matrix}\text{momento}\\ \text{lineal del}\\ \text{sistema}\end{matrix}\right)_{y1} + \left(\sum \begin{matrix}\text{impulso}\\ \text{lineal del}\\ \text{sistema}\end{matrix}\right)_{y(1-2)} &= \left(\sum \begin{matrix}\text{momento}\\ \text{lineal del}\\ \text{sistema}\end{matrix}\right)_{y2} \\
\left(\sum \begin{matrix}\text{momento}\\ \text{angular}\\ \text{del sistema}\end{matrix}\right)_{O1} + \left(\sum \begin{matrix}\text{impulso}\\ \text{angular}\\ \text{del sistema}\end{matrix}\right)_{O(1-2)} &= \left(\sum \begin{matrix}\text{momento}\\ \text{angular}\\ \text{del sistema}\end{matrix}\right)_{O2}
\end{aligned}
\tag{19–15}
$$

Como se indicó, el momentum angular y el impulso angular del sistema deben ser calculados con respecto *al mismo punto O de referencia* para todos los cuerpos del sistema.

## PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

Los principios del impulso y del momentum son usados para resolver problemas cinéticos que tienen que ver con *velocidad, fuerza* y *tiempo* ya que estos términos están implicados en la formulación.

*Diagrama de cuerpo libre.*

- Establezca el marco de referencia inercial $x, y, z$ y dibuje el diagrama de cuerpo libre para tomar en cuenta todas las fuerzas y momentos de par que producen impulsos sobre el cuerpo.
- La dirección y el sentido de las velocidades inicial y final del centro de masa del cuerpo, $\mathbf{v}_G$, y la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo deben ser establecidas. Si cualquiera de estos movimientos es desconocido, suponga que el sentido de sus componentes es en la dirección de las coordenadas inerciales positivas.
- Calcule el momento de inercia $I_G$ o el $I_O$.
- Como un procedimiento alternativo, dibuje los diagramas de impulso y momentum para el cuerpo o sistema de cuerpos. Cada uno de estos diagramas representa una forma delineada del cuerpo que gráficamente toma en cuenta los datos requeridos para cada uno de los tres términos que aparecen en las ecuaciones 19-14 o 19-15, figura 19-4. Estos diagramas son particularmente útiles para visualizar los términos de "momento" usados en el principio del impulso angular y del momentum angular si la aplicación es con respecto a un punto que no sea el centro de masa $G$ del cuerpo o un punto fijo $O$.

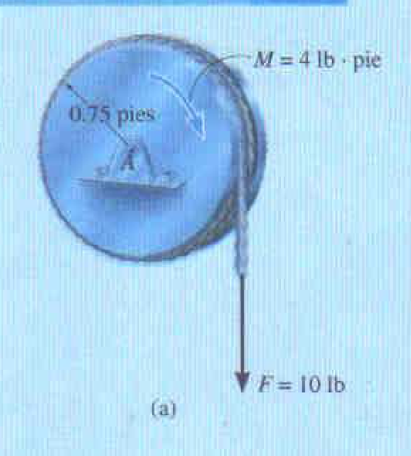
*Principio del impulso y momentum.*

- Aplique las tres ecuaciones escalares de impulso y momentum.
- El momentum angular de un cuerpo rígido que gira con respecto a un eje fijo es el momento de $m\mathbf{v}_G$ más $I_G\boldsymbol{\omega}$ con respecto al eje. Se puede mostrar que esto es igual a $H_O = I_O\boldsymbol{\omega}$, donde $I_O$ es el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje.
- Todas las fuerzas que actúan en el diagrama de cuerpo libre del cuerpo generarán un impulso; sin embargo, algunas de esas fuerzas no trabajarán.
- Las fuerzas que son funciones del tiempo deben ser integradas para obtener el impulso. Gráficamente, el impulso es igual al área bajo la curva fuerza-tiempo.
- El principio del impulso angular y del momentum angular es usado a menudo para eliminar fuerzas impulsivas desconocidas que son paralelas o pasan por un eje común, ya que el momento de estas fuerzas es cero con respecto a este eje.

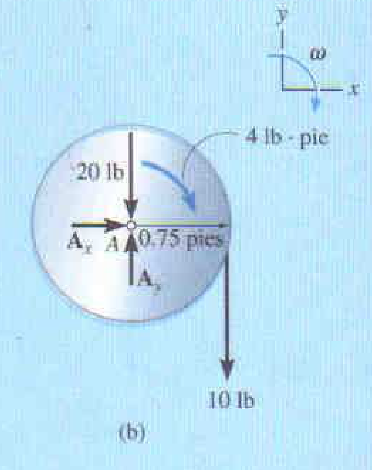
*Cinemática.*

- Si más de tres ecuaciones son necesarias para lograr una solución completa, puede ser posible relacionar la velocidad del centro de masa del cuerpo con la velocidad angular del cuerpo usando *cinemática*. Si el movimiento parece ser complicado, los diagramas cinemáticos (velocidad) pueden ser útiles para obtener la relación necesaria.

## EJEMPLO 19.2



(a)



(b)

**Fig. 19-5**

El disco uniforme de 20 lb que se muestra en la figura 19-5*a* está soportado mediante un pasador instalado en su centro. Si sobre el disco actúa un momento de par constante de 4 lb · pie y una fuerza de 10 lb que es aplicada a una cuerda enrollada alrededor de su periferia, determine la velocidad angular del disco dos segundos después de partir del reposo. ¿Cuáles son las componentes de fuerza de la reacción en el pasador?

### Solución

Como velocidad angular, fuerza y tiempo están implicados en los problemas, aplicaremos los principios de impulso y momentum a la solución.

***Diagrama de cuerpo libre.*** Figura 19-5*b*. El centro de masa del disco no se mueve; sin embargo, la carga ocasiona que el disco gire en el sentido de las manecillas del reloj.

El momento de inercia del disco con respecto a su eje fijo de rotación es

$$I_A = \frac{1}{2}mr^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{20\text{ lb}}{32.2\text{ pies/s}^2}\right)(0.75\text{ pies})^2 = 0.175\text{ slug}\cdot\text{pies}^2$$

***Principio del impulso y momentum.***

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad m(v_{Ax})_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} F_x\,dt = m(v_{Ax})_2$$

$$0 + A_x(2\text{ s}) = 0$$

$$(+\uparrow) \qquad m(v_{Ay})_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt = m(v_{Ay})_2$$

$$0 + A_y(2\text{ s}) - 20\text{ lb}(2\text{ s}) - 10\text{ lb}(2\text{ s}) = 0$$

$$(\curvearrowright +) \qquad I_A\omega_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} M_A\,dt = I_A\omega_2$$

$$0 + 4\text{ lb}\cdot\text{pies}(2\text{ s}) + [10\text{ lb}(2\text{ s})](0.75\text{ pies}) = 0.175\omega_2$$

Resolviendo estas ecuaciones obtenemos

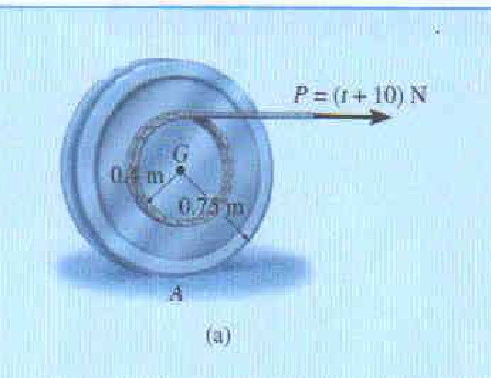
$$A_x = 0 \qquad \textit{Resp.}$$

$$A_y = 30\text{ lb} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\omega_2 = 132\text{ rad/s} \curvearrowright \qquad \textit{Resp.}$$

## EJEMPLO 19.3

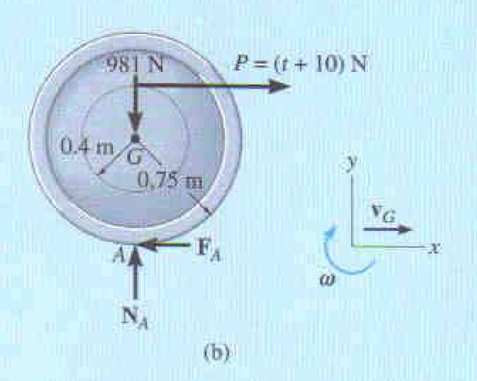
El carrete de 100 kg mostrado en la figura 19-6*a* tiene radio de giro $k_G = 0.35$ m. Un cable está enrollado alrededor del cubo central del carrete y le es aplicada una fuerza horizontal con magnitud variable $P = (t + 10)$ N, donde $t$ está en segundos. Si el carrete está inicialmente en reposo, determine su velocidad angular en 5 s. Suponga que el carrete rueda sin deslizar en el punto $A$.



(a)

### Solución

***Diagrama de cuerpo libre.*** Por inspección del diagrama de cuerpo libre, figura 19-6*b*, la fuerza *variable* $P$ hará que la fuerza de fricción $F_A$ sea variable, y entonces los impulsos creados por $P$ y $F_A$ deben ser determinados por medio de integración. La fuerza **P** causa que el centro de masa tenga velocidad $\mathbf{v}_G$ hacia la derecha mientras el carrete presenta velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ en el sentido de las manecillas del reloj.



(b)

El momento de inercia del carrete con respecto a su centro de masa es

$$I_G = mk_G^2 = 100\text{ kg}(0.35\text{ m})^2 = 12.25\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

***Principio del impulso y momentum.***

$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad m(v_G)_1 + \Sigma\int F_x\,dt = m(v_G)_2$$

$$0 + \int_0^{5\text{ s}} (t + 10)\text{ N}\,dt - \int F_A\,dt = 100\text{ kg}(v_G)_2$$

$$62.5 - \int F_A\,dt = 100(v_G)_2 \qquad (1)$$

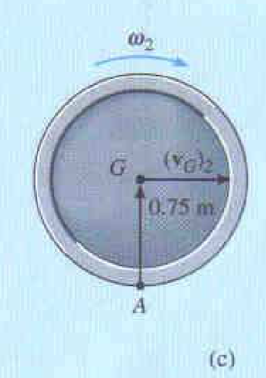
$$(\curvearrowright +) \qquad I_G\omega_1 + \Sigma\int M_G\,dt = I_G\omega_2$$

$$0 + \left[\int_0^{5\text{ s}} (t + 10)\text{ N}\,dt\right](0.4\text{ m}) + \left(\int F_A\,dt\right)(0.75\text{ m}) = (12.25\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\omega_2$$

$$25 + \left(\int F_A\,dt\right)(0.75) = 12.25\omega_2 \qquad (2)$$

***Cinemática.*** Como el carrete no se desliza, el centro instantáneo de velocidad cero está en el punto $A$, figura 19-6*c*. Por consiguiente, la velocidad de $G$ puede ser expresada en términos de la velocidad angular del carrete como $(v_G)_2 = (0.75\text{ m})\omega_2$. Sustituyendo esto en la ecuación 1 y eliminando el impulso desconocido $\int F_A\,dt$ entre las ecuaciones 1 y 2, obtenemos

$$\omega_2 = 1.05\text{ rad/s} \curvearrowright \qquad \textit{Resp.}$$



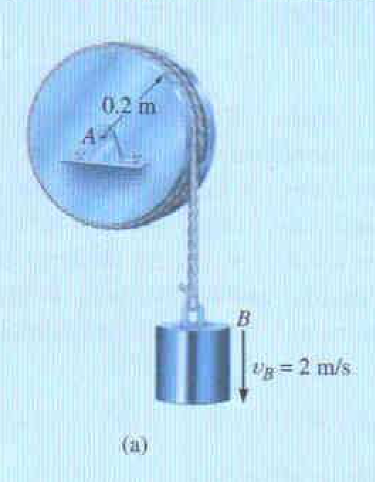
(c)

Fig. 19–6

*Nota*: Puede obtenerse una solución más directa aplicando el principio del impulso angular y del momentum angular con respecto al punto $A$. Como ejercicio, haga esto y muestre que se obtiene el mismo resultado.

## EJEMPLO 19.4

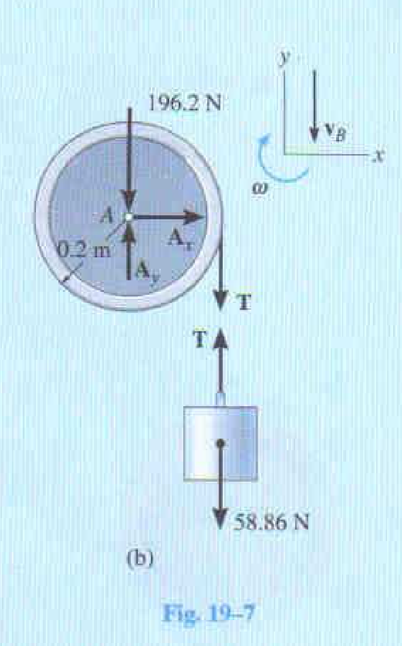
El bloque mostrado en la figura 19-7*a* tiene masa de 6 kg. Está unido a una cuerda enrollada sobre la periferia de un disco de 20 kg que tiene un momento de inercia $I_A = 0.40\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$. Si el bloque está inicialmente moviéndose hacia abajo con rapidez de 2 m/s, determine su rapidez en 3 s. Desprecie la masa de la cuerda en los cálculos.



(a)

### Solución I

***Diagrama de cuerpo libre.*** Los diagramas de cuerpo libre del bloque y el disco se muestran en la figura 19-7*b*. Todas las fuerzas son *constantes* ya que el peso del bloque causa el movimiento. El movimiento hacia abajo del bloque $v_B$ causa que la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del disco sea en el sentido de las manecillas del reloj.



(b)

Fig. 19–7

***Principio del impulso y momentum.*** Podemos eliminar $\mathbf{A}_x$ y $\mathbf{A}_y$ del análisis aplicando el principio del impulso y momentum angular con respecto al punto $A$. Por tanto,

Disco

$$(\circlearrowright+) \qquad I_A\omega_1 + \Sigma\int M_A\,dt = I_A\omega_2$$

$$0.40\ \text{kg}\cdot\text{m}^2(\omega_1) + T(3\ \text{s})(0.2\ \text{m}) = (0.4\ \text{kg}\cdot\text{m}^2)\omega_2$$

Bloque

$$(+\uparrow) \qquad m_B(v_B)_1 + \Sigma\int F_y\,dt = m_B(v_B)_2$$

$$-6\ \text{kg}(2\ \text{m/s}) + T(3\ \text{s}) - 58.86\ \text{N}(3\ \text{s}) = -6\ \text{kg}(v_B)_2$$

***Cinemática.*** Como $\omega = v_B/r$, entonces $\omega_1 = (2\ \text{m/s})/(0.2\ \text{m}) = 10$ rad/s y $\omega_2 = (v_B)_2/0.2\ \text{m} = 5(v_B)_2$. Sustituyendo y resolviendo las ecuaciones simultáneamente para $(v_B)_2$ obtenemos

$$(v_B)_2 = 13.0\ \text{m/s}\downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

### Solución II

***Diagramas de impulso y momentum.*** Podemos obtener $(v_B)_2$ *directamente* considerando el *sistema* que consta del bloque, la cuerda y el disco. Los diagramas de impulso y momentum se han dibujado para aclarar la aplicación del principio del impulso angular y del momentum angular con respecto al punto $A$, figura 19-7c.

***Principio del impulso y momentum angular.*** Observando que $\omega_1 = 10$ rad/s y $\omega_2 = 5(v_B)_2$, tenemos

$$(\circlearrowright +) \quad \left(\sum \begin{matrix}\text{momento}\\ \text{angular}\\ \text{del sistema}\end{matrix}\right)_{A1} + \left(\sum \begin{matrix}\text{impulso}\\ \text{angular}\\ \text{del sistema}\end{matrix}\right)_{A(1-2)} = \left(\sum \begin{matrix}\text{momento}\\ \text{angular}\\ \text{del sistema}\end{matrix}\right)_{A2}$$

$$6\text{ kg}(2\text{ m/s})(0.2\text{ m}) + 0.4\text{ kg}\cdot\text{m}^2(10\text{ rad/s}) + 58.86\text{ N}(3\text{ s})(0.2\text{ m})$$
$$= 6\text{ kg}(v_B)_2(0.2\text{ m}) + 0.40\text{ kg}\cdot\text{m}^2[5(v_B)_2(0.2\text{ m})]$$
$$(v_B)_2 = 13.0\text{ m/s}\downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

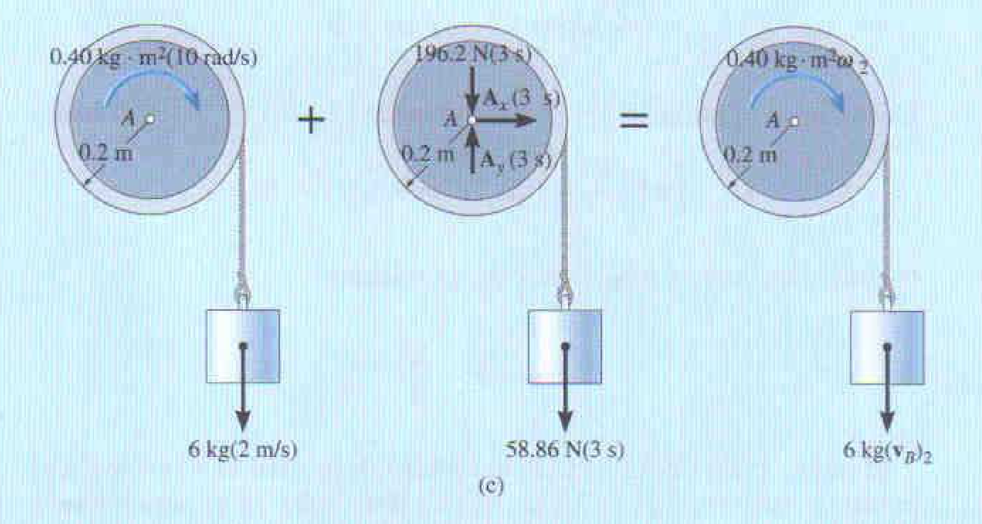
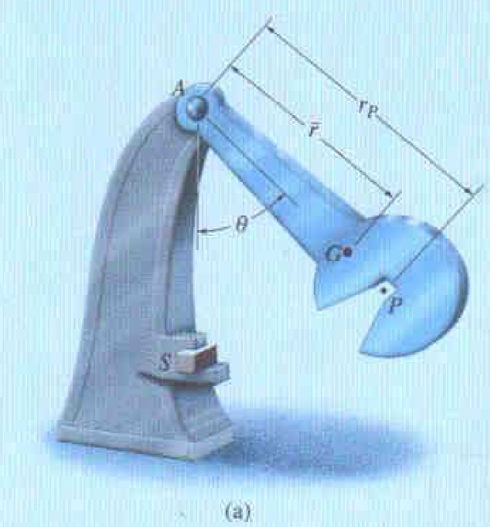
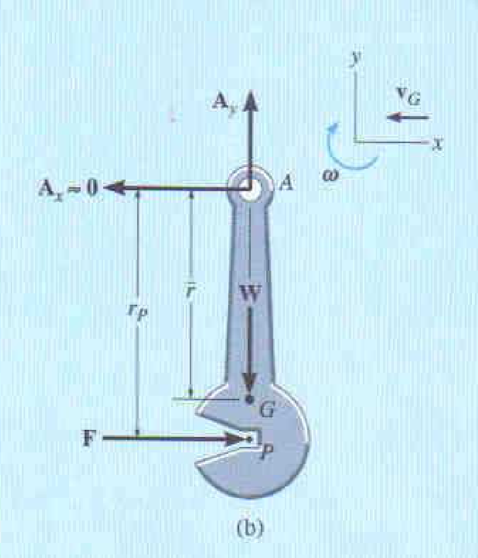



Fig. 19–7

## EJEMPLO 19.5




(a)




(b)

**Fig. 19-8**

La prueba de impacto Charpy se usa en pruebas de materiales para determinar las características de absorción de energía durante un impacto. La prueba se efectúa usando el péndulo mostrado en la figura 19-8*a*, el cual tiene masa $m$, centro de masa en $G$, y radio de giro $k_G$ con respecto a $G$. Determine la distancia $r_P$ desde el pasador colocado en $A$ hasta el punto $P$ donde el impacto con el espécimen $S$ debe ocurrir para que la fuerza horizontal en el pasador sea esencialmente de cero durante el impacto. En los cálculos, suponga que el espécimen absorbe toda la energía cinética del péndulo ganada durante el tiempo de caída y por ello impide que el péndulo oscile cuando $\theta = 0°$.

### Solución

*Diagrama de cuerpo libre.* Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre, figura 19-8*b*, las condiciones del problema requieren que el impulso horizontal en $A$ sea cero. Justo antes del impacto, el péndulo tiene velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_1$ en el sentido de las manecillas del reloj, y el centro de masa del péndulo se está moviendo hacia la izquierda a $(v_G)_1 = \bar{r}\omega_1$.

*Principio del impulso y momentum angular.* Aplicaremos el principio del impulso y momentum angular con respecto al punto $A$.

$$(\circlearrowright +) \qquad I_A\omega_1 + \Sigma \int M_A\,dt = I_A\omega_2$$

$$I_A\omega_1 - \left(\int F\,dt\right)r_P = 0$$

$$(\overset{+}{\leftarrow}) \qquad m(v_G)_1 + \Sigma \int F\,dt = m(v_G)_2$$

$$-m(\bar{r}\omega_1) + \int F\,dt = 0$$

Eliminando el impulso $\int F\,dt$ y sustituyendo $I_A = mk_G^2 + m\bar{r}^2$ resulta

$$[mk_G^2 + m\bar{r}^2]\omega_1 - m(\bar{r}\omega_1)r_P = 0$$

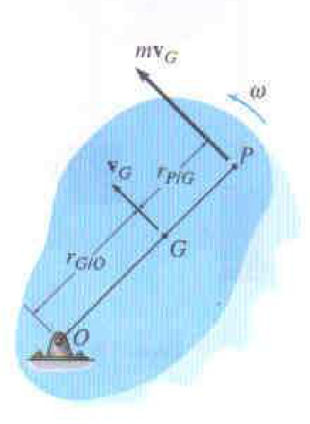
Factorizando $m\omega_1$ y despejando $r_P$, obtenemos

$$r_P = \bar{r} + \frac{k_G^2}{\bar{r}} \qquad \textit{Resp.}$$

El punto $P$, así definido, se llama *centro de percusión*. Colocando el punto de golpeo en $P$, la fuerza que se desarrolla en el pasador será minimizada. Muchas raquetas, palos de golf, etc., son diseñados de manera que la colisión con el objeto que es golpeado ocurra en el centro de percusión. En consecuencia, ningún "escozor" ni la más leve sensación de golpe se presentan en la mano del jugador. (Vea los problemas 17-65 y 19-1.)

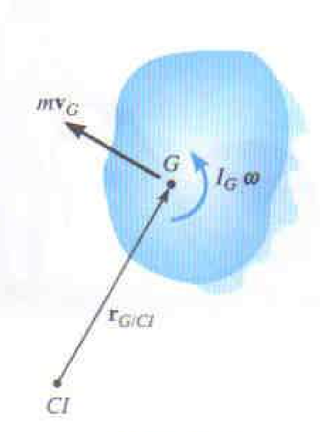
# PROBLEMAS

**19-1.** El cuerpo rígido (losa) tiene masa $m$ y está girando a velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ con respecto a un eje que pasa por el punto fijo $O$. Demuestre que los momentos de todas las partículas que forman el cuerpo pueden ser representados mediante un solo vector de magnitud $mv_G$ que actúa a través del punto $P$, llamado *centro de percusión*, el cual se encuentra a una distancia $r_{P/G} = k_G^2/r_{G/O}$ del centro de masa $G$. Aquí, $k_G$ es el radio de giro del cuerpo, calculado con respecto a un eje perpendicular al plano del movimiento y que pasa por $G$.



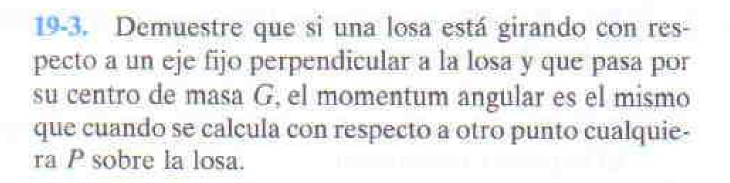

Prob. 19–1

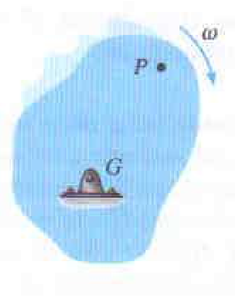
**19-2.** En un instante dado, el cuerpo tiene un momentum lineal $\mathbf{L} = m\mathbf{v}_G$ y un momentum angular $\mathbf{H}_G = I_G\boldsymbol{\omega}$ calculado con respecto a su centro de masa. Demuestre que el momentum angular del cuerpo calculado con respecto al centro instantáneo de velocidad cero $CI$ puede ser expresado como $\mathbf{H}_{CI} = I_{CI}\boldsymbol{\omega}$, donde $I_{CI}$ representa el momento de inercia del cuerpo calculado con respecto al eje instantáneo de velocidad cero. Como se muestra, el $CI$ está ubicado a una distancia $r_{G/CI}$ del centro de masa $G$.




Prob. 19–2

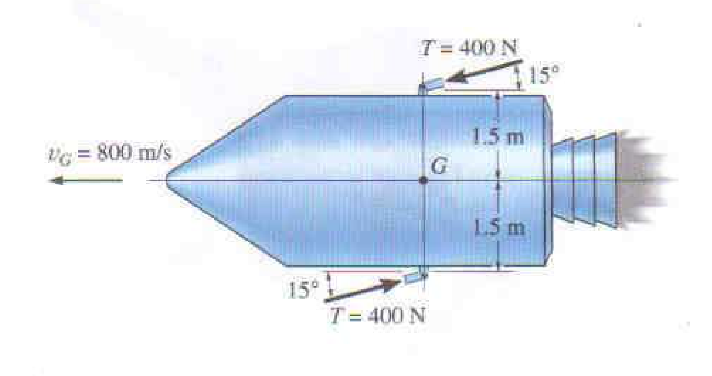
**19-3.** Demuestre que si una losa está girando con respecto a un eje fijo perpendicular a la losa y que pasa por su centro de masa $G$, el momentum angular es el mismo que cuando se calcula con respecto a otro punto cualquiera $P$ sobre la losa.






Prob. 19–3

***19-4.** La cápsula espacial tiene masa de 1200 kg y momento de inercia $I_G = 900 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ con respecto a un eje que pasa por $G$ y está dirigido perpendicularmente a la página. Si la cápsula está viajando hacia delante con rapidez $v_G = 800$ m/s y efectúa un giro por medio de dos propulsores, los que proporcionan un empuje constante de 400 N por 0.3 s, determine la velocidad angular de la cápsula justo después que los propulsores son apagados.




Prob. 19–4

**19-5.** Resuelva el problema 17-55 usando el principio del impulso y momentum.

**19-6.** Resuelva el problema 17-54 usando el principio del impulso y momentum.

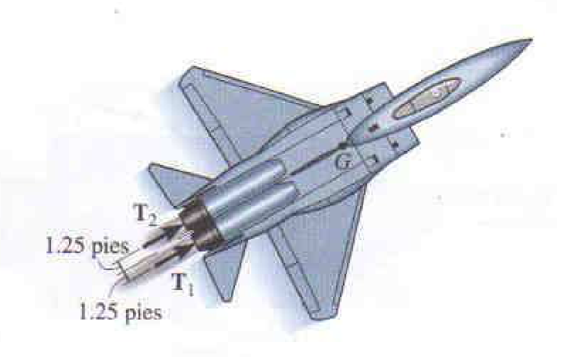
**19-7.** Resuelva el problema 17-69 usando el principio del impulso y momentum.

***19-8.** Resuelva el problema 17-80 usando el principio del impulso y momentum.

**19-9.** Resuelva el problema 17-73 usando el principio del impulso y momentum.

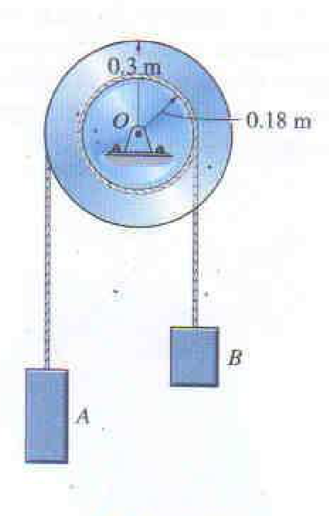
**19-10.** Un volante tiene masa de 60 kg y radio de giro $k_G$ = 150 mm con respecto a un eje de rotación que pasa por su centro de masa. Si un motor suministra una torca de magnitud $M = (5t)$ N · m en el sentido de las manecillas del reloj, donde $t$ está en segundos, determine la velocidad angular del volante en $t$ = 3 s. Inicialmente el volante está girando en el sentido de las manecillas del reloj a $\omega_1$ = 2 rad/s.

**19-11.** El piloto de un jet F-15 dañado pudo controlar su avión estrangulando los dos motores. Si el avión tiene un peso de 17 000 lb y radio de giro $k_G$ = 4.7 pies con respecto a su centro de masa $G$, determine la velocidad angular del avión y la velocidad de su centro de masa $G$ en $t$ = 5 s si el empuje en cada motor es alterado a $T_1$ = 5000 lb y $T_2$ = 800 lb como se muestra. Originalmente el avión vuela en línea recta a 1200 pies/s. Desprecie los efectos de la fricción y la pérdida de combustible.



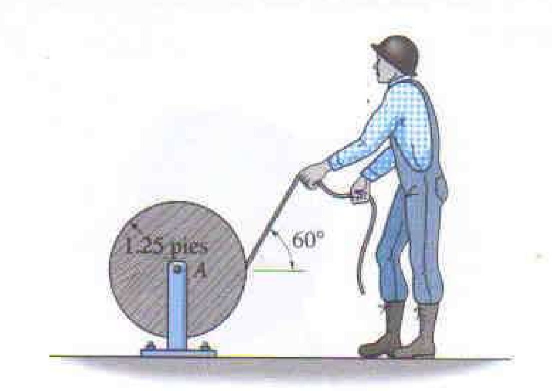

Prob. 19–11

***19-12.** El carrete tiene masa de 30 kg y radio de giro $k_O$ = 0.25. El bloque $A$ tiene masa de 25 kg y el bloque $B$ tiene masa de 10 kg. Si los bloques son liberados del reposo, determine el tiempo requerido para que el bloque $A$ alcance una rapidez de 2 m/s.Desprecie la masa de las cuerdas.



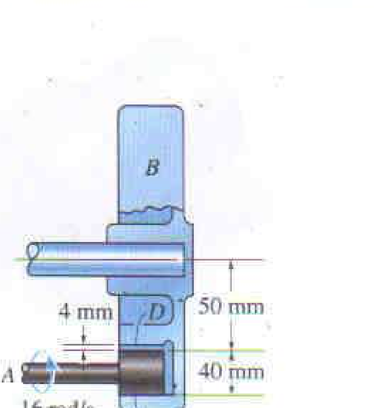

Prob. 19–12

**19-13.** El hombre jala la cuerda del carrete con fuerza constante de 8 lb en la dirección mostrada. Si el carrete tiene un peso de 250 lb y radio de giro $k_G$ = 0.8 pies con respecto al pasador colocado en $A$, determine la velocidad angular del carrete en 3 s partiendo del reposo. Desprecie la fricción y el peso de la cuerda que es desenrollada.



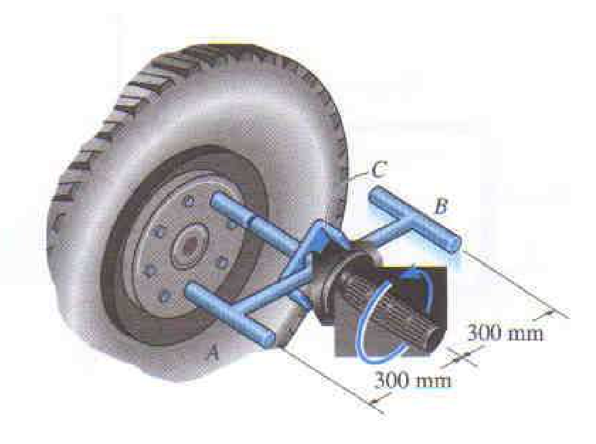

Prob. 19–13

**19-14.** Un movimiento angular es transmitido desde una rueda impulsora $A$ hasta la rueda impulsada $B$ por medio de fricción entre las ruedas situadas en $C$. Si $A$ gira siempre a razón constante de 16 rad/s, y el coeficiente de fricción cinética entre las ruedas es $\mu_k = 0.2$, determine el tiempo requerido para que $B$ alcance velocidad angular constante una vez que las ruedas hacen contacto con una fuerza normal de 50 N. ¿Cuál es la velocidad angular final de la rueda $B$? La rueda $B$ tiene masa de 90 kg y radio de giro con respecto a su eje de rotación de $k_G = 120$ mm.



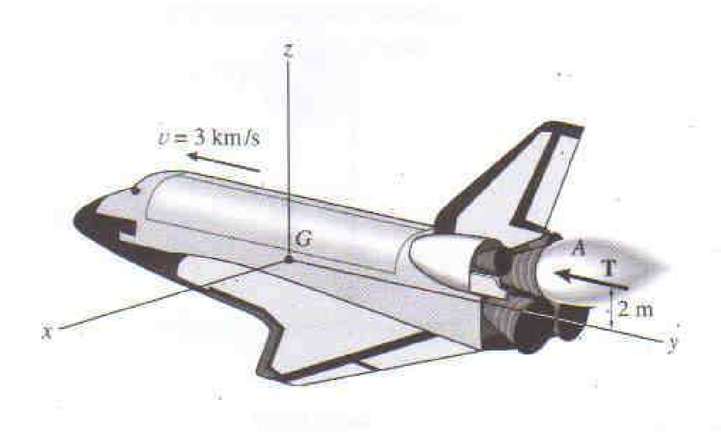

Prob. 19–14

**19-15.** La llave de impacto consta de una barra esbelta $AB$ de 1 kg y 580 mm de longitud, y pesos cilíndricos en sus extremos $A$ y $B$ con diámetro de 20 mm y masa de 1 kg cada uno. Este conjunto puede girar con respecto a la manija y el enchufe, los cuales están unidos a la tuerca de casquillo colocada en la rueda de un automóvil. Si a la barra $AB$ se le imprime velocidad angular de 4 rad/s y golpea la escuadra $C$ sobre la manija sin rebotar, determine el impulso angular impartido a la tuerca de casquillo.



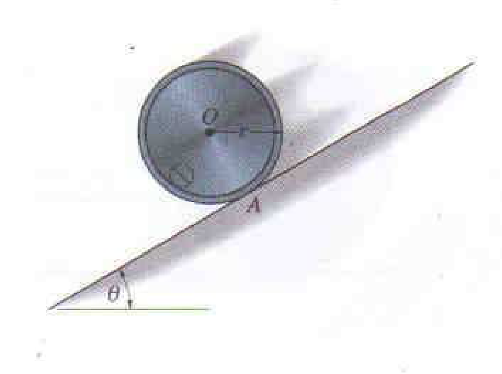

Prob. 19–15

***19-16.** El transbordador espacial se encuentra en el "espacio profundo", donde los efectos de la gravedad pueden ser despreciados. Tiene masa de 120 Mg, centro de masa en $G$, y radio de giro $(k_G)_x = 14$ m con respecto al eje $x$. Originalmente está viajando hacia delante a $v = 3$ km/s cuando el piloto enciende el motor instalado en $A$, generando un empuje $T = 600(1 - e^{-0.3t})$ kN, donde $t$ está en segundos. Determine la velocidad angular del transbordador 2 s después.



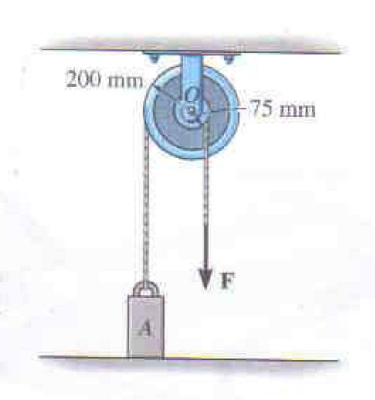

Prob. 19–16

**19-17.** El tambor tiene masa de 70 kg, radio de 300 mm, y radio de giro $k_O = 125$ mm. Si los coeficientes de fricción estática y cinética en $A$ son $\mu_s = 0.4$ y $\mu_k = 0.3$, respectivamente, determine la velocidad angular del tambor 2 s después que es liberado del reposo. Considere $\theta = 30°$.



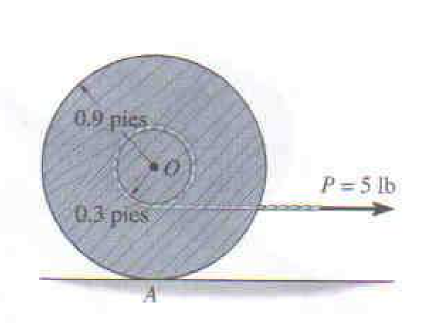

Prob. 19–17

**19-18.** La doble polea consta de dos ruedas unidas entre sí que giran a la misma velocidad. La polea tiene masa de 15 kg y radio de giro $k_O = 110$ mm. Si el bloque ubicado en $A$ tiene masa de 40 kg, determine su rapidez 3 s después que una fuerza constante $F = 2$ kN es aplicada a la cuerda enrollada alrededor del cubo interno de la polea. El bloque está originalmente en reposo. Desprecie la masa de la cuerda.



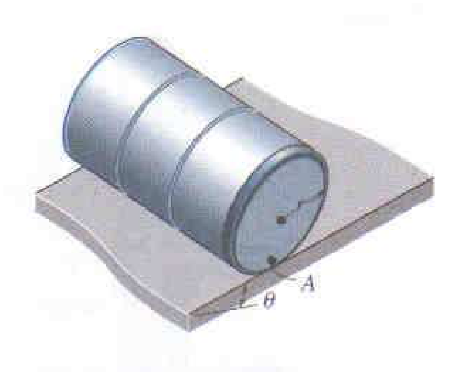

Prob. 19–18

**19-19.** El carrete tiene un peso de 30 lb y radio de giro $k_O = 0.45$ pies. Una cuerda está enrollada alrededor de su cubo interno y el extremo se encuentra sometido a una fuerza horizontal $P = 5$ lb. Determine la velocidad angular del carrete en 4 s partiendo del reposo. Suponga que el carrete rueda sin deslizar.




Prob. 19–19

***19-20.** El tambor de masa $m$, radio $r$ y radio de giro $k_O$, rueda a lo largo de un plano inclinado para el cual el coeficiente de fricción estática es $\mu_s$. Si el tambor es liberado del reposo, determine el máximo ángulo $\theta$ del plano inclinado de manera que el tambor ruede sin deslizar.




Prob. 19–20

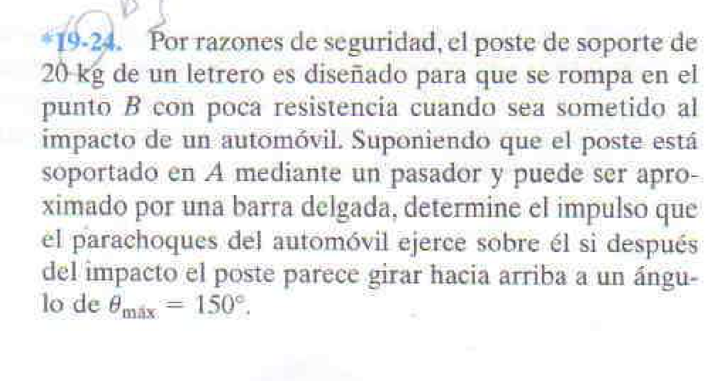
**19-21.** El disco de 12 kg tiene velocidad angular $\omega = 20$ rad/s. Si el freno $ABC$ es aplicado de manera que la magnitud de la fuerza **P** varía con el tiempo como se muestra, determine el tiempo necesario para detener el disco. El coeficiente de fricción cinética en el punto $B$ es $\mu_k = 0.4$.

Prob. 19–21

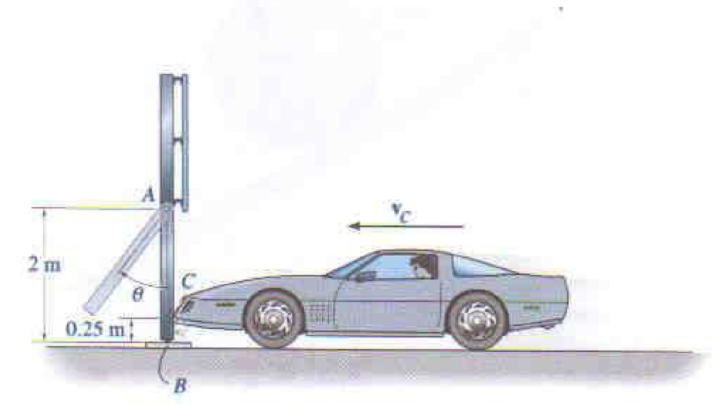
**19-22.** La polea tiene un peso de 8 lb y puede ser tratada como un disco delgado. Una cuerda enrollada sobre su superficie está sometida a las fuerzas $T_A = 4$ lb y $T_B = 5$ lb. Determine la velocidad angular de la polea cuando $t = 4$ s si parte del reposo cuando $t = 0$. Desprecie la masa de la cuerda.




Prob. 19–22

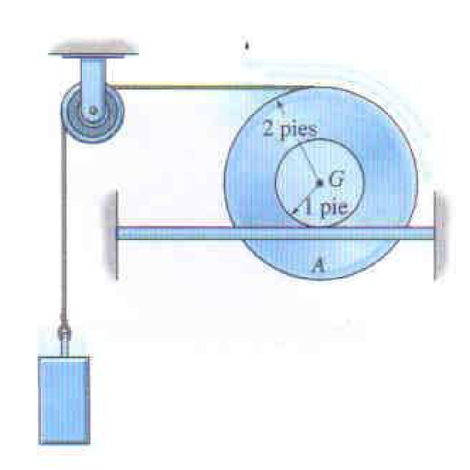


***19-24.** Por razones de seguridad, el poste de soporte de 20 kg de un letrero es diseñado para que se rompa en el punto $B$ con poca resistencia cuando sea sometido al impacto de un automóvil. Suponiendo que el poste está soportado en $A$ mediante un pasador y puede ser aproximado por una barra delgada, determine el impulso que el parachoques del automóvil ejerce sobre él si después del impacto el poste parece girar hacia arriba a un ángulo de $\theta_{máx} = 150°$.



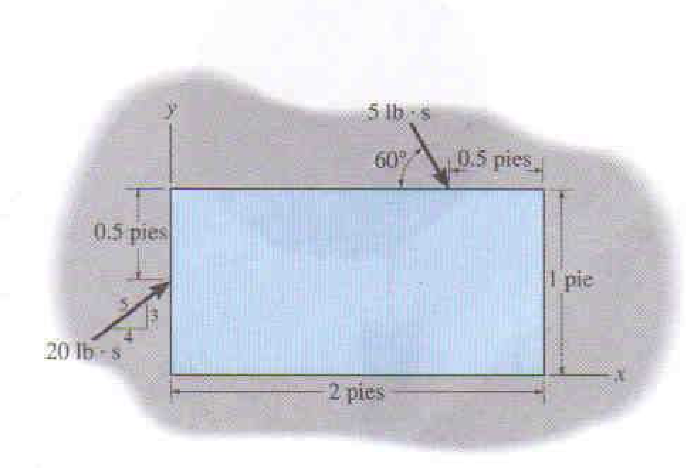

Prob. 19–24

**19-23.** El cubo interno de la rueda descansa sobre la vía horizontal. Si el cubo no se desliza en el punto $A$, determine la rapidez del bloque de 10 lb 2 s después que es liberado del reposo. La rueda pesa 30 lb y tiene radio de giro $k_G = 1.30$ pies. Desprecie la masa de la polea y la cuerda.



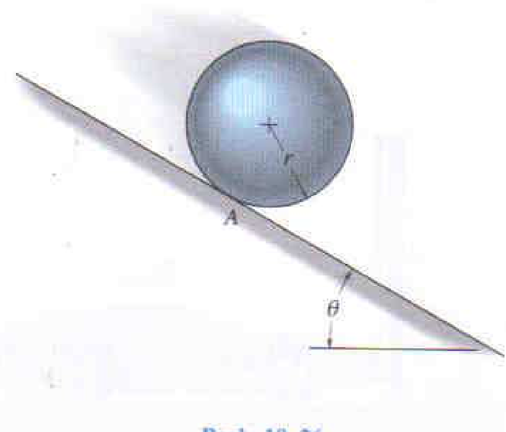

Prob. 19–23

**19-25.** La placa rectangular de 10 lb está en reposo sobre un piso *horizontal* liso. Si la placa recibe los impulsos horizontales mostrados, determine su velocidad angular y la velocidad del centro de masa.

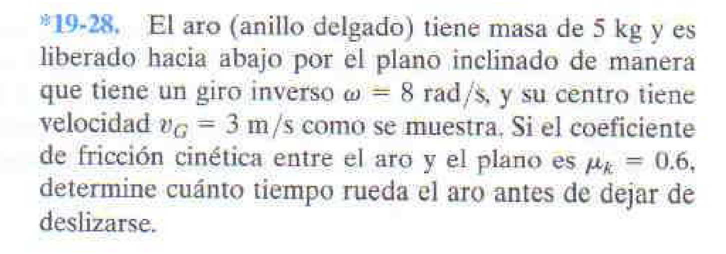



Prob. 19–25

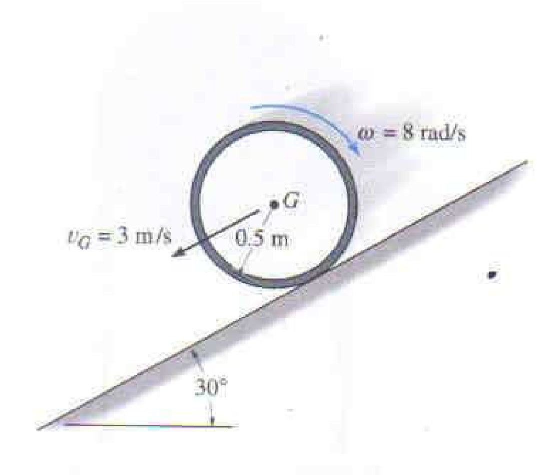
**19-26.** La bola de masa $m$ y radio $r$ rueda a lo largo de un plano inclinado para el cual el coeficiente de fricción estática es $\mu$. Si la bola es liberada del reposo, determine el ángulo máximo $\theta$ del plano inclinado de manera que ruede sin deslizar en el punto $A$.




Prob. 19–26

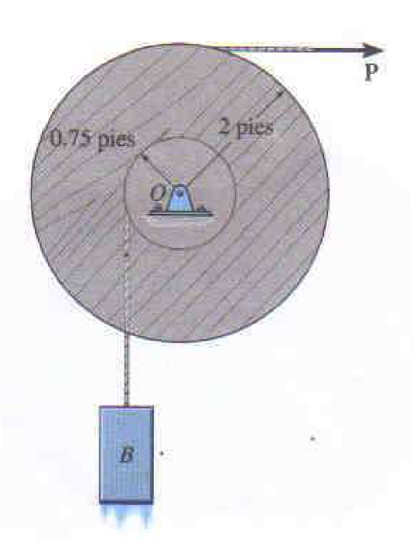


***19-28.** El aro (anillo delgado) tiene masa de 5 kg y es liberado hacia abajo por el plano inclinado de manera que tiene un giro inverso $\omega = 8$ rad/s, y su centro tiene velocidad $v_G = 3$ m/s como se muestra. Si el coeficiente de fricción cinética entre el aro y el plano es $\mu_k = 0.6$, determine cuánto tiempo rueda el aro antes de dejar de deslizarse.



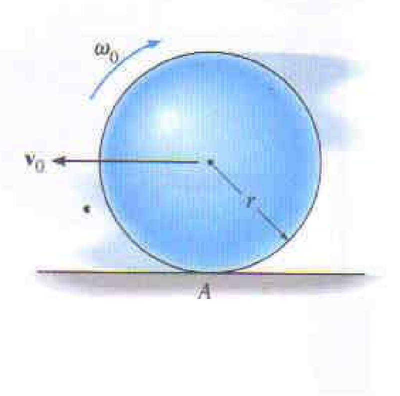

Prob. 19–28

**19-27.** El carrete tiene un peso de 75 lb y radio de giro $k_O = 1.20$ pies. Si el bloque $B$ pesa 60 lb y una fuerza $P = 25$ lb es aplicada a la cuerda, determine la rapidez del bloque en 5 s partiendo del reposo. Desprecie la masa de la cuerda.



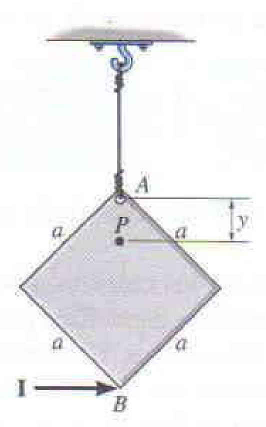

Prob. 19–27

**19-29.** Si la bola tiene un peso $W$ y radio $r$ y es lanzada sobre una *superficie rugosa* con velocidad $\mathbf{v}_0$ paralela a la superficie, determine la cantidad de giro inverso, $\boldsymbol{\omega}_0$, que se le debe dar de manera que deje de girar en el mismo instante que su velocidad hacia delante sea cero. No es necesario conocer el coeficiente de fricción en $A$ para efectuar el cálculo.




Prob. 19–29

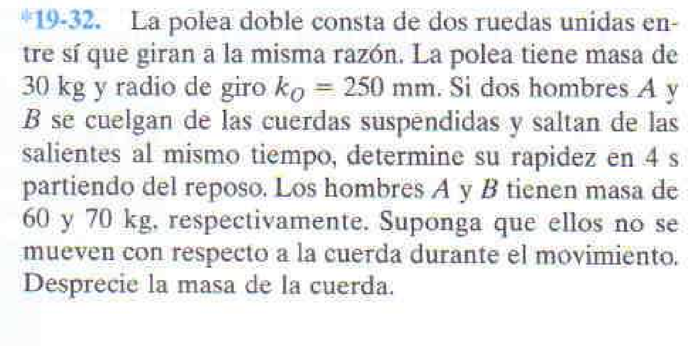
**19-30.** La placa cuadrada tiene masa $m$ y está suspendida en su esquina $A$ mediante una cuerda. Si recibe un impulso horizontal **I** en la esquina $B$, determine la ubicación $y$ del punto $P$ con respecto al cual la placa parece girar durante el impacto.



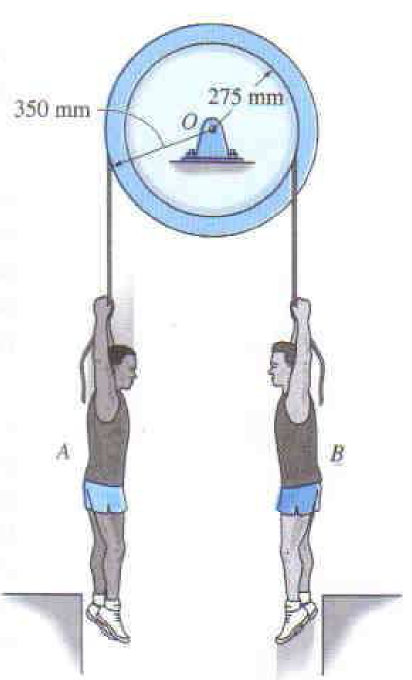

Prob. 19–30

**19-31.** El automóvil golpea un poste de luz que fue diseñado para romperse en su base con resistencia insignificante. En un video tomado de la colisión se observa que al poste se le imprime una velocidad angular de 60 rad/s cuando $AC$ está en posición vertical. El poste tiene masa de 175 kg, centro de masa en $G$, y radio de giro con respecto a un eje perpendicular al plano del conjunto del poste y que pasa por $G$ de $k_G = 2.25$ m. Determine el impulso horizontal que el automóvil ejerce sobre el poste mientras $AC$ está esencialmente en posición vertical.

Prob. 19–31

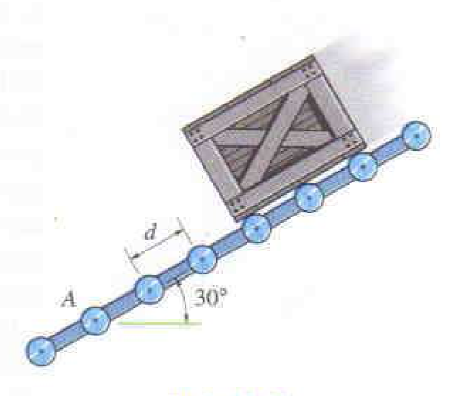


***19-32.** La polea doble consta de dos ruedas unidas entre sí que giran a la misma razón. La polea tiene masa de 30 kg y radio de giro $k_O = 250$ mm. Si dos hombres $A$ y $B$ se cuelgan de las cuerdas suspendidas y saltan de las salientes al mismo tiempo, determine su rapidez en 4 s partiendo del reposo. Los hombres $A$ y $B$ tienen masa de 60 y 70 kg, respectivamente. Suponga que ellos no se mueven con respecto a la cuerda durante el movimiento. Desprecie la masa de la cuerda.




Prob. 19–32

**19-33.** La caja tiene masa $m_c$. Determine la rapidez constante $v_0$ que adquiere al moverse hacia abajo por la banda transportadora. Los rodillos tienen cada uno un radio $r$, masa $m$, y están separados entre sí una distancia $d$. Advierta que la fricción causa que cada rodillo gire cuando la caja entra en contacto con él.




Prob. 19–33

## 19.3 Conservación del momentum

**Conservación del momentum lineal.** Si la suma de todos los *impulsos lineales* que actúan sobre un sistema de cuerpos rígidos conectados es *cero*, el momentum lineal del sistema es constante, o se conserva. En consecuencia, las primeras dos de las ecuaciones 19-15 se reducen a la forma

$$\left(\sum \begin{matrix}\text{momento lineal}\\ \text{del sistema}\end{matrix}\right)_1 = \left(\sum \begin{matrix}\text{momento lineal}\\ \text{del sistema}\end{matrix}\right)_2 \qquad (19\text{–}16)$$

A esta expresión se le conoce como ecuación de la *conservación del momentum lineal.*

Sin inducir apreciables errores en los cálculos, puede ser posible aplicar la ecuación 19-16 en una dirección específica para la cual los impulsos lineales son pequeños o *no impulsivos*. Específicamente, las fuerzas no impulsivas ocurren cuando fuerzas pequeñas actúan por periodos muy cortos. Ejemplos típicos incluyen la fuerza de un resorte ligeramente deformado, el contacto inicial con suelo blando, y en algunos casos el peso del cuerpo.

**Conservación del momentum angular.** El momentum angular de un sistema de cuerpos rígidos conectados se conserva con respecto al centro de masa $G$ del sistema, o con respecto a un punto fijo $O$, cuando la suma de todos los impulsos angulares creados por las fuerzas externas que actúan sobre el sistema es cero, o apreciablemente pequeña (no impulsiva), si se calcula con respecto a esos puntos. La tercera de las ecuaciones 19-15 es entonces

$$\left(\sum \begin{matrix}\text{momento angular}\\ \text{del sistema}\end{matrix}\right)_{O1} = \left(\sum \begin{matrix}\text{momento angular}\\ \text{del sistema}\end{matrix}\right)_{O2} \qquad (19\text{–}17)$$

A ésta se le llama ecuación de la *conservación del momentum angular*. En el caso de un solo cuerpo rígido, la ecuación 19-17 aplicada al punto $G$ se convierte en $(I_G\omega)_1 = (I_G\omega)_2$. Para ilustrar una aplicación de esta ecuación, considere a un clavadista que ejecuta una voltereta después de saltar de un trampolín. Al doblar sus brazos y piernas y llevarlos cerca de su tórax, él *disminuye* el momento de inercia de su cuerpo *incrementando* así su velocidad angular ($I_G\omega$ debe ser constante). Si el clavadista se endereza justo antes de entrar al agua, el momento de inercia de su cuerpo *aumenta* y su velocidad angular *disminuye*. Como el peso de su cuerpo crea un impulso lineal durante el tiempo de movimiento, este ejemplo también ilustra cómo el momentum angular de un cuerpo puede conservarse y *no* así el momentum lineal. Tales casos ocurren siempre que las fuerzas externas generan un impulso lineal que pasa por el centro de masa del cuerpo o por un eje fijo de rotación.

Con tal que la velocidad lineal o angular inicial del cuerpo sea conocida, la conservación del momentum lineal o del momentum angular se usa para determinar la respectiva velocidad lineal o angular final del

cuerpo *justo después* del periodo considerado. Además, aplicando esas ecuaciones a un *sistema* de cuerpos, los impulsos internos que actúan dentro del sistema, los cuales pueden ser desconocidos, son eliminados del análisis, ya que ocurren en pares iguales colineales pero opuestos. Si es necesario determinar una *fuerza impulsiva interna* actuando sobre sólo un cuerpo de un sistema de cuerpos conectados, el cuerpo debe ser *aislado* (diagrama de cuerpo libre) y aplicársele el principio del impulso lineal o angular y el de momentum lineal y momentum angular. Después que el impulso $\int F\,dt$ es calculado, entonces, siempre que el tiempo $\Delta t$ en que el impulso actúa sea conocido, la *fuerza impulsiva promedio* $F_{prom}$ puede ser determinada con $F_{prom} = (\int F\,dt)/\Delta t$.

## PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

La conservación del momentum lineal o del momentum angular debe ser aplicada usando el siguiente procedimiento.

*Diagrama de cuerpo libre.*

- Establezca el marco de referencia inercial $x$, $y$ y dibuje el diagrama de cuerpo libre para el cuerpo o sistema de cuerpos durante el tiempo de impacto. A partir de este diagrama clasifique cada una de las fuerzas aplicadas como "impulsivas" o "no impulsivas".
- Por inspección del diagrama de cuerpo libre, la *conservación del momentum lineal* se aplica en una dirección dada cuando *no* actúan fuerzas impulsivas externas sobre el cuerpo o sistema en esa dirección; mientras que la *conservación del momentum angular* se aplica con respecto a un punto fijo $O$ o en el centro de masa $G$ de un cuerpo o sistema de cuerpos cuando todas las fuerzas impulsivas externas que actúan sobre el cuerpo o sistema generan un momento cero (o impulso angular cero) con respecto a $O$ o a $G$.
- Como procedimiento alternativo, dibuje los diagramas de impulso y momentum para el cuerpo o sistema de cuerpos. Estos diagramas son particularmente útiles para visualizar los términos de "momento" usados en la ecuación de la conservación del momentum angular, cuando se ha decidido que los momentos angulares van a ser calculados con respecto a un punto que no es el centro de masa $G$ del cuerpo.

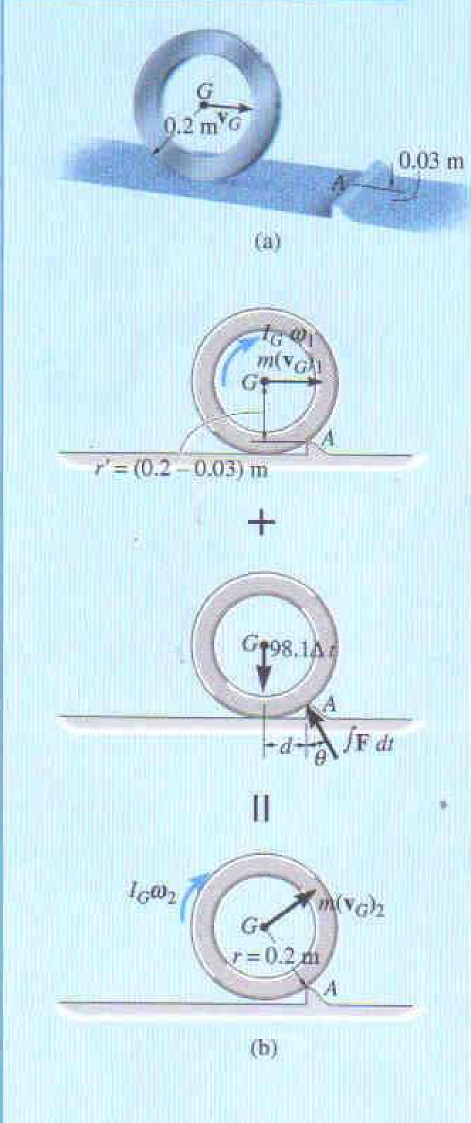
*Conservación del momentum.*

- Aplique la conservación del momentum lineal o del momentum angular en las direcciones apropiadas.

*Cinemática.*

- Si el movimiento parece ser complicado, los diagramas cinemáticos (velocidad) pueden ser útiles para obtener las relaciones cinemáticas necesarias.

## EJEMPLO 19.6



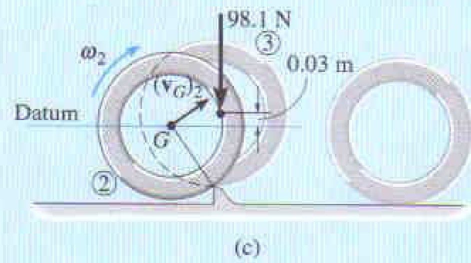




Fig. 19-9

La rueda de 10 kg mostrada en la figura 19-9*a* tiene un momento de inercia $I_G = 0.156$ kg · m$^2$. Suponiendo que la rueda no se desliza o rebota, determine la velocidad mínima $\mathbf{v}_G$ que debe tener para rodar justo sobre la obstrucción situada en $A$.

### Solución

***Diagramas de impulso y momentum.*** Como no ocurre deslizamiento ni rebote, esencialmente la rueda *pivotea* con respecto al punto $A$ durante el contacto. Esta condición se muestra en la figura 19-9*b* que indica, respectivamente, el momentum de la rueda *justo antes del impacto*, los impulsos dados a la rueda *durante el impacto*, y el momentum de la rueda *justo después del impacto*. Sólo dos impulsos (fuerzas) actúan sobre la rueda. En comparación, la fuerza en el punto $A$ es mucho mayor que el peso, y como el tiempo de impacto es muy corto, el peso puede ser considerado no impulsivo. La fuerza impulsiva $\mathbf{F}$ en $A$ tiene magnitud y dirección $\theta$ desconocidas. Para eliminar esta fuerza del análisis, advierta que el momentum angular con respecto a $A$ esencialmente *se conserva* ya que $(98.1\ \Delta t)d \approx 0$.

***Conservación del momentum angular.*** Con referencia a la figura 19-9*b*,

$$(\circlearrowleft +) \qquad (H_A)_1 = (H_A)_2$$

$$r'm(v_G)_1 + I_G\omega_1 = rm(v_G)_2 + I_G\omega_2$$

$$(0.2\text{ m} - 0.03\text{ m})(10\text{ kg})(v_G)_1 + (0.156\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(\omega_1) = (0.2\text{ m})(10\text{ kg})(v_G)_2 + (0.156\text{ kg}\cdot\text{m}^2)(\omega_2)$$

***Cinemática.*** Como no ocurre deslizamiento, en general $\omega = v_G/r = v_G/0.2\ m = 5\ v_G$. Sustituyendo esto en la ecuación anterior y simplificando se obtiene

$$(v_G)_2 = 0.892(v_G)_1 \qquad (1)$$

***Conservación de la energía.**** Para rodar sobre la obstrucción, la rueda debe pasar la posición 3 mostrada en la figura 19-9*c*. Por tanto, para que $(v_G)_2$ [o $(v_G)_1$] sea un mínimo, es necesario que la energía cinética de la rueda en la posición 2 sea igual a la energía potencial en la posición 3. Construyendo el datum a través del centro de gravedad, como se muestra en la figura, y aplicando la ecuación de la conservación de la energía, tenemos

$$\{T_2\} + \{V_2\} = \{T_3\} + \{V_3\}$$

$$\{\tfrac{1}{2}(10\text{ kg})(v_G)_2^2 + \tfrac{1}{2}(0.156\text{ kg}\cdot\text{m}^2)\omega_2^2\} + \{0\} = \{0\} + \{(98.1\text{ N})(0.03\text{ m})\}$$

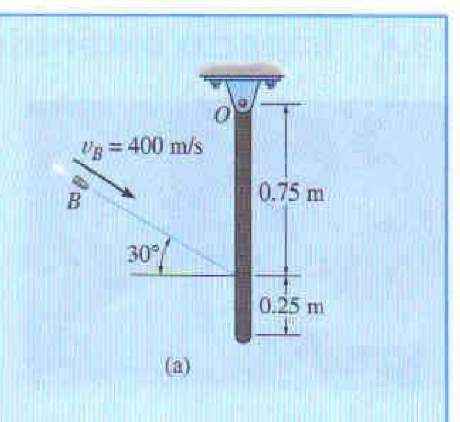
Sustituyendo $\omega_2 = 5(v_G)_2$ y la ecuación 1 en esta ecuación, y resolviendo,

$$(v_G)_1 = 0.729\text{ m/s} \rightarrow \qquad \textit{Resp.}$$

*Este principio *no* es aplicable durante el *impacto*, ya que *se pierde* energía durante la colisión; sin embargo, puede usarse justo después del impacto, posición 2.

## EJEMPLO 19.7

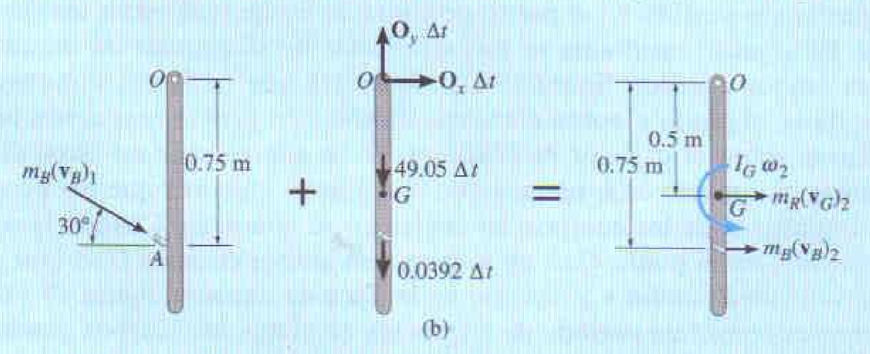
La barra esbelta de 5 kg mostrada en la figura 19-10*a* está articulada en $O$ e inicialmente se encuentra en reposo. Si una bala de 4 g es disparada hacia la barra con velocidad de 400 m/s, como se muestra en la figura, determine la velocidad angular de la barra justo después que la bala queda empotrada en ella.



(a)

### Solución

***Diagramas de impulso y momentum.*** El impulso que la bala ejerce sobre la barra puede ser eliminado del análisis, y la velocidad angular de la barra justo después del impacto puede ser determinada considerando la bala y la barra como un solo sistema. Para aclarar los principios implicados, los diagramas de impulso y momentum se muestran en la figura 19-10*b*. Los diagramas de momentum se dibujan *justo antes y justo después del impacto*. Durante el impacto, la bala y la barra intercambian *impulsos internos* iguales pero *opuestos* en el punto $A$. Como se muestra en el diagrama de impulso, los impulsos que son externos al sistema se deben a las reacciones en $O$ y a los pesos de la bala y la barra. Como el tiempo de impacto, $\Delta t$, es muy corto, la barra sólo se mueve levemente, y entonces los "momentos" de los impulsos por peso con respecto al punto $O$ son esencialmente cero. Por ello, el momentum angular se conseva con respecto a este punto.



(b)

***Conservación del momentum angular.*** A partir de la figura 19-10*b*, tenemos

$$(\circlearrowright+) \qquad \Sigma(H_O)_1 = \Sigma(H_O)_2$$

$$m_B(v_B)_1 \cos 30°(0.75\text{ m}) = m_B(v_B)_2(0.75\text{ m}) + m_R(v_G)_2(0.5\text{ m}) + I_G\omega_2$$

$$(0.004\text{ kg})(400 \cos 30°\text{m/s})(0.75\text{ m}) =$$

$$(0.004\text{ kg})(v_B)_2(0.75\text{ m}) + (5\text{ kg})(v_G)_2(0.5\text{ m}) + [\tfrac{1}{12}(5\text{ kg})(1\text{ m})^2]\omega_2$$

o bien

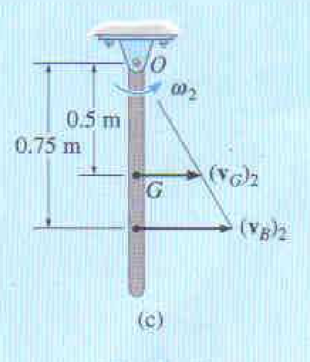
$$1.039 = 0.003(v_B)_2 + 2.50(v_G)_2 + 0.417\omega_2 \qquad (1)$$

***Cinemática.*** Como la barra está articulada en $O$, a partir de la figura 19-10*c* tenemos

$$(v_G)_2 = (0.5\text{ m})\omega_2 \qquad (v_B)_2 = (0.75\text{ m})\omega_2$$

Sustituyendo en la ecuación 1 y resolviendo obtenemos

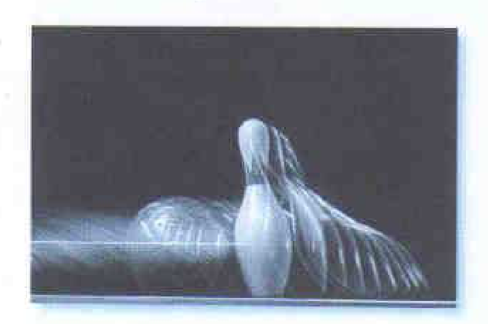
$$\omega_2 = 0.623\text{ rad/s}\circlearrowright \qquad \textit{Resp.}$$



(c)

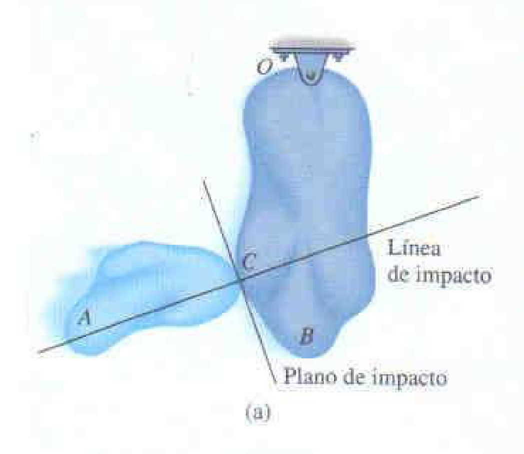
**Fig. 19–10**

## 19.4 Impacto excéntrico



Un ejemplo de impacto excéntrico ocurre aquí entre la bola y los bolos.

Los conceptos que implican impacto central y oblicuo de partículas fueron presentados en la sección 15.4. Ahora ampliaremos este tratamiento y analizaremos el impacto excéntrico de dos cuerpos. El *impacto excéntrico* ocurre cuando la línea que conecta los *centros de masa* de los dos cuerpos *no* coincide con la línea de impacto.* Este tipo de impacto ocurre a menudo cuando uno o ambos cuerpos están restringidos a girar con respecto a un eje fijo. Por ejemplo, considere la colisión experimentada en el punto $C$ entre los dos cuerpos $A$ y $B$, mostrados en la figura 19-11*a*. Se supone que justo antes de la colisión $B$ está girando en sentido contrario al de las manecillas del reloj con velocidad angular $(\boldsymbol{\omega}_B)_1$, y la velocidad del punto de contacto $C$ ubicado en $A$ es $(\mathbf{u}_A)_1$. Los diagramas cinemáticos para ambos cuerpos justo antes de la colisión se muestran en la figura 19-11*b*. Si los cuerpos son lisos, las *fuerzas impulsivas* que ejercen entre sí *están dirigidas a lo largo de la línea de impacto*. Por consiguiente, la componente de velocidad del punto $C$ sobre el cuerpo $B$, que está dirigida a lo largo de la línea de impacto, es $(v_B)_1 = (\omega_B)_1 r$, figura 19-11*b*. De la misma forma, sobre el cuerpo $A$, la componente de velocidad $(\mathbf{u}_A)_1$ a lo largo de la línea de impacto es $(\mathbf{v}_A)_1$. Para que ocurra una colisión, $(v_A)_1 > (v_B)_1$.



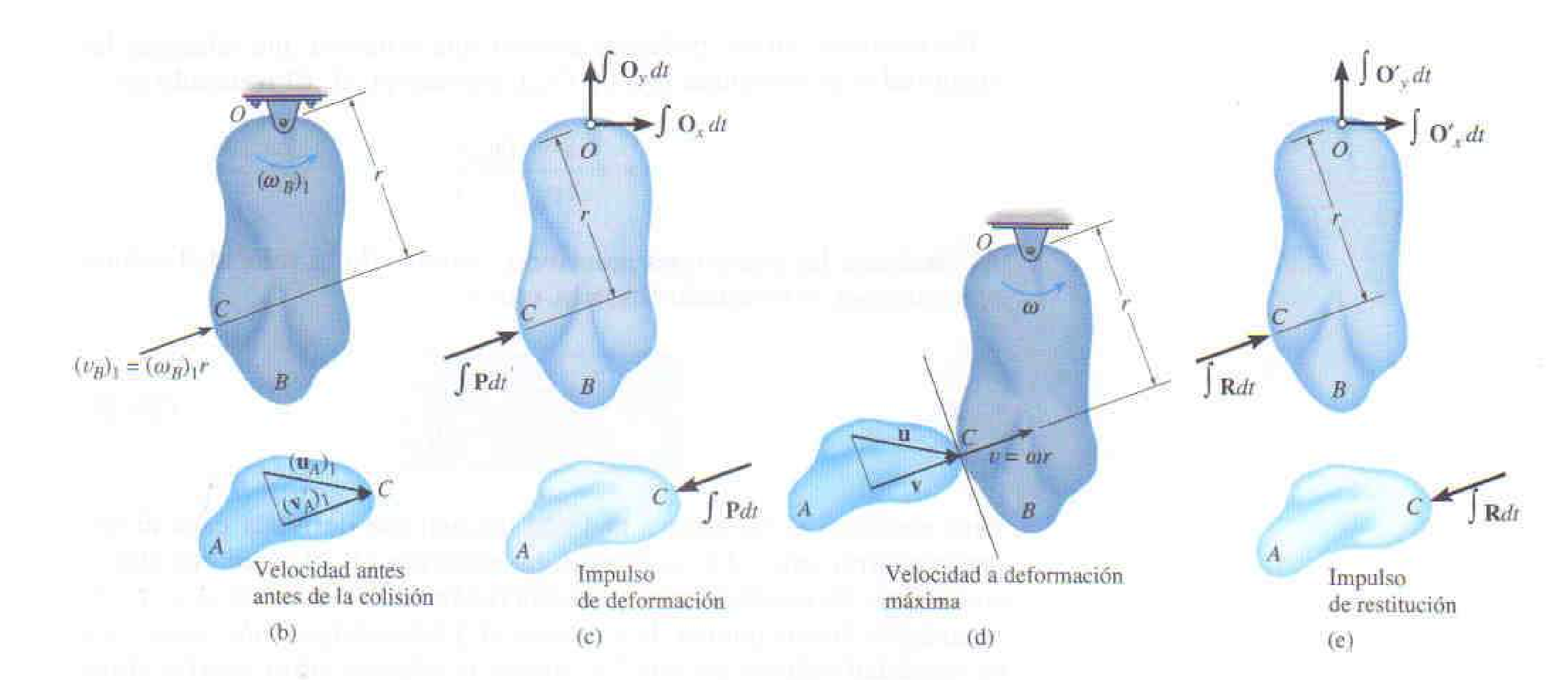

(a)

**Fig. 19-11**

Durante el impacto, una fuerza impulsiva **P** igual pero opuesta y que *deforma* sus perfiles en el punto de contacto es ejercida entre los cuerpos. El impulso resultante se muestra sobre los diagramas de impulso para ambos cuerpos, figura 19-11*c*. Advierta que la fuerza impulsiva creada en el punto $C$ sobre el cuerpo en rotación genera reacciones impulsivas sobre el pasador instalado en $O$. Se supone que en estos diagramas el impacto crea fuerzas que son mucho mayores que los pesos no impulsivos de los cuerpos, las cuales no se muestran. Cuando la deformación en el punto $C$ es un máximo, en ambos cuerpos $C$ se mueve con velocidad común **v** a lo largo de la línea de impacto, figura 19-11*d*. Entonces ocurre un periodo de *restitución* en el que los cuerpos tienden a recuperar sus formas originales. La fase de restitución crea una fuerza impulsiva **R** igual pero opuesta que actúa entre los cuerpos como se muestra en el diagrama de impulso, figura 19-11*e*. Después de la restitución los cuerpos se separan de manera que el punto $C$ sobre el cuerpo $B$ tiene velocidad $(\mathbf{v}_B)_2$ y el punto $C$ sobre el cuerpo $A$ tiene velocidad $(\mathbf{u}_A)_2$, figura 19-11*f*, donde $(v_B)_2 > (v_A)_2$.

En general, un problema que implica el impacto de dos cuerpos requiere la determinación de *dos incógnitas* $(v_A)_2$ y $(v_B)_2$, suponiendo que $(v_A)_1$ y $(v_B)_1$ son conocidas (o que pueden ser determinadas usando cinemática, métodos de energía, las ecuaciones de movimiento, etc.). Para resolver este problema, deben escribirse dos ecuaciones. Generalmente, la *primera ecuación* implica aplicar *la conservación del momentum angular a los dos cuerpos*. En el caso de ambos cuerpos $A$ y $B$, podemos establecer que el momentum angular se conserva con respecto al punto $O$ ya que los impulsos en $C$ son internos al sistema y los impulsos en $O$

*Cuando estas líneas coinciden, ocurre un impacto central y el problema puede ser analizado como se estudió en la sección 15.4.




crean un momento cero (o impulso angular cero) con respecto al punto $O$. La *segunda ecuación* se obtiene usando la definición del *coeficiente de restitución*, $e$, que es una razón del impulso de restitución al impulso de deformación. Para establecer una forma útil de esta ecuación primero debemos aplicar el principio del impulso angular y del momentum angular con respecto al punto $O$ a los cuerpos $B$ y $A$ por separado. Combinando los resultados obtenemos la ecuación necesaria. Al proceder de esta manera, el principio del impulso angular y momentum angular aplicado al cuerpo $B$ desde el tiempo justo antes de la colisión hasta el instante de máxima deformación, figuras 19-11$b$, 19-11$c$ y 19-11$d$, obtenemos

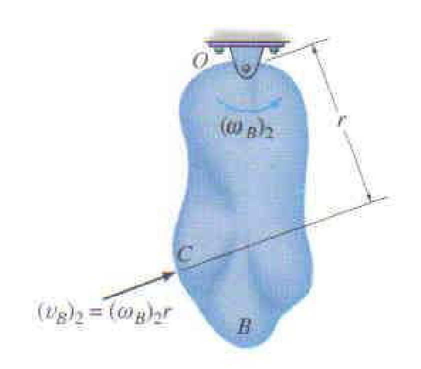
$$(\circlearrowright +) \qquad I_O(\omega_B)_1 + r\int P\,dt = I_O\omega \qquad (19\text{–}18)$$

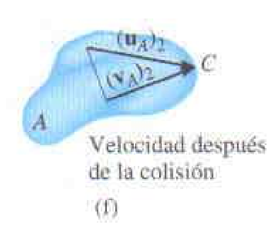
Aquí $I_O$ es el momento de inercia del cuerpo $B$ con respecto al punto $O$. De manera similar, aplicando el principio del impulso angular y el momentum angular a partir del instante de máxima deformación hasta el tiempo justo después del impacto, figuras 19-11$d$, 19-11$e$ y 19-11$f$, resulta

$$(\circlearrowright +) \qquad I_O\omega + r\int R\,dt = I_O(\omega_B)_2 \qquad (19\text{–}19)$$

Resolviendo $\int P\,dt$ y $\int R\,dt$ en las ecuaciones 19-18 y 19-19, respectivamente, y formulando $e$, tenemos

$$e = \frac{\int R\,dt}{\int P\,dt} = \frac{r(\omega_B)_2 - r\omega}{r\omega - r(\omega_B)_1} = \frac{(v_B)_2 - v}{v - (v_B)_1}$$




Velocidad después
de la colisión
(f)

**Fig. 19–11**

De la misma forma, podemos escribir una ecuación que relacione las magnitudes de velocidad $(v_A)_1$ y $(v_A)_2$ del cuerpo $A$. El resultado es

$$e = \frac{v - (v_A)_2}{(v_A)_1 - v}$$

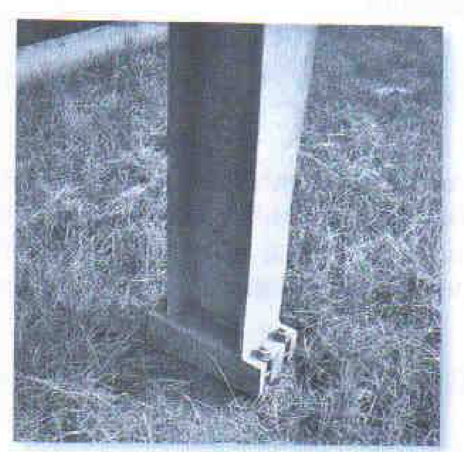
Al combinar las ecuaciones anteriores, eliminando la velocidad común $v$, obtenemos el resultado deseado, esto es,

$$(+\nearrow) \qquad e = \frac{(v_B)_2 - (v_A)_2}{(v_A)_1 - (v_B)_1} \qquad (19\text{–}20)$$

Esta ecuación es idéntica a la 15-11, la cual fue derivada para el impacto central entre dos partículas. La ecuación 19-20 establece que el coeficiente de restitución es igual a la razón de la velocidad relativa de *separación* de los puntos de contacto ($C$) *justo después del impacto* a la velocidad relativa en que los puntos *se acercan* entre sí *justo* antes del impacto. Al derivar esta ecuación, supusimos que los puntos de contacto para ambos cuerpos se mueven hacia arriba y hacia la derecha antes y después del impacto. Si el movimiento de un punto cualquiera de los puntos que entran en contacto ocurre hacia abajo y hacia la izquierda, la velocidad de este punto es considerada una cantidad negativa en la ecuación 19-20.

Como se indicó, cuando la ecuación 19-20 se usa junto con la conservación del momentum angular para los cuerpos, proporciona un medio útil para obtener las velocidades de los dos cuerpos en colisión justo después de que ésta ocurre.

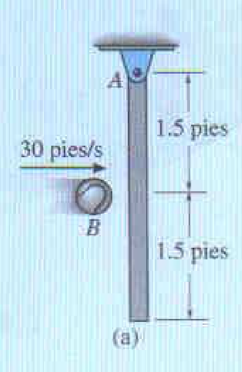




Las columnas de muchos letreros de autopista son diseñadas para que se rompan separándose de sus soportes y fallen fácilmente en sus uniones durante un impacto. Esto se demuestra mediante las conexiones ranuradas en sus bases y las rupturas en la sección media de las columnas. La mecánica del impacto excéntrico se usa en el diseño de estas estructuras.

## EJEMPLO 19.8

La barra esbelta de 10 lb está suspendida del pasador colocado en $A$, figura 19-12$a$. Si una pelota $B$ de 2 lb es lanzada hacia la barra y golpea su centro con velocidad horizontal de 30 pies/s, determine la velocidad angular de la barra justo después del impacto. El coeficiente de restitución es $e = 0.4$.




### Solución

***Conservación del momentum angular.*** Considere a la pelota y la barra como un sistema, figura 19-12$b$. El momentum angular se conserva con respecto al punto $A$ ya que la fuerza impulsiva entre la barra y la pelota es *interna*. Los *pesos* de la pelota y la barra son *no impulsivos*. Observando las direcciones de las velocidades de la pelota y la barra justo después del impacto como se muestran en el diagrama cinemático, figura 19-12$c$, se requiere

$$(\circlearrowright +) \qquad (H_A)_1 = (H_A)_2$$

$$m_B(v_B)_1(1.5 \text{ pies}) = m_B(v_B)_2(1.5 \text{ pies}) + m_R(v_G)_2(1.5 \text{ pies}) + I_G\omega_2$$

$$\left(\frac{2 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}\right)(30 \text{ pies/s})(1.5 \text{ pies}) = \left(\frac{2 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}\right)(v_B)_2(1.5 \text{ pies}) +$$

$$\left(\frac{10 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}\right)(v_G)_2(1.5 \text{ pies}) + \left[\frac{1}{12}\left(\frac{10 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}\right)(3 \text{ pies})^2\right]\omega_2$$

Como $(v_G)_2 = 1.5\omega_2$, entonces

$$2.795 = 0.09317(v_B)_2 + 0.9317\omega_2 \qquad (1)$$

***Coeficiente de restitución.*** Con referencia a la figura 19-12$c$, tenemos

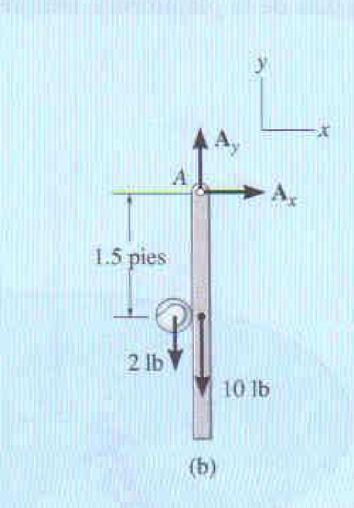
$$(\overset{+}{\rightarrow}) \qquad e = \frac{(v_G)_2 - (v_B)_2}{(v_B)_1 - (v_G)_1} \qquad 0.4 = \frac{(1.5 \text{ pies})\omega_2 - (v_B)_2}{30 \text{ pies/s} - 0}$$

$$12.0 = 1.5\omega_2 - (v_B)_2$$

Resolviendo las ecuaciones,

$$(v_B)_2 = -6.52 \text{ pies/s} = 6.52 \text{ pies/s} \leftarrow$$

$$\omega_2 = 3.65 \text{ rad/s} \circlearrowleft \qquad \textit{Resp.}$$



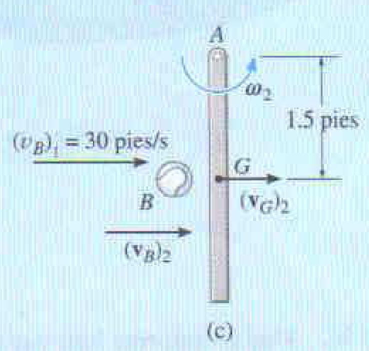
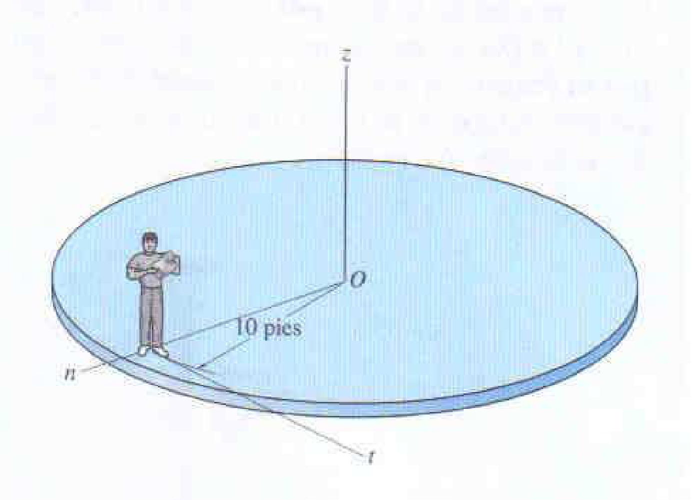




Fig. 19–12

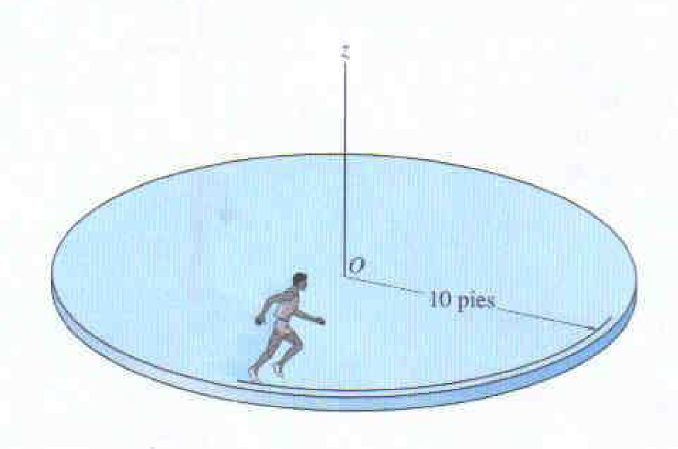
## PROBLEMAS

**19-34.** Dos ruedas $A$ y $B$ tienen masas $m_A$ y $m_B$ y radios de giro con respecto a sus ejes centrales verticales de $k_A$ y $k_B$, respectivamente. Si las ruedas están girando libremente en la misma dirección a $\omega_A$ y $\omega_B$ con respecto al mismo eje vertical, determine su velocidad angular común después que son puestas en contacto y el deslizamiento entre ellas cesa.

**19-35.** Una plataforma horizontal circular tiene un peso de 300 lb y radio de giro $k_z = 8$ pies con respecto al eje $z$ que pasa por su centro $O$. La plataforma puede girar libremente con respecto al eje $z$ e inicialmente está en reposo. Un hombre con peso de 150 lb empieza a correr por el borde en una trayectoria circular de 10 pies de radio. Si él tiene una rapidez de 4 pies/s y la mantiene con relación a la plataforma, determine la velocidad angular de la plataforma. Desprecie la fricción.



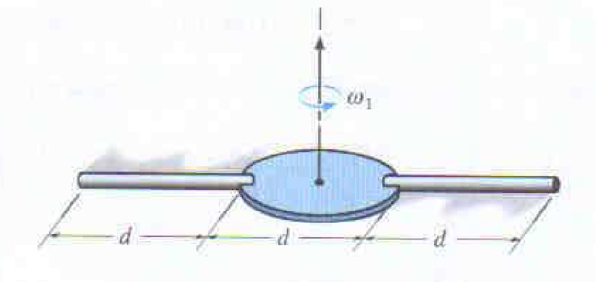

Prob. 19-36




Prob. 19-35

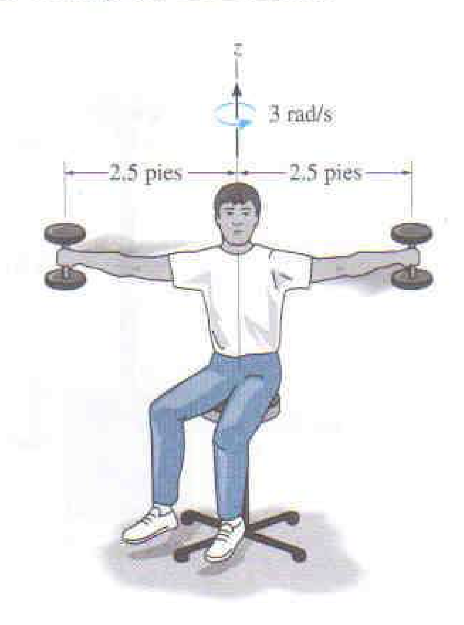
**19-37.** Cada una de las dos barras esbeltas y el disco tienen la misma masa $m$. La longitud de cada barra es igual al diámetro $d$ del disco. Si el conjunto se encuentra girando con velocidad angular $\omega_1$ cuando las barras están dirigidas hacia fuera, determine la velocidad angular del conjunto si por medios internos las barras son llevadas a una posición vertical.

***19-36.** Una plataforma horizontal circular tiene un peso de 300 lb y radio de giro $k_z = 8$ pies con respecto al eje $z$ que pasa por su centro $O$. La plataforma puede girar libremente con respecto al eje $z$ e inicialmente está en reposo. Un hombre con peso de 150 lb lanza un bloque de 15 lb fuera del borde de la plataforma con velocidad horizontal de 5 pies/s, *medida con relación a la plataforma*. Determine la velocidad angular de la plataforma si el bloque es lanzado (a) tangente a la plataforma, a lo largo del eje $+t$, y (b) hacia fuera a lo largo de una línea radial, o eje $+n$. Desprecie el tamaño del hombre.



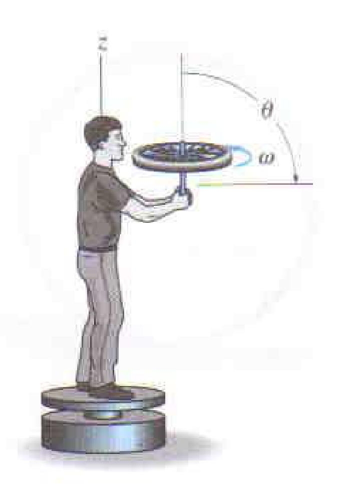

Prob. 19-37

**19-38.** El hombre está sentado en una silla giratoria sosteniendo dos pesas de 5 lb con sus brazos estirados. Si él está girando a 3 rad/s en esta posición, determine su velocidad angular cuando las pesas son acercadas y mantenidas a 0.3 pies del eje de rotación. Suponga que el hombre pesa 160 lb y tiene un radio de giro $k_z = 0.55$ pies con respecto al eje $z$. Desprecie la masa de sus brazos y el tamaño de las pesas en el cálculo.



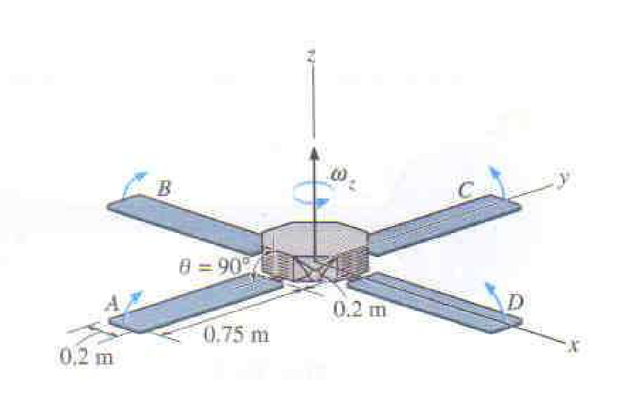

Prob. 19–38

**19-39.** Un hombre tiene un momento de inercia $I_z$ con respecto al eje $z$. Él está originalmente en reposo y de pie sobre una pequeña plataforma que puede girar libremente. Si el hombre toma una rueda que está girando a $\boldsymbol{\omega}$ y tiene un momento de inercia $I$ con respecto a su eje de rotación, determine su velocidad angular si (a) él sostiene la rueda como se muestra en la figura, (b) gira la rueda hacia fuera a un ángulo $\theta = 90°$, y (c) gira la rueda hacia abajo a un ángulo $\theta = 180°$.



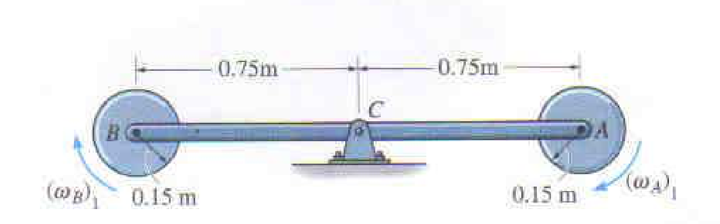

Prob. 19–39

***19-40.** El satélite espacial tiene masa de 125 kg y momento de inercia $I_z = 0.940 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$, excluidos los cuatro paneles solares $A$, $B$, $C$ y $D$. Cada panel solar tiene masa de 20 kg y puede ser aproximado como una placa delgada. Si el satélite está girando originalmente con respecto al eje $z$ a razón constante $\omega_z = 0.5$ rad/s cuando $\theta = 90°$, determine la razón de giro si todos los paneles son levantados y alcanzan la posición vertical, $\theta = 0°$, en el mismo instante.



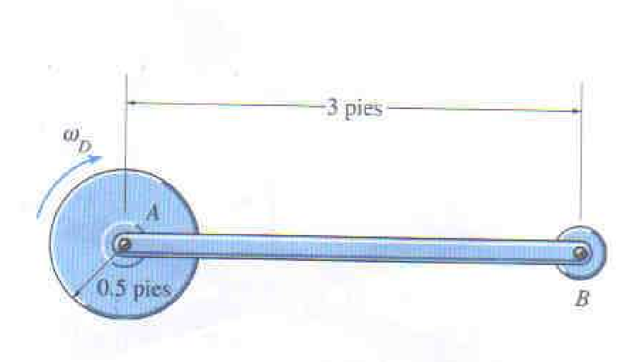

Prob. 19–40

**19-41.** La barra $ACB$ de 2 kg soporta en sus extremos los dos discos de 4 kg. Si ambos discos reciben una velocidad angular $(\omega_A)_1 = (\omega_B)_1 = 5$ rad/s en el sentido de las manecillas del reloj mientras la barra es mantenida estacionaria y luego es liberada, determine la velocidad angular de la barra después que los dos discos dejan de girar con respecto a ella debido a la resistencia de fricción en los pasadores $A$ y $B$. El movimiento es en el *plano horizontal*. Desprecie la fricción en el pasador $C$.



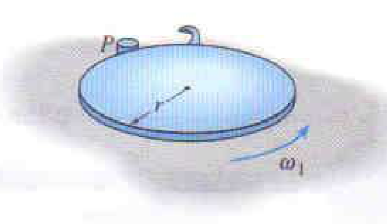

Prob. 19–41

**19-42.** La barra $AB$ de 5 lb soporta en su extremo el disco de 3 lb. Si al disco se le imprime una velocidad angular $\omega_D = 8$ rad/s mientras la barra se mantiene estacionaria y luego es liberada, determine la velocidad angular de la barra después que el disco ha dejado de girar con respecto a ella debido a la resistencia por fricción en el apoyo $A$. El movimiento es en el *plano horizontal*. Desprecie la fricción en el apoyo fijo $B$.



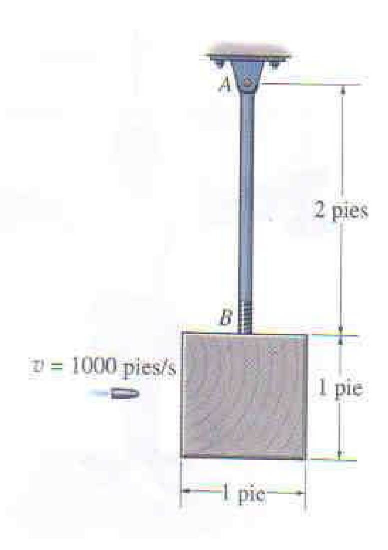

Prob. 19–42

**19-43.** Un disco delgado de masa $m$ tiene velocidad angular $\omega_1$ al girar sobre una superficie lisa. Determine su nueva velocidad angular justo después que el gancho colocado en su borde golpea la clavija $P$ y el disco empieza a girar alrededor de $P$ sin rebotar.



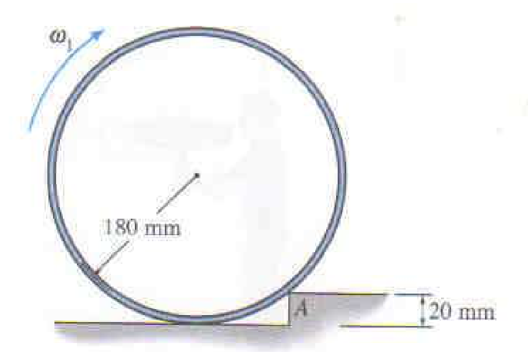

Prob. 19–43

***19-44.** El péndulo consta de una barra esbelta $AB$ de 5 lb y de un bloque de madera de 10 lb. Un proyectil con peso de 0.2 lb es disparado hacia el centro del bloque con una velocidad de 1000 pies/s. Si el péndulo está inicialmente en reposo, y el proyectil se empotra en el bloque, determine la velocidad angular del péndulo justo después del impacto.



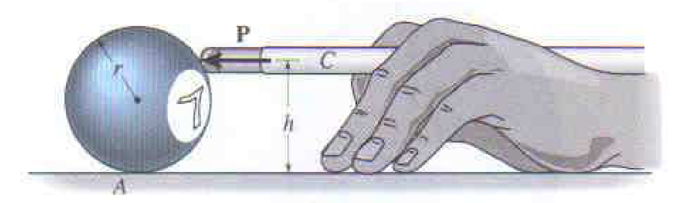

Prob. 19–44

**19-45.** Un aro delgado con masa de 15 kg golpea el escalón de 20 mm de altura. Determine la máxima velocidad angular $\omega_1$ que el aro puede tener para no rebotar en el punto $A$ del escalón al golpearlo.



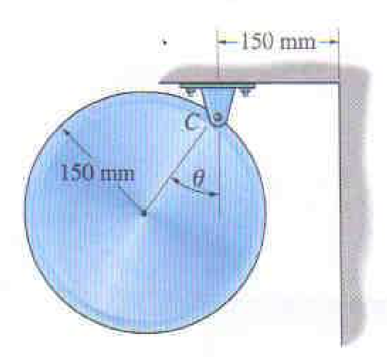

Prob. 19–45

**19-46.** Determine la altura $h$ a la que la bola de billar de masa $m$ debe ser golpeada de manera que no se desarrolle una fuerza de fricción entre la bola y la mesa en el punto $A$. Suponga que el taco $C$ sólo ejerce una fuerza horizontal **P** sobre la bola.



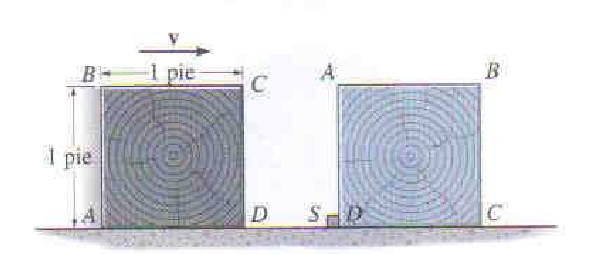

Prob. 19–46

**19-47.** El disco tiene masa de 15 kg. Si es liberado del reposo cuando $\theta = 30°$, determine el máximo ángulo $\theta$ de rebote después que choca con la pared. El coeficiente de restitución entre el disco y la pared es $e = 0.6$. Cuando $\theta = 0°$, el disco cuelga tocando apenas la pared. Desprecie la fricción en el pasador $C$.



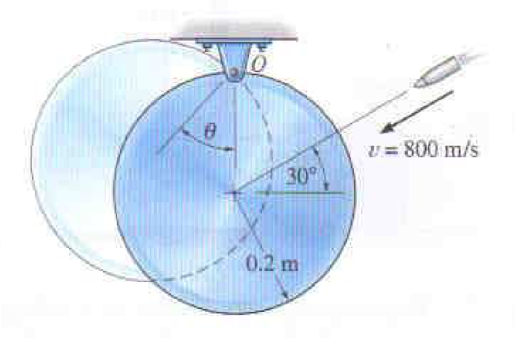

Prob. 19–47

***19-48.** El bloque de 10 lb se está deslizando sobre la superficie lisa cuando la esquina $D$ golpea un tope $S$. Determine la velocidad **v** mínima que debe tener el bloque para poder volcarse sobre su lado y llegar a la posición mostrada. Desprecie el tamaño de $S$. *Sugerencia*: Considere que durante el impacto el peso del bloque es no impulsivo.



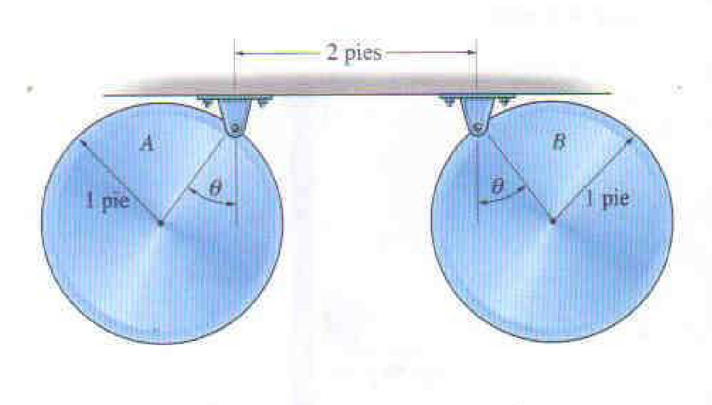

Prob. 19–48

**19-49.** Una bala de 7 g con velocidad de 800 m/s es disparada hacia el borde del disco de 5 kg como se muestra. Determine la velocidad angular del disco justo después que la bala se empotra en él. Calcule también a qué ángulo $\theta$ oscilará el disco antes de detenerse. El disco está originalmente en reposo.



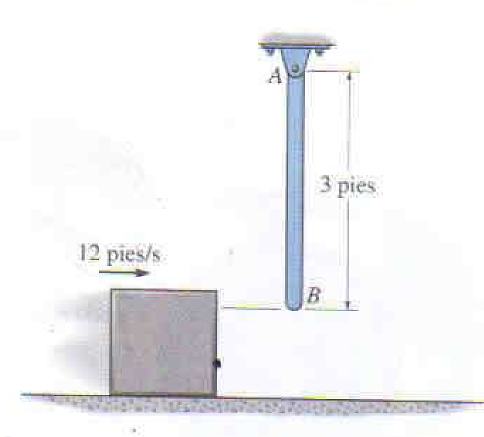

Prob. 19–49

**19-50.** Cada uno de los dos discos pesa 10 lb. Si son liberados del reposo cuando $\theta = 30°$, determine $\theta$ después que entran en colisión y rebotan. El coeficiente de restitución es $e = 0.75$. Cuando $\theta = 0°$, los discos cuelgan tocándose apenas entre sí.



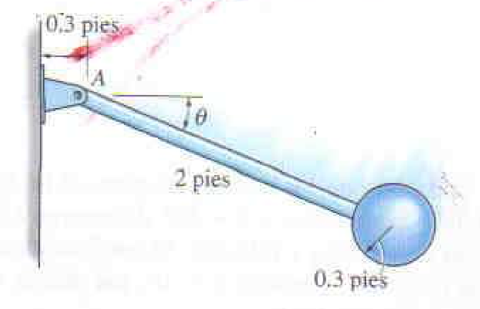

Prob. 19–50

**19-51.** La barra $AB$ de 4 lb cuelga en posición vertical. Un bloque de 2 lb, que se desliza sobre una superficie lisa horizontal con velocidad de 12 pies/s, golpea la barra en su extremo $B$. Determine la velocidad del bloque inmediatamente después de la colisión. El coeficiente de restitución entre el bloque y la barra en el punto $B$ es $e = 0.8$.



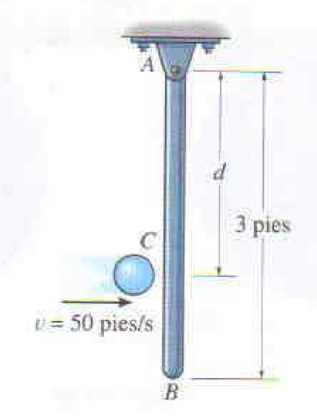

Prob. 19-51

***19-52.** El péndulo consta de una bola sólida de 10 lb y de una barra de 4 lb. Si es liberado del reposo cuando $\theta_1 = 0°$, determine el ángulo $\theta_2$ después que la bola golpea la pared, rebota, y el péndulo oscila hasta el punto de reposo momentáneo. Considere $e = 0.6$.



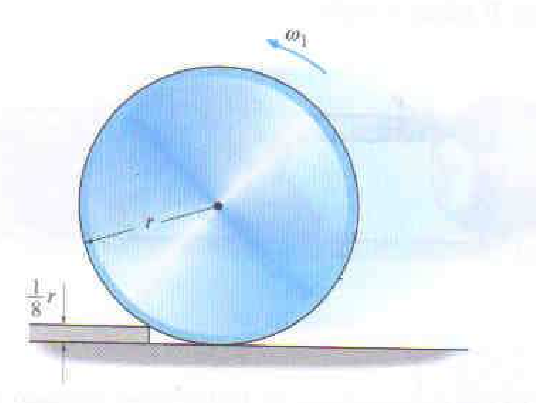

Prob. 19-52

**19-53.** La barra esbelta $AB$ de 6 lb está originalmente en reposo, suspendida en posición vertical. Una bola de 1 lb se lanza hacia la barra con velocidad $v = 50$ pies/s y la golpea en el punto $C$. Determine la velocidad angular de la barra justo después del impacto. Considere $e = 0.7$ y $d = 2$ pies.



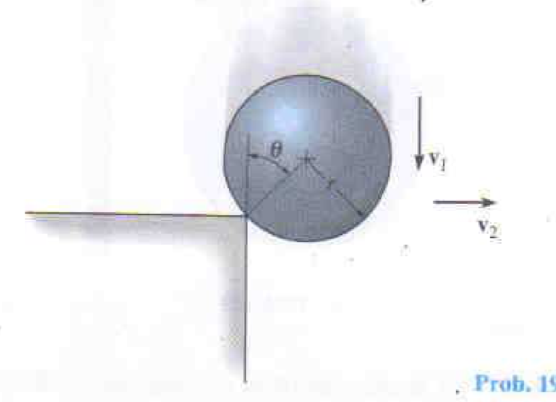

Prob. 19-53

**19-54.** El disco tiene masa $m$ y radio $r$. Si golpea el escalón rugoso con altura de $\frac{1}{8}r$ como se muestra, determine la máxima velocidad angular $\omega_1$ que el disco puede tener sin rebotar en el escalón al golpearlo.



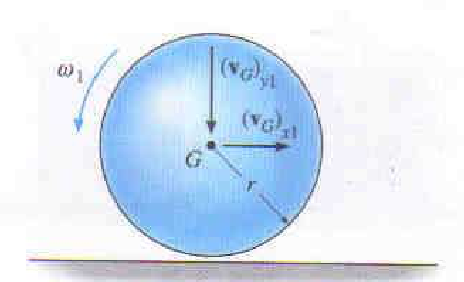

Prob. 19-54

**19-55.** La bola sólida de masa $m$ es dejada caer con velocidad $\mathbf{v}_1$ sobre el borde del escalón rugoso. Si rebota horizontalmente en el escalón a velocidad $\mathbf{v}_2$, determine el ángulo $\theta$ en que ocurre el contacto. Suponga que no hay deslizamiento cuando la bola golpea el escalón. El coeficiente de restitución es $e$.




Prob. 19-55

***19-56.** Una bola sólida con masa $m$ es lanzada contra el suelo de tal forma que en el instante de contacto tiene velocidad angular $\boldsymbol{\omega}_1$ y componentes de velocidad $(\mathbf{v}_G)_{x1}$ y $(\mathbf{v}_G)_{y1}$ como se muestra. Si el suelo es rugoso y no ocurre deslizamiento, determine las componentes de la velocidad de su centro de masa justo después del impacto. El coeficiente de restitución es $e$.




Prob. 19-56

## REPASO DEL CAPÍTULO

- *Momentum lineal y momentum angular.* El momentum lineal de un cuerpo rígido puede ser referido a la velocidad de su centro de masa $G$. El resultado es $\mathbf{L} = m\mathbf{v}_G$. Sumando los momentos de los momentum lineales de todas las partículas del cuerpo con respecto a un eje que pase por $G$, es posible demostrar que el momentum angular del cuerpo con respecto a $G$ es $\mathbf{H}_G = I_G\boldsymbol{\omega}$. Si se debe determinar el momentum angular con respecto a un eje que no pase por el centro de masa, entonces al momentum angular se suman el vector $\mathbf{H}_G$ y el momento del vector $\mathbf{L}_G$ con respecto a este eje.

  *Traslación.* Si el cuerpo está en traslación, entonces $\omega = 0$, y así

$$L = mv_G \qquad H_G = 0$$

  *Rotación con respecto a un eje fijo.* Aquí,

$$L = mv_G \qquad H_G = I_G\omega$$

  Como $v_G = \omega r$, entonces, usando el teorema de los ejes paralelos, el momentum angular con respecto al eje de rotación es

$$H_O = I_O\omega$$

  *Movimiento plano general.* En este caso, el momentum lineal y el momentum angular con respecto al punto $G$ son

$$L = mv_G \qquad H_G = I_G\omega$$

- *Principio del impulso y momentum.* Los principios del impulso lineal y angular y del momentum lineal y momentum angular para un cuerpo rígido son

$$m(\mathbf{v}_G)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt = m(\mathbf{v}_G)_2$$

$$I_G\omega_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} M_G\,dt = I_G\omega_2$$

  Antes de aplicar estas ecuaciones, es importante establecer el sistema coordenado inercial $x$, $y$, $z$. El diagrama de cuerpo libre para el cuerpo debe dibujarse para tomar en cuenta todas las fuerzas y momentos de par que producen impulsos sobre el cuerpo.

- *Conservación del momentum.* Si la suma de los impulsos lineales que actúan sobre un sistema de cuerpos rígidos conectados es cero en una dirección particular, entonces el momentum lineal para el sistema se conserva en esta dirección. La conservación del momentum angular ocurre si los impulsos pasan por un eje o son paralelos a él. El momentum angular también se conserva si las fuerzas externas son pequeñas y por ello crean fuerzas no impulsivas sobre el sistema.

  Un diagrama de cuerpo libre debe acompañar cualquier aplicación para clasificar las fuerzas como impulsivas o no impulsivas y determinar un eje con respecto al cual el momentum angular puede ser conservado.

- *Impacto excéntrico.* Si la línea de impacto no coincide con la línea que conecta los centros de masa de dos cuerpos en colisión, entonces ocurrirá un impacto excéntrico. Si el movimiento de los cuerpos justo después del impacto debe ser determinado, entonces es necesario considerar una ecuación de conservación de momentum para el sistema y usar la ecuación del coeficiente de restitución.

REPASO 2

# Cinemática y cinética planas de un cuerpo rígido

Una vez presentados diversos temas de cinemática y cinética planas en los capítulos del 16 al 19, resumimos ahora estos principios y proporcionamos una oportunidad de aplicarlos a la solución de varios tipos de problemas.

**Cinemática.** Aquí nos interesa estudiar la geometría del movimiento, sin considerar las fuerzas que lo causan. Antes de resolver un problema de cinemática plana, es necesario *clasificar primero el movimiento* como de traslación rectilínea o curvilínea, de rotación con respecto a un eje fijo, o de movimiento plano general. En particular, los problemas que implican movimiento plano general pueden ser resueltos con referencia a un eje fijo (análisis de movimiento absoluto) o usando marcos de referencia en traslación o rotatorios (análisis de movimiento relativo). La opción depende generalmente del tipo de restricciones y de la geometría del problema. En todos los casos, la aplicación de las ecuaciones necesarias puede ser aclarada dibujando un diagrama cinemático. Recuerde que la *velocidad* de un punto es siempre *tangente* a su trayectoria, y la *aceleración* de un punto puede tener *componentes* en las direcciones $n-t$ cuando la trayectoria es *curva*.

**Traslación.** Cuando el cuerpo se mueve con traslación rectilínea o curvilínea, *todos* los puntos que se encuentran sobre el cuerpo tienen el *mismo movimiento*.

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A \qquad \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A$$

## Rotación con respecto a un eje fijo.

**Movimiento angular.**

*Aceleración angular variable.* Si una relación matemática es dada entre *dos cualesquiera* de las *cuatro* variables $\theta$, $\omega$, $\alpha$ y $t$, entonces una *tercera* variable puede ser determinada resolviendo una de las siguientes ecuaciones que relaciona a las tres variables.

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \qquad \alpha = \frac{d\omega}{dt} \qquad \alpha\, d\theta = \omega\, d\omega$$

*Aceleración angular constante.* Las siguientes ecuaciones son aplicables cuando se está *absolutamente seguro* de que la aceleración angular es constante.

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \tfrac{1}{2}\alpha_c t^2 \qquad \omega = \omega_0 + \alpha_c t \qquad \omega^2 = \omega_0^2 + 2\alpha_c(\theta - \theta_0)$$

**Movimiento del punto P.**

Una vez que $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ han sido determinadas, el movimiento circular del punto $P$ puede ser especificado usando las siguientes ecuaciones escalares o vectoriales.

$$v = \omega r \qquad \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$
$$a_t = \alpha r \quad a_n = \omega^2 r \qquad \mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

**Movimiento plano general. Análisis del movimiento relativo.** Recuerde que cuando los *ejes en traslación* son colocados en el "punto base" $A$, el *movimiento relativo* del punto $B$ con respecto a $A$ es simplemente el *movimiento circular de B* con *respecto a A*. Las siguientes ecuaciones se aplican a dos puntos $A$ y $B$ ubicados en el *mismo* cuerpo rígido.

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A} = \mathbf{v}_A + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$$
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A} = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$$

Los *ejes en rotación y en traslación* a menudo son usados para analizar el movimiento de cuerpos rígidos que están conectados entre sí por medio de collarines o bloques deslizables.

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$$

**Cinética.** Para analizar las fuerzas que causan el movimiento debemos usar los principios de la cinética. Al aplicar las ecuaciones necesarias, es importante establecer primero el sistema coordenado inercial y definir las direcciones positivas de los ejes. Las *direcciones* deben ser las *mismas* que las seleccionadas al escribir cualesquiera ecuaciones de cinemática siempre que resulte necesario encontrar una *solución simultánea* de las ecuaciones.

**Ecuaciones de movimiento.** Estas ecuaciones se usan para determinar movimientos acelerados o las fuerzas que causan el movimiento. Si se emplean para determinar posición, velocidad o tiempo del movimiento, entonces la cinemática tendrá que ser considerada para encontrar parte de la solución. Antes de aplicar las ecuaciones de movimiento, *siempre*

*dibuje un diagrama de cuerpo libre* para identificar todas las fuerzas que actúan sobre el cuerpo. Establezca también las direcciones de la aceleración del centro de masa y de la aceleración angular del cuerpo. (Asimismo, puede dibujarse un diagrama cinético para representar $m\mathbf{a}_G$ e $I_G\boldsymbol{\alpha}$ gráficamente. En particular, este diagrama es conveniente para resolver $m\mathbf{a}_G$ en componentes e identificar los términos en la suma de momentos $\Sigma(\mathcal{M}_k)_P$.)

Las tres ecuaciones de movimiento son

$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$
$$\Sigma F_y = m(a_G)_y$$
$$\Sigma M_G = I_G\alpha \quad \text{o} \quad \Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$$

En particular, si el cuerpo está *girando con respecto a un eje fijo*, los momentos también pueden ser sumados con respecto al punto $O$ sobre el eje, en cuyo caso

$$\Sigma M_O = \Sigma(\mathcal{M}_k)_O = I_O\alpha$$

**Trabajo y energía.** *La ecuación del trabajo y la energía se usa para resolver problemas que implican fuerza, velocidad y desplazamiento.* Antes de aplicar esta ecuación, *siempre dibuje un diagrama de cuerpo libre* del cuerpo para identificar las fuerzas que trabajan. Recuerde que la energía cinética del cuerpo es debida al movimiento de traslación del centro de masa, $\mathbf{v}_G$, y al movimiento rotacional del cuerpo, $\boldsymbol{\omega}$.

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$

donde

$$T = \tfrac{1}{2}mv_G^2 + \tfrac{1}{2}I_G\omega^2$$

$$U_F = \int F\cos\theta\, ds \qquad \text{(fuerza variable)}$$
$$U_{F_c} = F_c\cos\theta(s_2 - s_1) \quad \text{(fuerza constante)}$$
$$U_W = -W\,\Delta y \qquad \text{(peso)}$$
$$U_s = -(\tfrac{1}{2}ks_2^2 - \tfrac{1}{2}ks_1^2) \quad \text{(resorte)}$$
$$U_M = M\theta \qquad \text{(momento de par constante)}$$

Si las fuerzas que actúan sobre el cuerpo son *conservativas*, entonces aplique la *ecuación de la conservación de la energía*. Esta ecuación es más fácil de usar que la ecuación del trabajo y la energía, ya que se aplica sólo en *dos puntos* sobre la trayectoria y *no* se requiere calcular el trabajo efectuado por una fuerza al moverse el cuerpo a lo largo de la trayectoria.

$$T_1 + V_1 = T_2 + V_2$$

donde

$$V_g = Wy \quad \text{(energía potencial gravitatoria)}$$
$$V_e = \tfrac{1}{2}ks^2 \quad \text{(energía potencial elástica)}$$

**Impulso y momentum.** *Los principios del impulso lineal y angular y del momentum lineal y momentum angular se usan para resolver problemas que implican fuerza, velocidad y tiempo*. Antes de aplicar las ecuaciones, dibuje un *diagrama de cuerpo libre* para identificar todas las fuerzas que causan impulsos lineales y angulares sobre el cuerpo. Establezca también las direcciones de la velocidad del centro de masa y de la velocidad angular del cuerpo justo antes y justo después que los impulsos son aplicados. (Como un procedimiento alternativo, los diagramas de impulso y momentum pueden acompañar la solución para tomar en cuenta gráficamente los términos en las ecuaciones. Estos diagramas son particularmente útiles al calcular los impulsos angulares y los momentos angulares con respecto a un punto diferente al centro de masa del cuerpo.)

$$m(\mathbf{v}_G)_1 + \Sigma\int \mathbf{F}\,dt = m(\mathbf{v}_G)_2$$

$$(\mathbf{H}_G)_1 + \Sigma\int \mathbf{M}_G\,dt = (\mathbf{H}_G)_2$$

o bien

$$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma\int \mathbf{M}_O\,dt = (\mathbf{H}_O)_2$$

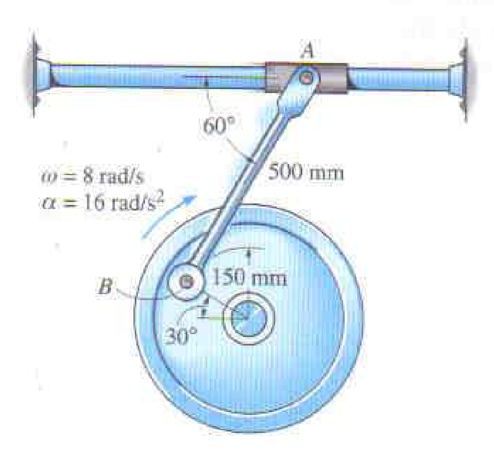
**Conservación del momentum.** Si fuerzas no impulsivas o fuerzas de no impulso actúan sobre el cuerpo en una dirección particular, o si los movimientos de varios cuerpos están implicados en el problema, entonces considere aplicar la conservación del momentum lineal o del momentum angular para encontrar la solución. La investigación del diagrama de cuerpo libre (o del diagrama de impulso) ayudará a determinar las direcciones para las cuales las fuerzas impulsivas son cero, o ejes con respecto a los cuales las fuerzas impulsivas causan un momentum angular cero. Para estos casos,

$$m(\mathbf{v}_G)_1 = m(\mathbf{v}_G)_2$$
$$(\mathbf{H}_O)_1 = (\mathbf{H}_O)_2$$

Los problemas que siguen implican la aplicación de todos los conceptos anteriores. Están presentados *al azar* de manera que se obtenga práctica en la identificación de sus diversos tipos y en el desarrollo de las habilidades necesarias para lograr su solución.

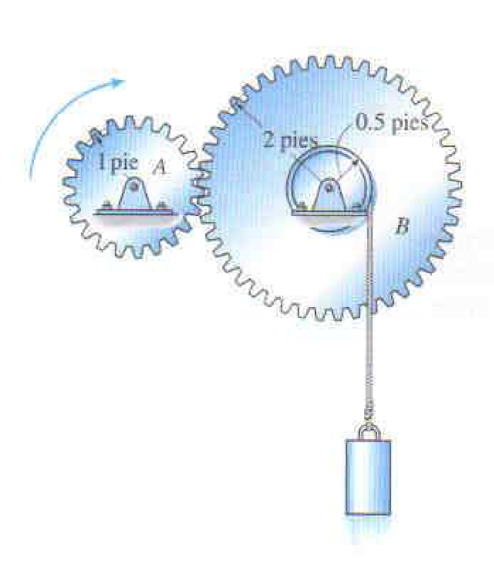
# PROBLEMAS DE REPASO

**R2-1.** En un instante dado, la rueda está girando con los movimientos angulares mostrados. Determine la aceleración del collarín instalado en $A$ en este instante.



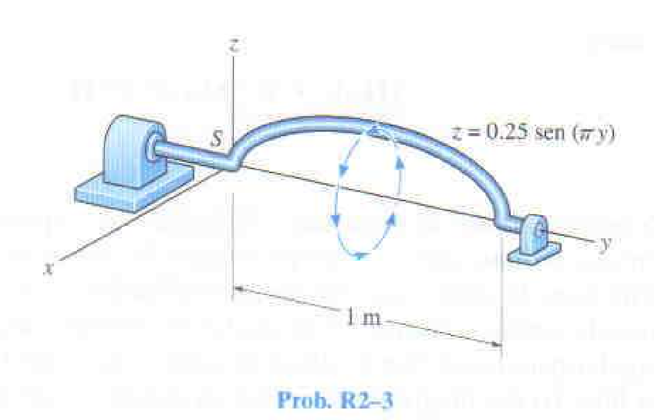

**Prob. R2–1**

**R2-2.** El engrane $A$ elevador tiene velocidad angular inicial de 60 rad/s y desaceleración constante de 1 rad/s$^2$. Determine la velocidad y la desaceleración del bloque que está siendo levantado por el cubo del engrane $B$ cuando $t = 3$ s.



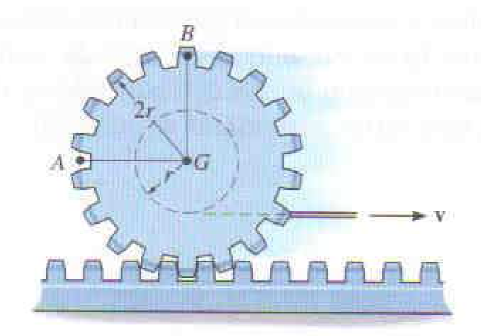

**Prob. R2–2**

**R2-3.** La barra está doblada en forma de una curva seno y es forzada a girar con respecto al eje $y$ conectando el huso $S$ a un motor. Si la barra parte del reposo en la posición mostrada y un motor la impulsa por un corto tiempo con aceleración angular $\alpha = (1.5e^t)$ rad/s$^2$, donde $t$ está en segundos, determine las magnitudes de su velocidad angular y su desplazamiento angular cuando $t = 3$ s. En la barra, ubique el punto que tiene velocidad y aceleración máximas, y calcule las magnitudes de la velocidad y la aceleración de este punto cuando $t = 3$ s. La curva que define la barra es $z = 0.25$ sen $(\pi y)$, donde el argumento para el seno está dado en radianes cuando $y$ está en metros.



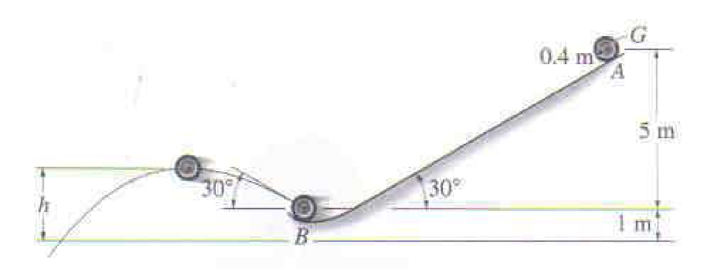

**Prob. R2–3**

***R2-4.** Una cuerda está enrollada alrededor del carrete interno del engrane. Si es jalada con velocidad constante $v$, determine la velocidad y la aceleración de los puntos $A$ y $B$. El engrane rueda sobre la cremallera fija.



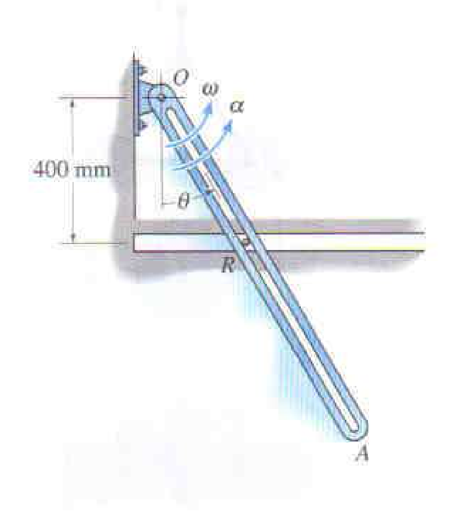

**Prob. R2–4**

**R2-5.** Un neumático de automóvil de 7 kg es liberado del reposo en el punto $A$ sobre el plano inclinado y rueda sin deslizar hasta el punto $B$, donde viaja entonces en vuelo libre. Determine la máxima altura $h$ que alcanza el neumático. El radio de giro del neumático con respecto a su centro de masa es $k_G = 0.3$ m.



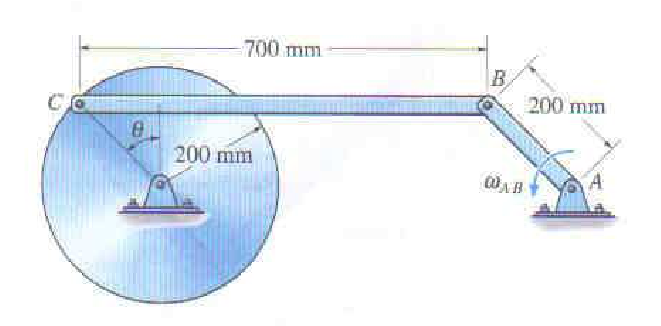

Prob. R2–5

**R2-6.** El eslabón $OA$ está articulado en $O$ y gira debido a la acción deslizable de la barra $R$ a lo largo de la ranura horizontal. Si $R$ parte del reposo, cuando $\theta = 0°$ y tiene aceleración constante $a_R = 60\ \text{mm/s}^2$ hacia la derecha, determine la velocidad angular y la aceleración angular de $OA$ cuando $t = 2$ s.



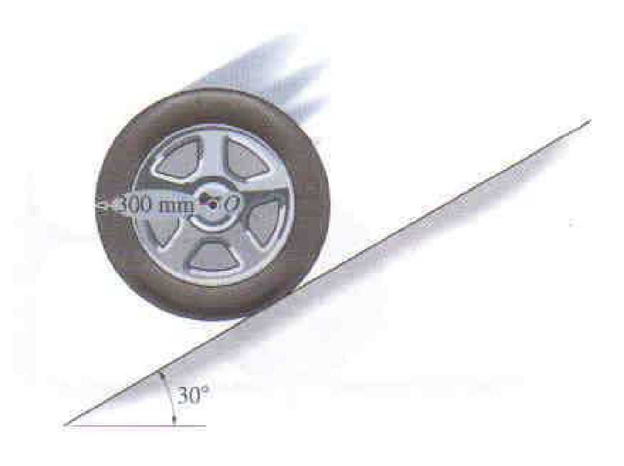

Prob. R2–6

**R2-7.** La barra conectora $BC$ uniforme tiene masa de 3 kg y está conectada mediante pasadores en sus puntos extremos. Determine las fuerzas verticales que los pasadores ejercen sobre los extremos $B$ y $C$ de la barra en el instante (a) $\theta = 0°$, y (b) $\theta = 90°$. La manivela $AB$ está girando con velocidad angular constante $\omega_{AB} = 5$ rad/s.



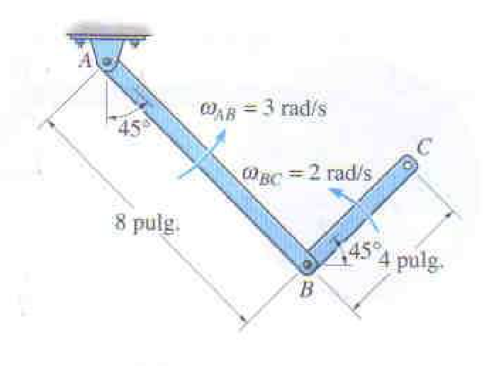

Prob. R2–7

***R2-8.** El neumático tiene masa de 9 kg y radio de giro $k_O = 225$ mm. Si es liberado del reposo y rueda sin deslizar hacia abajo por el plano, determine la rapidez de su centro $O$ cuando $t = 3$ s.



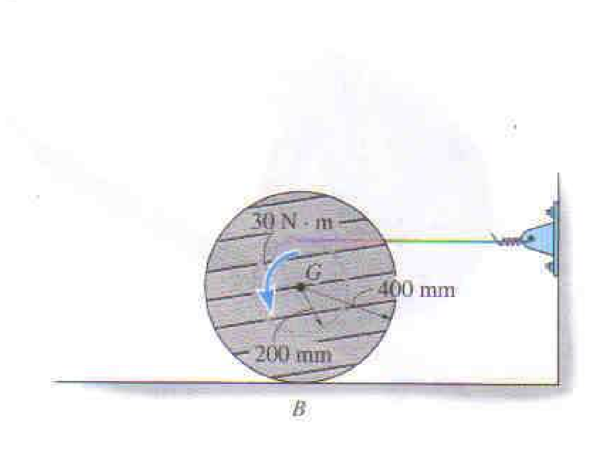

Prob. R2–8

**R2-9.** El doble péndulo consta de dos barras. La barra $AB$ tiene velocidad angular constante de 3 rad/s, y la barra $BC$ tiene velocidad angular constante de 2 rad/s. Ambos movimientos absolutos son medidos en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Determine la velocidad y la aceleración del punto $C$ en el instante mostrado.



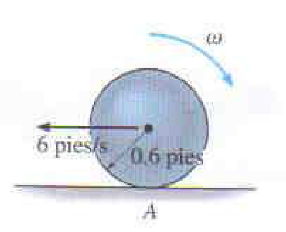

Prob. R2–9

**R2-10.** El carrete y el alambre enrollado alrededor de su núcleo tienen masa de 20 kg y radio de giro centroidal $k_G = 250$ mm. Si el coeficiente de fricción cinética en el suelo es $\mu_B = 0.1$, determine la aceleración angular del carrete cuando se aplica el momento de par de 30 N · m.



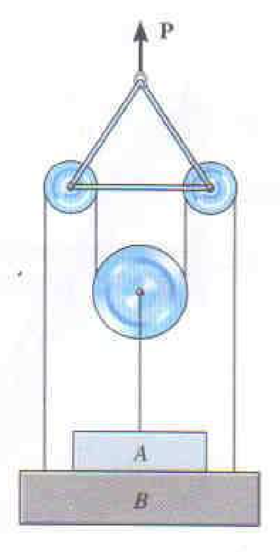

Prob. R2–10

**R2-11.** Si la bola con peso de 15 lb es lanzada sobre una *superficie rugosa* de manera que su centro adquiere velocidad de 6 pies/s paralela a la superficie, determine la cantidad de giro inverso, $\boldsymbol{\omega}$, que debe darse a la bola para que deje de girar en el mismo instante en que su velocidad hacia delante es cero. No es necesario conocer el coeficiente de fricción cinética en $A$ para efectuar los cálculos.



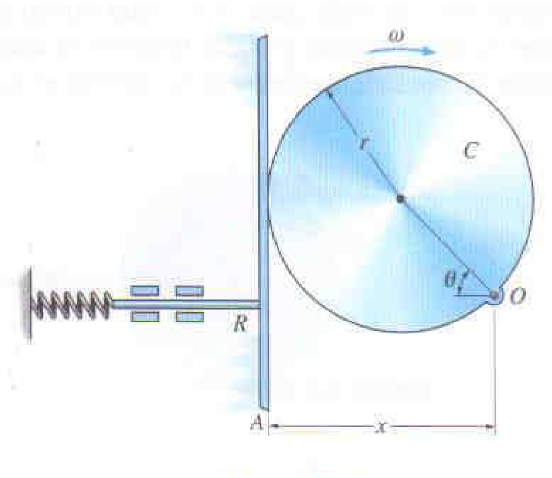

Prob. R2–11

*R2-12. Los bloques $A$ y $B$ pesan 50 y 10 lb, respectivamente. Si $P = 100$ lb, determine la fuerza normal ejercida por el bloque $A$ sobre el bloque $B$. Desprecie la fricción y los pesos de poleas, cuerda y barras del marco triangular.



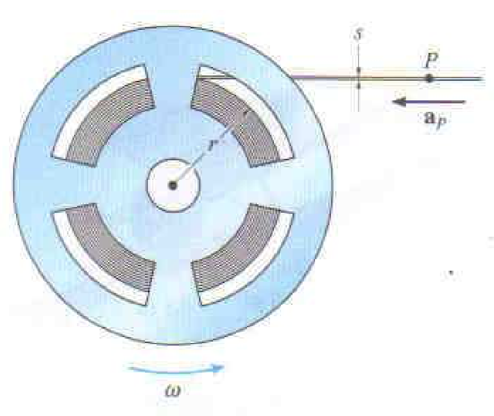

Prob. R2–12

**R2-13.** Determine la velocidad y la aceleración de la barra $R$ para cualquier ángulo $\theta$ de la leva $C$ cuando ésta gira con velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$. La conexión de pasador situada en $O$ no causa interferencia con el movimiento de $A$ sobre $C$.



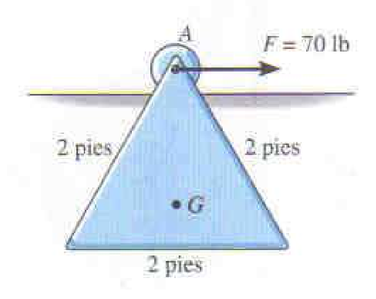

Prob. R2–13

**R2-15.** Una cinta con espesor $s$ se enrolla alrededor de la rueda que está girando con razón constante $\boldsymbol{\omega}$. Suponiendo que la porción no enrollada de la cinta permanece horizontal, determine la aceleración del punto $P$ sobre la cinta cuando el radio es $r$. *Sugerencia*: Como $v_p = \omega r$, tome la derivada con respecto al tiempo y observe que $dr/dt = \omega(s/2\pi)$.



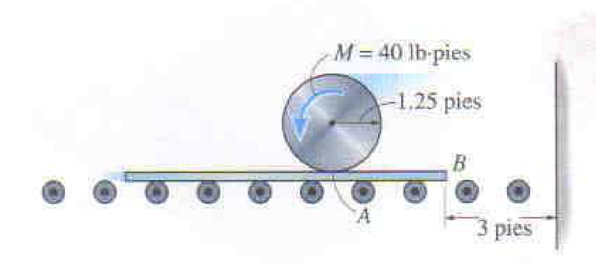

Prob. R2–15

**R2-14.** La placa uniforme pesa 40 lb y está soportada mediante un rodillo colocado en A. Si una fuerza horizontal $F = 70$ lb es aplicada repentinamente al rodillo, determine la aceleración del centro del rodillo en el instante en que la fuerza es aplicada. La placa tiene un momento de inercia con respecto a su centro de masa de $I_G = 0.414$ slug · pie$^2$. Desprecie el peso del rodillo.



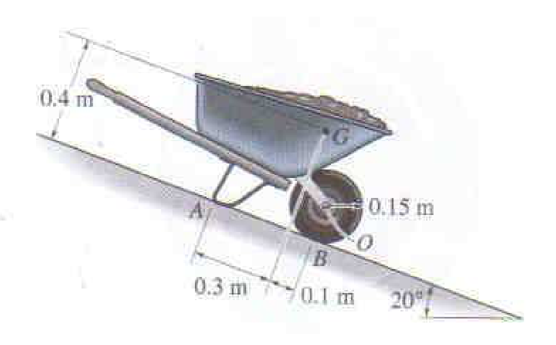

Prob. R2–14

***R2-16.** El cilindro de 15 lb está inicialmente en reposo sobre una placa de 5 lb. Si un momento de par $M = 40$ lb · pie es aplicado al cilindro, determine la aceleración angular del cilindro y el tiempo necesario para que el extremo $B$ de la placa viaje 3 pies y golpee la pared. Suponga que el cilindro no se desliza sobre la placa, y desprecie la masa de los rodillos ubicados debajo de la placa.



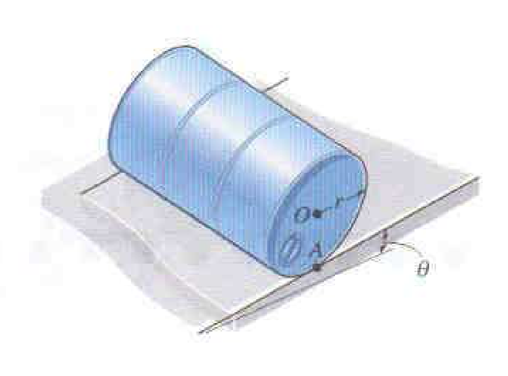

Prob. R2–16

**R2-17.** La carretilla y su contenido tienen masa de 40 kg y centro de masa en $G$, excluyendo la rueda. La rueda tiene masa de 2 kg y radio de giro $k_O = 0.120$ m. Si la carretilla es liberada del reposo en la posición mostrada, determine su rapidez después que viaja 4 m hacia abajo por el plano inclinado. El coeficiente de fricción cinética entre el plano y $A$ es $\mu_A = 0.3$. La rueda gira sin deslizar en el punto $B$.




Prob. R2–17

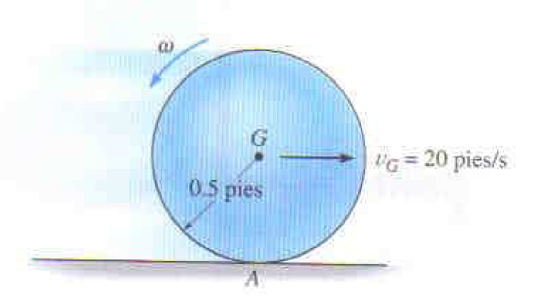
**R2-18.** El tambor de masa $m$, radio $r$ y radio de giro $k_O$, rueda a lo largo de un plano inclinado para el cual el coeficiente de fricción estática es $\mu$. Si el tambor es liberado del reposo, determine el máximo ángulo $\theta$ del plano inclinado de manera que ruede sin deslizar.




Prob. R2–18

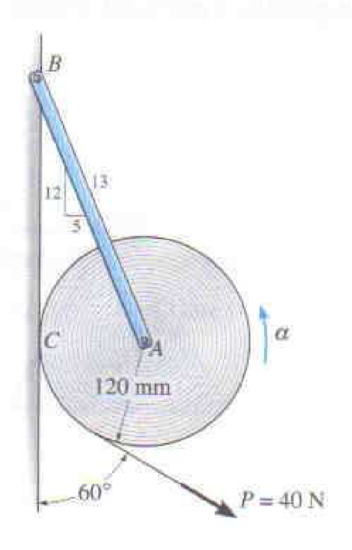
**R2-19.** La bola sólida de 20 lb es lanzada sobre el piso de manera que presenta una rotación inversa $\omega = 15$ rad/s y su centro tiene velocidad horizontal inicial $v_G = 20$ pies/s. Si el coeficiente de fricción cinética entre el piso y la bola es $\mu_A = 0.3$, determine la distancia que viaja ésta antes de dejar de girar.

***R2-20.** Determine el giro inverso $\boldsymbol{\omega}$ que debe darse a la bola de 20 lb de manera que cuando su centro reciba una velocidad horizontal inicial $v_G = 20$ pies/s, deje de girar y trasladarse en el mismo instante. El coeficiente de fricción cinética es $\mu_A = 0.3$.



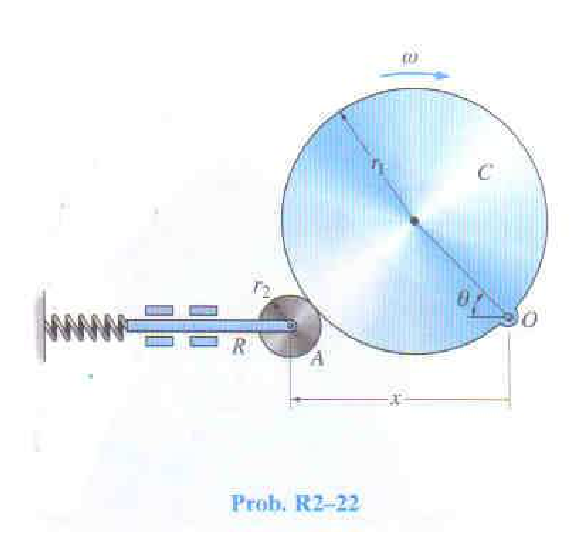

Probs. R2–19/20

**R2-21.** Un rollo de papel de 20 kg, originalmente en reposo, está sostenido por pasadores colocados en sus extremos a la ménsula $AB$. El rollo descansa contra una pared para la cual el coeficiente de fricción cinética en el punto $C$ es $\mu_C = 0.3$. Si una fuerza de 40 N es aplicada uniformemente al extremo de la hoja, determine la aceleración angular inicial del rollo y la tensión en la ménsula al desenrollarse el papel. Para efectuar los cálculos trate al rollo como un cilindro.



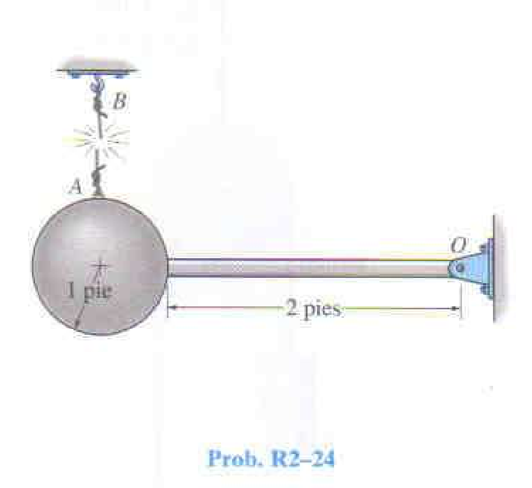

Prob. R2–21

**R2-22.** Calcule la velocidad de la barra $R$ para cualquier ángulo $\theta$ de la leva $C$ si ésta gira con velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$. La conexión de pasador en $O$ no causa ninguna interferencia con el movimiento de $A$ sobre $C$.



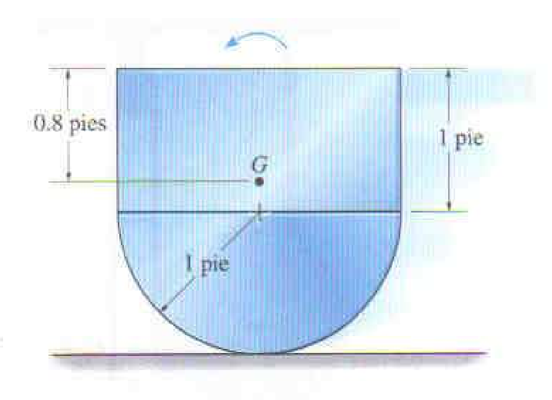

Prob. R2–22

***R2-24.** El péndulo consta de una esfera de 30 lb y de una barra esbelta de 10 lb. Calcule la reacción en el pasador $O$ justo después que se corta la cuerda $AB$.



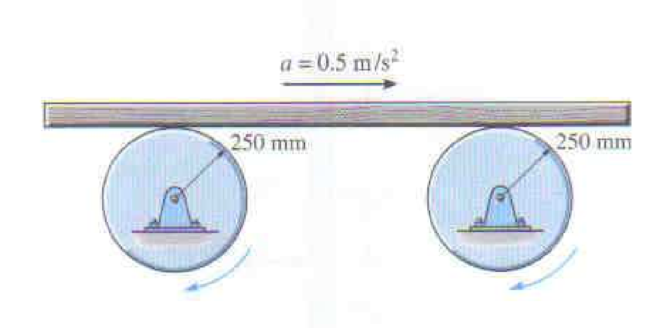

Prob. R2–24

**R2-23.** El conjunto pesa 10 lb y tiene radio de giro $k_G = 0.6$ pies con respecto a su centro de masa $G$. La energía cinética del conjunto es de 31 pies-lb cuando está en la posición mostrada. Si el conjunto rueda en sentido contrario al de las manecillas del reloj sobre la superficie sin deslizar, determine su momentum lineal en este instante.



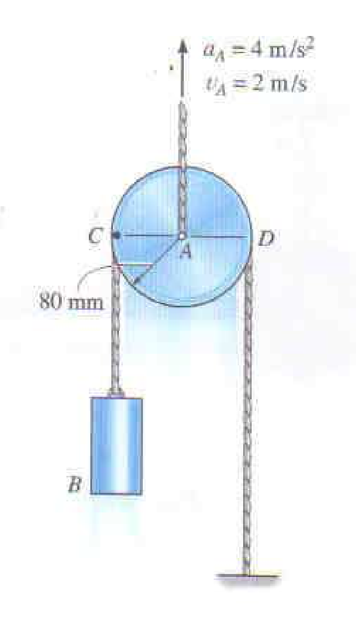

Prob. R2–23

**R2-25.** El tablón descansa sobre la superficie de dos tambores. En el instante mostrado, tiene aceleración de 0.5 $m/s^2$ hacia la derecha mientras que, en el mismo instante, algunos puntos situados sobre el borde externo de cada tambor presentan aceleración con magnitud de 3 $m/s^2$. Si el tablón no se desliza sobre los tambores, determine su rapidez debido al movimiento.



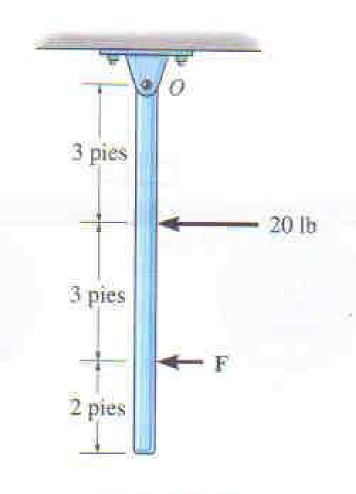

Prob. R2–25

**R2-26.** El centro de la polea está siendo levantado verticalmente con aceleración de 4 m/s$^2$ en el instante que tiene una velocidad de 2 m/s. Si el cable no se desliza sobre la superficie de la polea, determine las aceleraciones del cilindro $B$ y del punto $C$ sobre la polea.



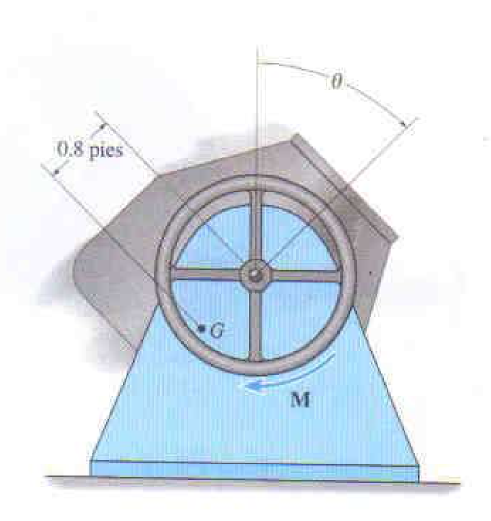

Prob. R2–26

**R2-27.** En el instante mostrado, dos fuerzas actúan sobre la barra esbelta de 30 lb que está articulada en $O$. Determine la magnitud de la fuerza **F** y la aceleración angular inicial de la barra de manera que la reacción horizontal que el *pasador ejerce sobre la barra* sea de 5 lb dirigida hacia la derecha.




Prob. R2–27

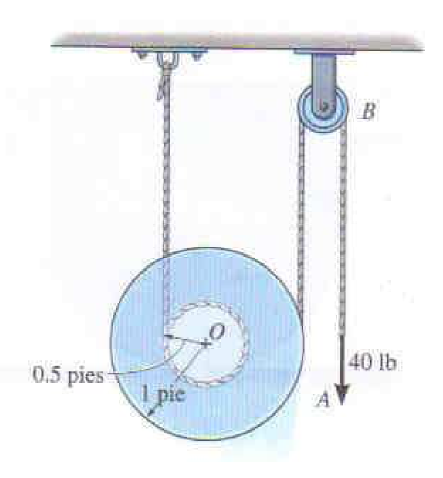
***R2-28.** El barril de la mezcladora tiene un peso de 70 lb y radio de giro $k_G = 1.3$ pies con respecto a su centro de gravedad. Si se aplica una torca constante $M = 60$ lb · pie a la rueda volcadora, determine la velocidad angular del barril cuando ha girado $\theta = 90°$. Originalmente el barril está en reposo cuando $\theta = 0°$.




Prob. R2–28

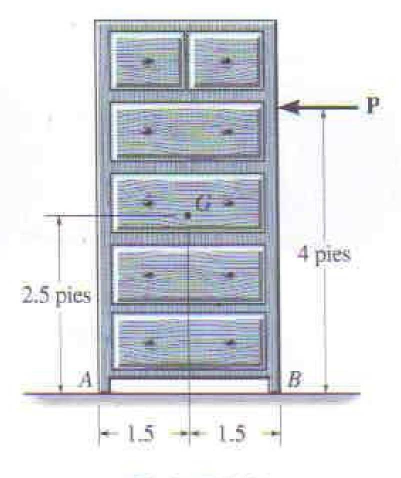
**R2-29.** El carrete tiene un peso de 30 lb y radio de giro $k_O = 0.65$ pies. Si una fuerza de 40 lb es aplicada a la cuerda localizada en $A$, determine la velocidad angular del carrete en $t = 3$ s partiendo del reposo. Desprecie la masa de la polea y la cuerda.

**R2-30.** Resuelva el problema R2-29 si un bloque de 40 lb es suspendido de la cuerda localizada en $A$, en vez de aplicar la fuerza de 40 lb.



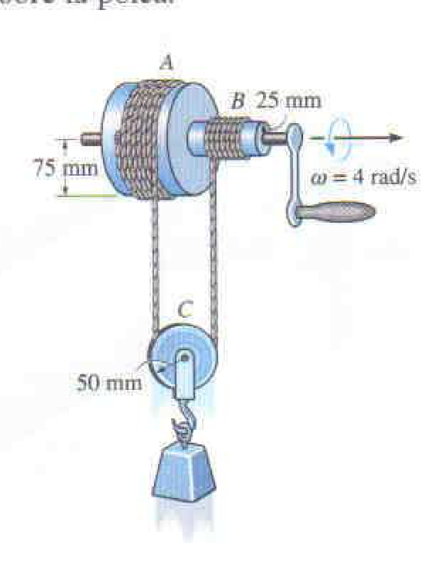

Probs. R2–29/30

**R2-31.** El ropero tiene un peso de 80 lb y es empujado a lo largo del piso. Si el coeficiente de fricción estática en $A$ y $B$ es $\mu_s = 0.3$ y el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.2$, determine la mínima fuerza horizontal $P$ necesaria para que el ropero se mueva. Si esta fuerza es incrementada ligeramente, determine la aceleración del ropero. ¿Cuáles son las reacciones normales en $A$ y $B$ cuando el ropero empieza a moverse?




Prob. R2–31

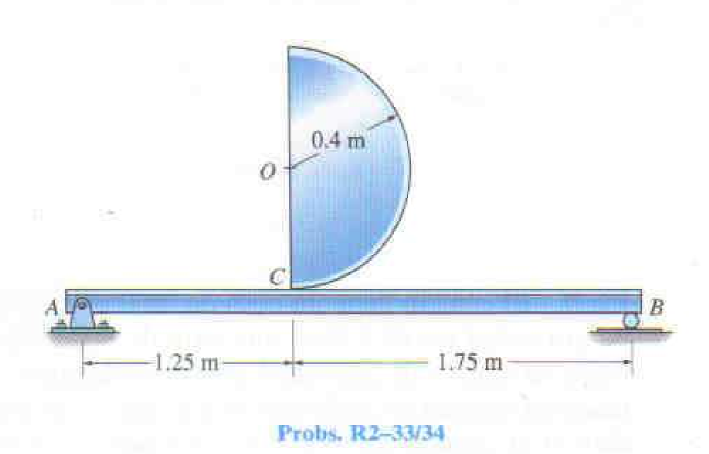
***R2-32.** Cuando la manivela instalada en el malacate chino gira, la cuerda se desenrolla de la flecha $A$ mientras se enrolla sobre la flecha $B$. Determine la rapidez con que el bloque desciende si la manivela está girando con velocidad angular $\omega = 4$ rad/s. ¿Cuál es la velocidad angular de la polea en el punto $C$? Ambos segmentos de cuerda a cada lado de la polea son paralelos y verticales, y la cuerda no se desliza sobre la polea.




Prob. R2–32

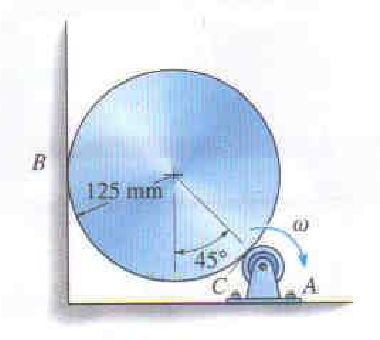
**R2-33.** El disco semicircular tiene masa de 50 kg y es liberado del reposo desde la posición mostrada. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el disco y la viga son $\mu_s = 0.5$ y $\mu_k = 0.3$, respectivamente. Determine las reacciones iniciales en el pasador $A$ y el rodillo $B$ usados para soportar la viga. Desprecie la masa de la viga en el cálculo.

**R2-34.** El disco semicircular tiene masa de 50 kg y es liberado del reposo desde la posición mostrada. Los coeficientes de fricción estática y cinética entre el disco y la viga son $\mu_s = 0.2$ y $\mu_k = 0.1$, respectivamente. Determine las reacciones iniciales en el pasador $A$ y el rodillo $B$ usados para soportar la viga. Desprecie la masa de la viga en el cálculo.



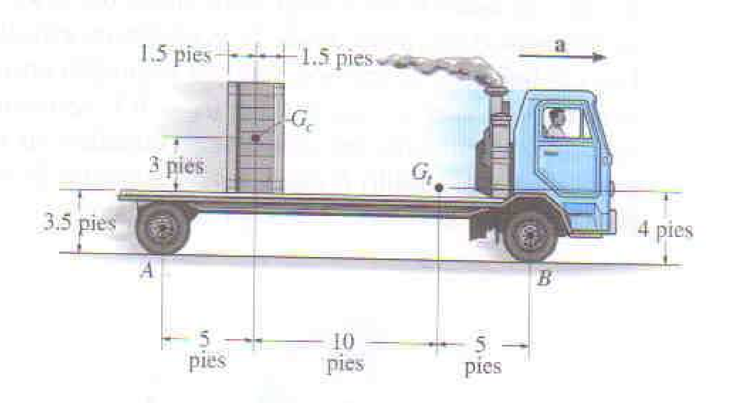

Probs. R2–33/34

**R2-35.** El cilindro con masa de 5 kg está inicialmente en reposo cuando es puesto en contacto con la pared $B$ y el rotor en $A$. Si éste siempre mantiene una velocidad angular constante $\omega = 6$ rad/s en el sentido de las manecillas del reloj, determine la aceleración angular inicial del cilindro. El coeficiente de fricción cinética en las superficies de contacto $B$ y $C$ es $\mu_k = 0.2$.



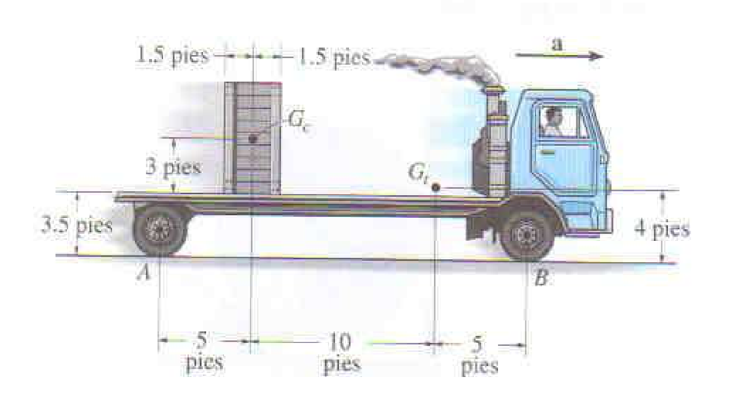

Prob. R2–35

***R2-36.** El camión lleva la caja de 800 lb que tiene su centro de gravedad en $G_c$. Determine la máxima aceleración permisible del camión de manera que la caja no resbale o se vuelque sobre la cama del camión. El coeficiente de fricción estática entre la caja y el camión es $\mu_s = 0.6$.



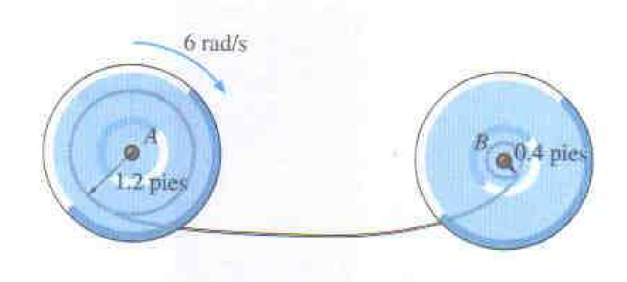

Prob. R2-36

**R2-37.** El camión tiene un peso de 8000 lb y centro de gravedad en $G_t$. Lleva una caja de 800 lb que tiene su centro de gravedad en $G_c$. Determine la reacción normal en *cada uno* de sus cuatro neumáticos si el camión acelera a $a = 0.5$ pies/s$^2$. ¿Cuál es la fuerza de fricción que actúa entre la caja y el camión, y entre *cada uno* de los neumáticos traseros y el pavimento? Suponga que sólo se entrega potencia motriz a las ruedas posteriores. Las ruedas frontales pueden rodar libremente. Desprecie la masa de los neumáticos. La caja no se desliza ni vuelca sobre el camión.



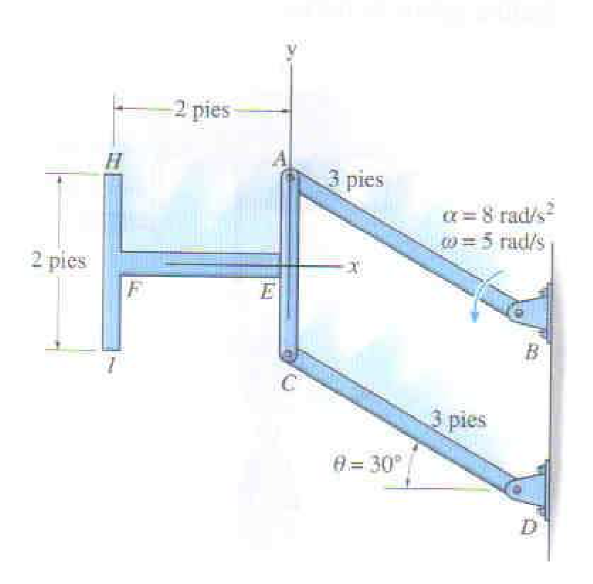

Prob. R2-37

**R2-38.** El carrete $B$ está en reposo y el carrete $A$ gira a 6 rad/s cuando la parte floja de la cuerda que los conecta es tensada. Determine la velocidad angular de cada carrete inmediatamente después que la cuerda queda tensa. Los carretes $A$ y $B$ tienen pesos y radios de giro $W_A = 30$ lb, $k_A = 0.8$ pies y $W_B = 15$ lb, $k_B = 0.6$ pies, respectivamente.



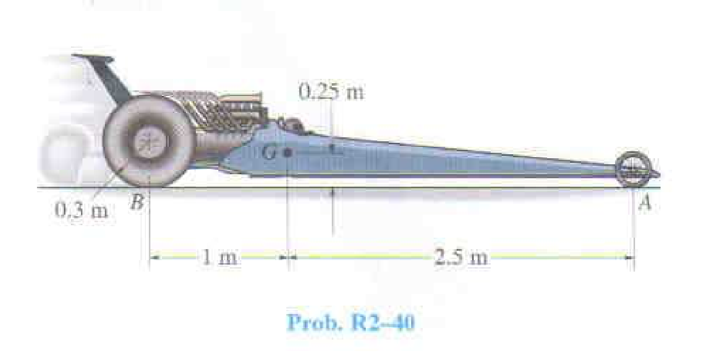

Prob. R2-38

**R2-39.** Las dos barras de 3 lb $EF$ y $HI$ están fijas (soldadas) al eslabón $AC$ en el punto $E$. Determine la fuerza axial interna $E_x$, la fuerza cortante $E_y$, y el momento $M_E$ que la barra $AC$ ejerce sobre $FE$ en $E$ si en el instante $\theta = 30°$ el eslabón $AB$ tiene velocidad angular $\omega = 5$ rad/s y aceleración angular $\alpha = 8$ rad/s$^2$ como se muestra.



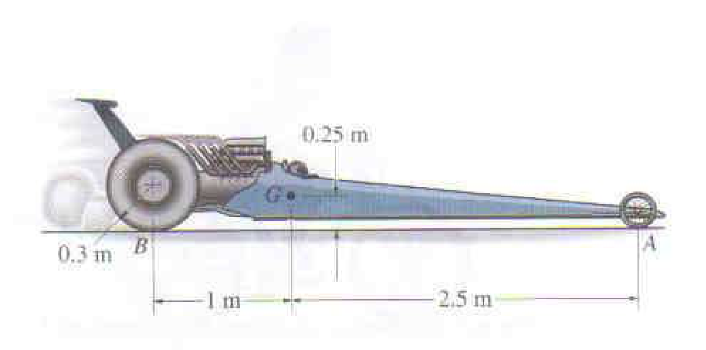

Prob. R2-39

***R2-40.** El automóvil de carreras trucado tiene masa de 1500 kg y centro de masa en $G$. Si el coeficiente de fricción cinética entre las ruedas posteriores y el pavimento es $\mu_k = 0.6$, determine si es posible que el conductor levante las ruedas frontales, $A$, mientras las ruedas posteriores se están deslizando. Si es así, ¿qué aceleración es necesaria para hacerlo? Desprecie la masa de las ruedas y suponga que las ruedas frontales pueden girar libremente.



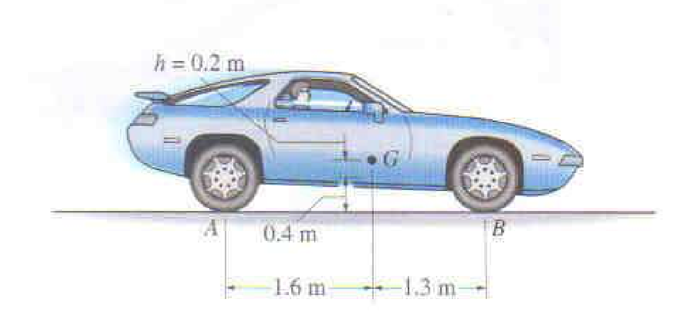

Prob. R2–40

**R2-41.** El automóvil de carreras trucado tiene masa de 1500 kg y centro de masa en $G$. Si no ocurre ningún deslizamiento, determine la fuerza de fricción $F_B$ que debe ser aplicada a *cada una* de las ruedas posteriores $B$ para desarrollar una aceleración $a = 6 \text{ m/s}^2$. ¿Cuáles son las reacciones normales de *cada* rueda sobre el suelo? Desprecie la masa de las ruedas y suponga que las ruedas frontales pueden girar libremente.



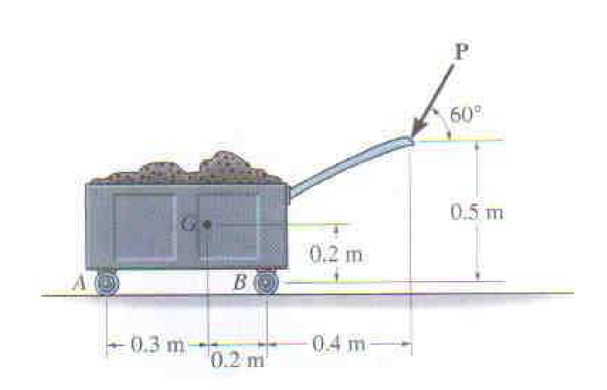

Prob. R2–41

**R2-42.** Al automóvil mostrado de 1.6 Mg se le ha aumentado la altura $h = 0.2$ m de su centro de masa. Esto se hizo elevando los resortes instalados sobre el eje posterior. Si el coeficiente de fricción cinética entre las ruedas traseras y el terreno es $\mu_k = 0.3$, demuestre que el automóvil puede acelerar ligeramente más rápido que su contraparte para la cual $h = 0$. Desprecie la masa de las ruedas y del conductor y suponga que las ruedas frontales en $B$ pueden rodar libremente mientras las ruedas traseras deslizan.



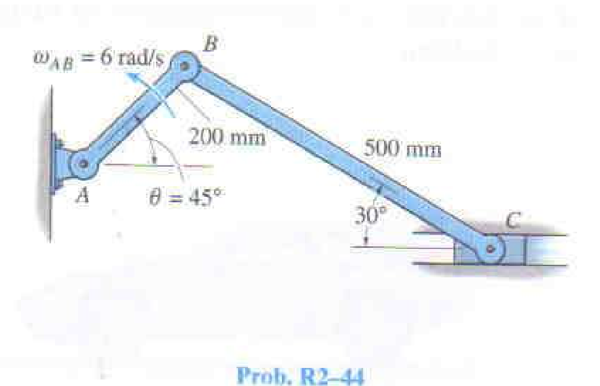

Prob. R2–42

**R2-43.** El carro de mano tiene masa de 200 kg y centro de masa en $G$. Determine las reacciones normales en *cada una* de las ruedas en $A$ y $B$ si una fuerza $P = 50$ N es aplicada al mango. Desprecie la masa y la resistencia al rodamiento de las ruedas.



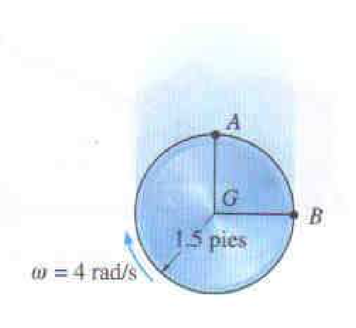

Prob. R2–43

***R2-44.** Si la barra $AB$ tiene velocidad angular $\omega_{AB} = 6$ rad/s, determine la velocidad del bloque deslizable $C$ en el instante mostrado.



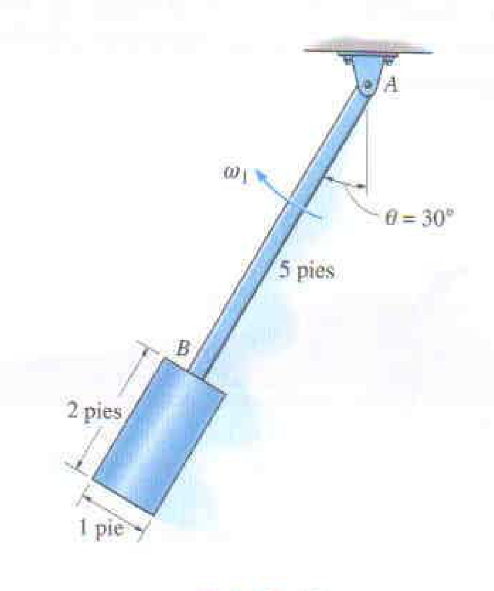

Prob. R2–44

**R2-45.** El disco está girando a razón constante $\omega = 4$ rad/s, y al caer libremente, su centro tiene una aceleración de 32.2 pies/s$^2$. Determine la aceleración de los puntos $A$ y $B$ sobre el borde del disco en el instante mostrado.



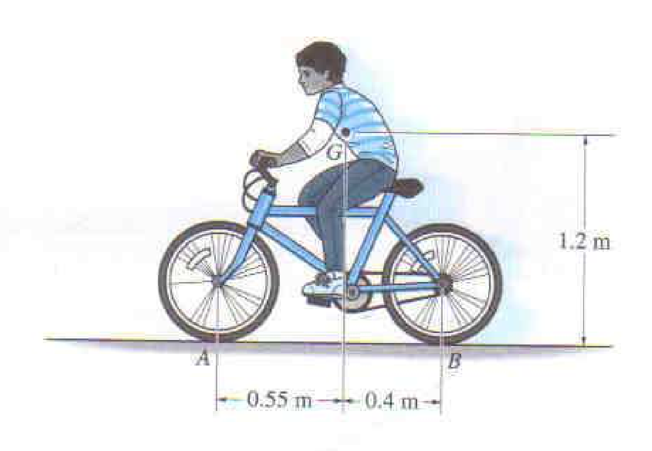

Prob. R2–45

**R2-46.** El cilindro de 80 lb está unido a la barra esbelta de 10 lb que se encuentra articulada en el pasador $A$. En el instante $\theta = 30°$, la barra tiene velocidad angular $\omega_1 = 1$ rad/s como se muestra. Determine el máximo ángulo $\theta$ que la barra oscila antes de detenerse momentáneamente.



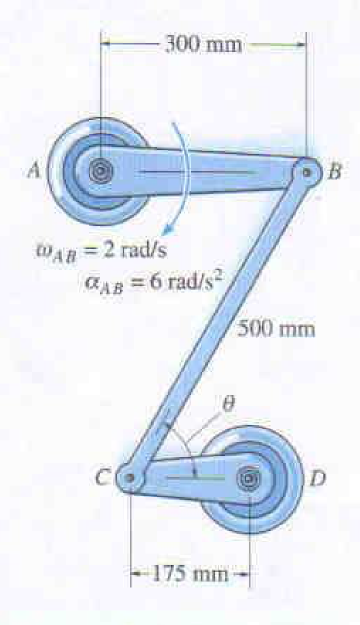

Prob. R2–46

**R2-47.** La bicicleta y el ciclista tienen masa de 80 kg con centro de masa ubicado en $G$. Si el coeficiente de fricción cinética en la rueda posterior es $\mu_B = 0.8$, determine las reacciones normales en las ruedas $A$ y $B$, y la desaceleración del ciclista, cuando la rueda trasera se traba para frenar. ¿Cuál es la reacción normal en la rueda trasera cuando la bicicleta está viajando a velocidad constante y los frenos no son aplicados? Desprecie la masa de las ruedas.




Prob. R2–47

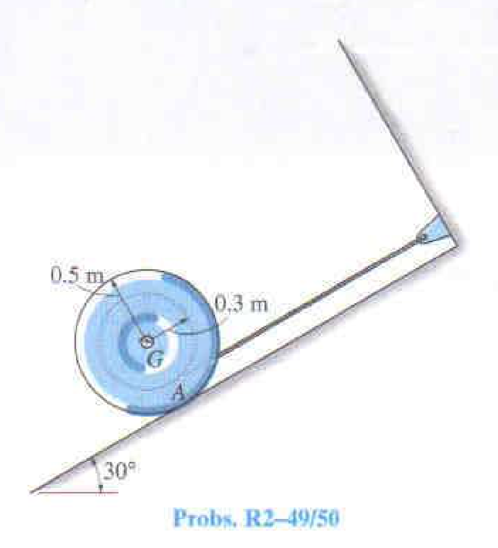
*R2-48. En el instante mostrado, el eslabón $AB$ tiene velocidad angular $\omega_{AB} = 2$ rad/s y aceleración angular $\alpha_{AB} = 6$ rad/s$^2$. Determine la aceleración del pasador en $C$ y la aceleración del eslabón $CB$ en este instante, cuando $\theta = 60°$.




Prob. R2–48

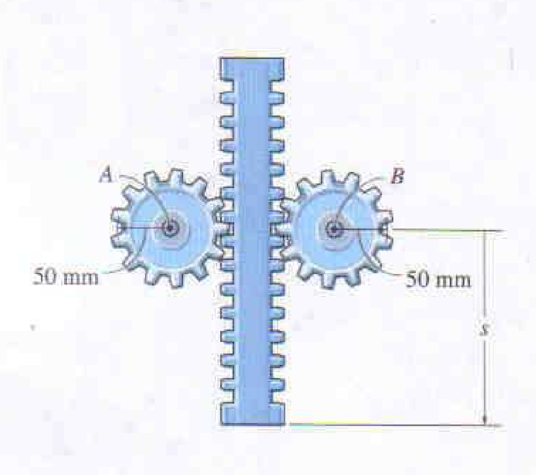
R2-49. El carrete tiene masa de 60 kg y radio de giro $k_G = 0.3$ m. Si es liberado del reposo, determine cuánto desciende por el plano liso antes de alcanzar una velocidad angular $\omega = 6$ rad/s. Desprecie la fricción y la masa de la cuerda que está enrollada alrededor del núcleo central.

R2-50. Resuelva el problema R2-49 si el plano es rugoso, de tal manera que el coeficiente de fricción cinética en $A$ es $\mu_A = 0.2$.



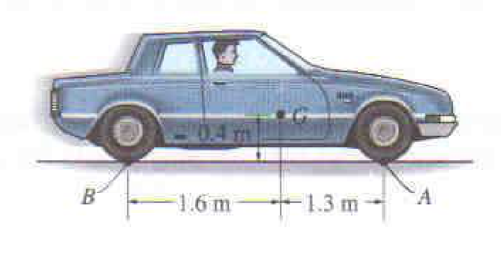

Probs. R2–49/50

R2-51. La cremallera tiene masa de 6 kg, y los engranes tienen masa de 4 kg cada uno y radio de giro $k = 30$ mm en sus centros. Si la cremallera se mueve originalmente hacia abajo a 2 m/s, cuando $s = 0$, determine la rapidez de la cremallera cuando $s = 600$ mm. Los engranes pueden girar libremente alrededor de sus centros, $A$ y $B$.

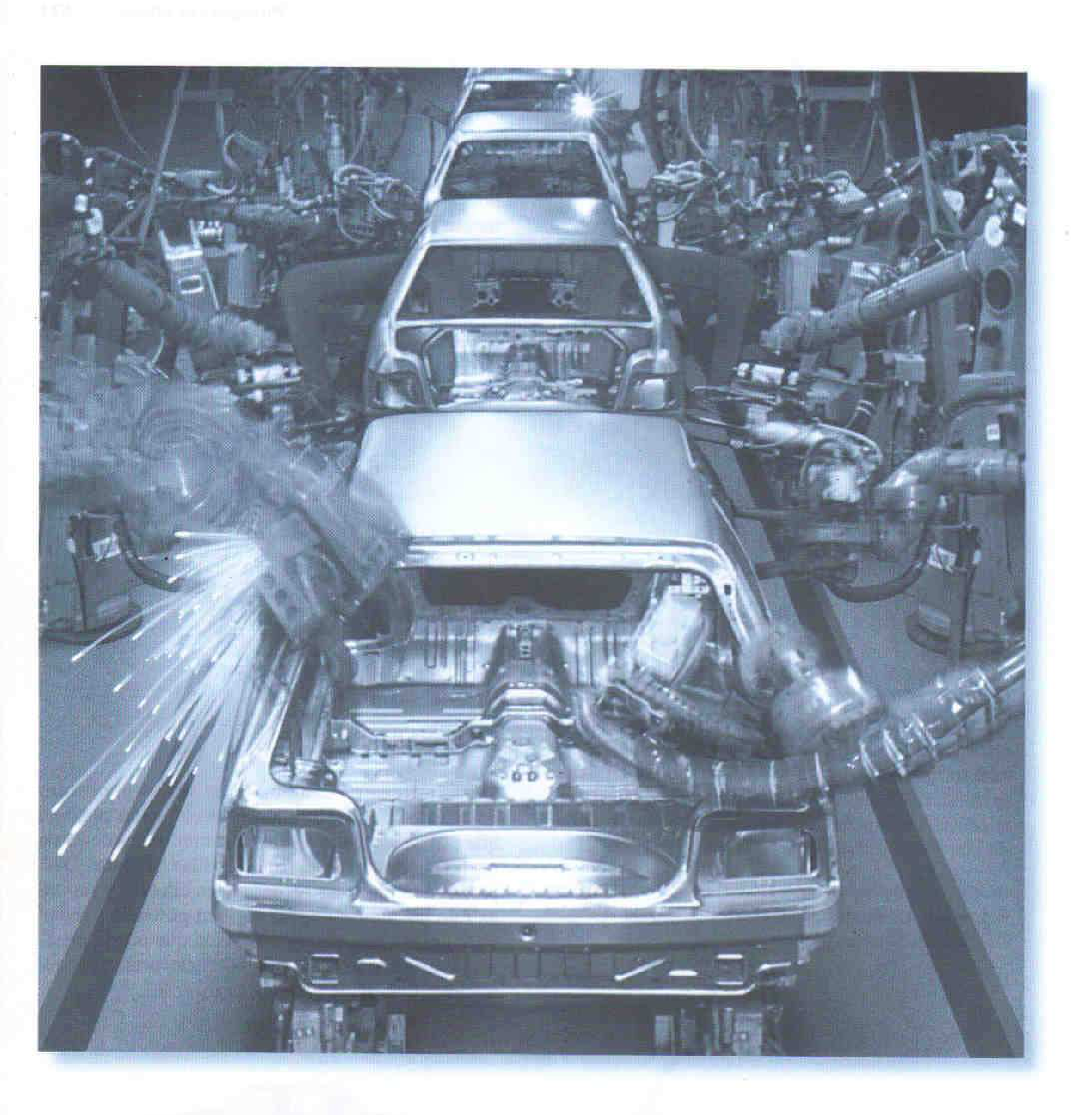



Prob. R2–51

*R2-52. El carro tiene masa de 1.50 Mg y centro de masa en $G$. Determine la aceleración máxima que puede alcanzar si sólo se suministra potencia a (a) las ruedas traseras, (b) las ruedas frontales. Desprecie la masa de las ruedas en los cálculos, y suponga que las ruedas que no reciben potencia pueden girar libremente. Suponga también que ocurre deslizamiento de las ruedas con potencia, donde el coeficiente de fricción cinética es $\mu_k = 0.3$.




Prob. R2–52



El movimiento tridimensional de estos robots industriales usados en la fabricación de automóviles debe ser programado con precisión.

CAPÍTULO 20

# Cinemática tridimensional de un cuerpo rígido

## OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Analizar la cinemática de un cuerpo sometido a rotación con respecto a un eje fijo y a movimiento plano general.
- Proporcionar un análisis de movimiento relativo de un cuerpo rígido usando ejes en traslación y en rotación.

## 20.1 Rotación con respecto a un punto fijo

Cuando un cuerpo rígido gira con respecto a un punto fijo, la distancia $r$ desde el punto hasta una partícula $P$ ubicada sobre el cuerpo es la *misma* para *cualquier posición* del cuerpo. Entonces, la trayectoria de movimiento para la partícula se encuentra sobre la *superficie de una esfera* con radio $r$ y centro en el punto fijo. Como el movimiento a lo largo de esta trayectoria ocurre sólo a partir de una serie de rotaciones ocurridas durante un intervalo de tiempo finito, primero desarrollaremos cierta familiaridad con algunas propiedades de los desplazamientos rotatorios.



El aguilón puede girar hacia arriba y hacia abajo, y como está articulado en un punto sobre el eje vertical alrededor del cual gira, se encuentra sometido a rotación con respecto a un punto fijo.

**Teorema de Euler.** El teorema de Euler establece que dos rotaciones "componentes" con respecto a ejes diferentes que pasan por un punto son equivalentes a una sola rotación resultante con respecto a un eje que pasa por el punto. Si son aplicadas más de dos rotaciones, pueden ser combinadas en pares y cada par, a su vez, reducirse adicionalmente para combinarlo en una rotación.

**Rotaciones finitas** Si las rotaciones componentes usadas en el teorema de Euler son *finitas*, es importante que se mantenga el *orden* en que se aplican. Esto es porque las rotaciones finitas *no* obedecen la ley de la suma vectorial, y por ello no pueden ser clasificadas como cantidades vectoriales. Para mostrar esto, considere las dos rotaciones finitas $\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2$ aplicadas al bloque mostrado en la figura 20-1*a*. Cada rotación tiene magnitud de 90° y dirección definida por la regla de la mano derecha, como indican las flechas. La orientación resultante del bloque se muestra a la derecha. Cuando estas dos rotaciones son aplicadas en el orden $\boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{\theta}_1$, como puede apreciarse en la figura 20-1*b*, la posición resultante del bloque *no* es la misma que la de la figura 20-1*a*. En consecuencia, las *rotaciones finitas* no obedecen la ley conmutativa de la suma $\boldsymbol{\theta}_1 + \boldsymbol{\theta}_2 \neq \boldsymbol{\theta}_2 + \boldsymbol{\theta}_1$, y por tanto *no pueden ser clasificadas como vectores*. Si se hubiesen usado rotaciones más pequeñas pero finitas para ilustrar este punto, por ejemplo, 10° en vez de 90°, la orientación *resultante* del bloque después de cada combinación de rotaciones sería también diferente; sin embargo, en este caso la diferencia sería sólo una cantidad pequeña.

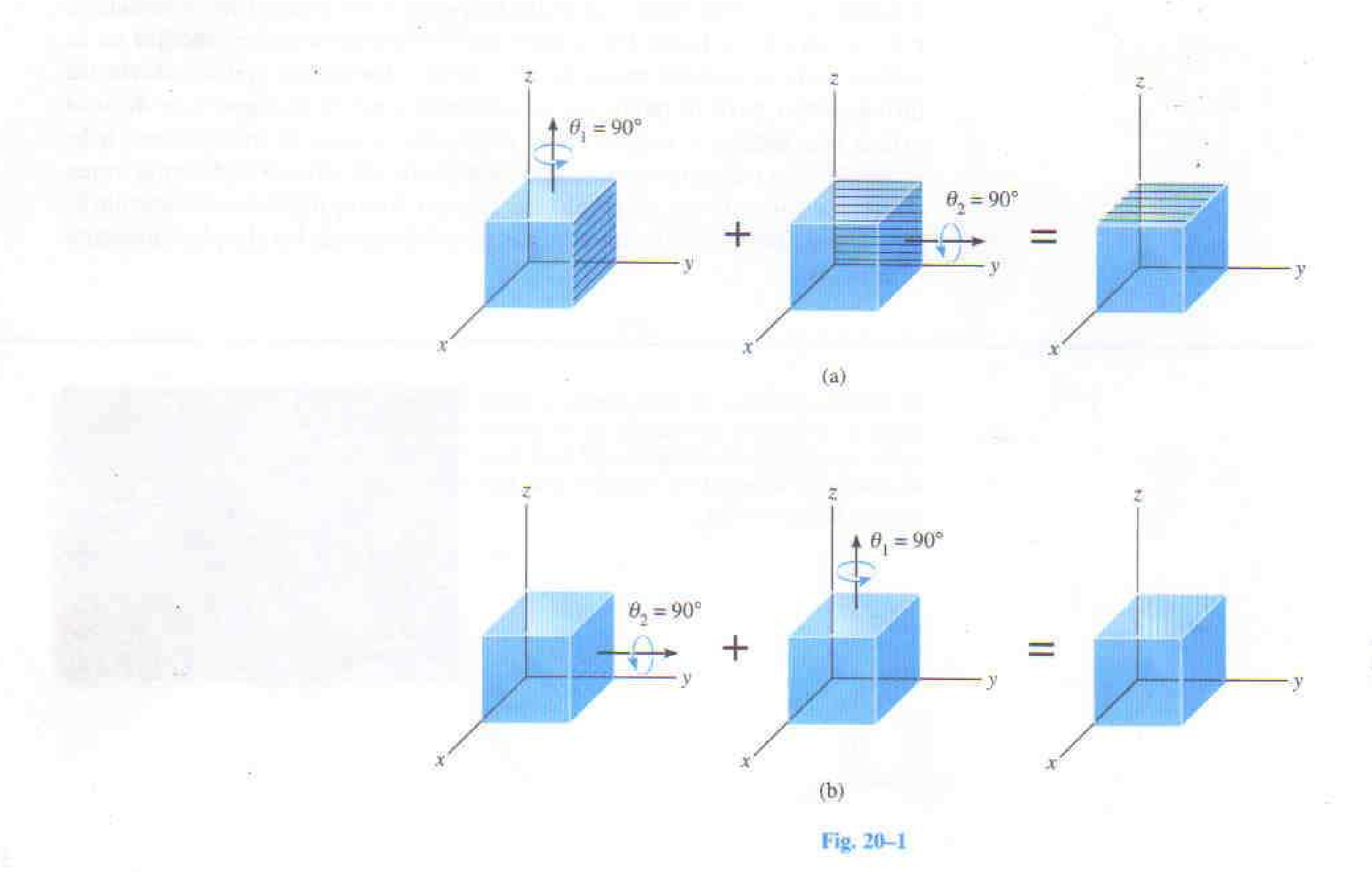
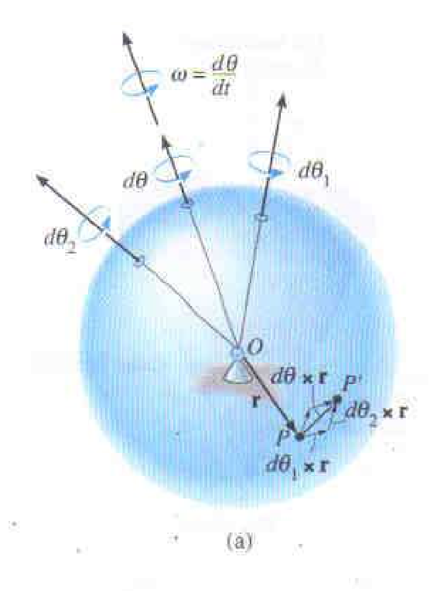



Fig. 20–1

**Rotaciones infinitesimales.** Al definir los movimientos angulares de un cuerpo sometido a movimiento tridimensional, sólo serán consideradas rotaciones que sean *infinitesimalmente pequeñas. Tales rotaciones pueden ser clasificadas como vectores, ya que es posible sumarlas vectorialmente de cualquier manera*. Para mostrar esto, simplemente consideremos que el cuerpo rígido es una esfera a la que se le permite girar con respecto a su punto fijo central $O$, figura 20-2*a*. Si imponemos al cuerpo dos rotaciones infinitesimales $d\boldsymbol{\theta}_1 + d\boldsymbol{\theta}_2$, puede verse que el punto $P$ se mueve a lo largo de la trayectoria $d\boldsymbol{\theta}_1 \times \mathbf{r} + d\boldsymbol{\theta}_2 \times \mathbf{r}$ y termina en $P'$. Si las dos rotaciones sucesivas hubiesen ocurrido en el orden $d\boldsymbol{\theta}_2 + d\boldsymbol{\theta}_1$, entonces los desplazamientos resultantes de $P$ habrían sido $d\boldsymbol{\theta}_2 \times \mathbf{r} + d\boldsymbol{\theta}_1 \times \mathbf{r}$. Como el producto vectorial cruz obedece la ley distributiva, por comparación $(d\boldsymbol{\theta}_1 + d\boldsymbol{\theta}_2) \times \mathbf{r} = (d\boldsymbol{\theta}_2 + d\boldsymbol{\theta}_1) \times \mathbf{r}$. Aquí las rotaciones infinitesimales $d\boldsymbol{\theta}$ son vectores, ya que estas cantidades tienen magnitud y dirección para las cuales el orden de la suma (vectorial) no es importante, esto es, $d\boldsymbol{\theta}_1 + d\boldsymbol{\theta}_2 = d\boldsymbol{\theta}_2 + d\boldsymbol{\theta}_1$. Además, como se muestra en la figura 20-2*a*, las dos rotaciones "componentes" $d\boldsymbol{\theta}_1$ y $d\boldsymbol{\theta}_2$ son equivalentes a una sola rotación resultante $d\boldsymbol{\theta} = d\boldsymbol{\theta}_1 + d\boldsymbol{\theta}_2$, lo que es consecuencia del teorema de Euler.

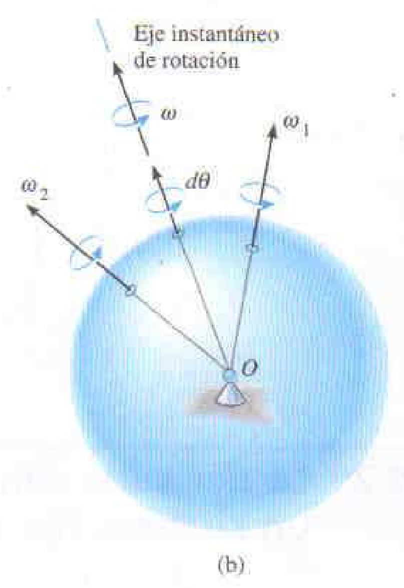


(a)

**Velocidad angular.** Si el cuerpo está sometido a una rotación angular $d\boldsymbol{\theta}$ con respecto a un punto fijo, la velocidad angular del cuerpo es definida mediante la derivada con respecto al tiempo,

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\boldsymbol{\theta}} \tag{20–1}$$

A la línea que especifica la dirección de $w$, la cual es colineal con $d\boldsymbol{\theta}$, se le llama *eje instantáneo de rotación*, figura 20-2*b*. En general, este eje cambia de dirección durante cada instante. Como $d\boldsymbol{\theta}$ es una cantidad vectorial, lo es también $\boldsymbol{\omega}$, y se infiere de la suma vectorial que si el cuerpo está sometido a dos componentes de movimiento angular, $\boldsymbol{\omega}_1 = \dot{\boldsymbol{\theta}}_1$ y $\boldsymbol{\omega}_2 = \dot{\boldsymbol{\theta}}_2$, la velocidad angular resultante es $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$.



(b)

**Fig. 20–2**

**Aceleración angular.** La aceleración angular del cuerpo se determina a partir de la derivada con respecto al tiempo de la velocidad angular, esto es,

$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}} \tag{20–2}$$

Para movimiento con respecto a un punto fijo, $\boldsymbol{\alpha}$ debe tomar en cuenta *tanto* el cambio de magnitud *como* el de dirección de $\boldsymbol{\omega}$, por lo que, en general, $\boldsymbol{\alpha}$ no está dirigida a lo largo del eje instantáneo de rotación, figura 20-3.

Como la dirección del eje instantáneo de rotación (o la línea de acción de $\boldsymbol{\omega}$) cambia en el espacio, el lugar geométrico de los puntos definidos por el eje crea un *cono espacial* fijo. Si el cambio en este eje es visto con respecto al cuerpo rotatorio, el lugar geométrico del eje crea un *cono de cuerpo*, figura 20-4. En cualquier instante dado, estos conos son tangentes

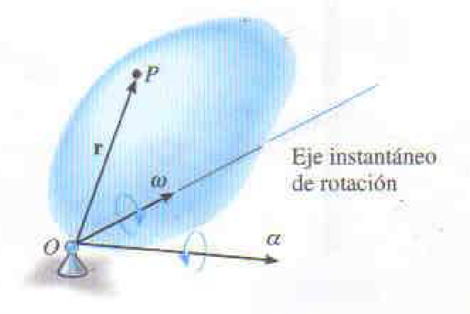


**Fig. 20–3**

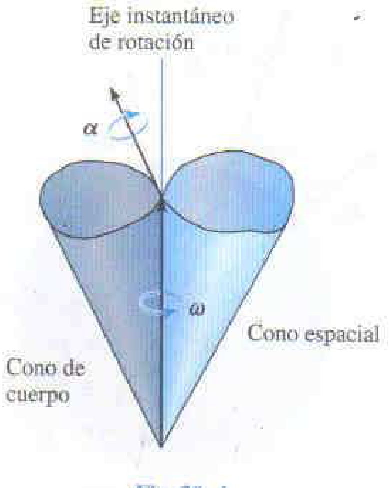



Fig. 20–4

a lo largo del eje instantáneo de rotación, y cuando el cuerpo está en movimiento, el cono de cuerpo parece rodar sobre la superficie interior o exterior del cono espacial fijo. Siempre que las trayectorias definidas por los extremos abiertos de los conos son descritas mediante la cabeza del vector $\boldsymbol{\omega}$, $\boldsymbol{\alpha}$ debe actuar tangente a estas trayectorias en cualquier instante dado, ya que la razón de cambio con respecto al tiempo de $\boldsymbol{\omega}$ es igual a $\boldsymbol{\alpha}$, figura 20-4.

**Velocidad.** Una vez especificada $\boldsymbol{\omega}$, la velocidad de cualquier punto $P$ sobre un cuerpo girando con respecto a un punto fijo puede ser determinada usando los mismos métodos que para un cuerpo que gire con respecto a un eje fijo (sección 16.3). Así, por el producto cruz,

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} \qquad (20\text{–}3)$$

Aquí $\mathbf{r}$ define la posición de $P$ medida desde el punto fijo $O$, figura 20-3.

**Aceleración.** Si $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ son conocidas en un instante dado, la aceleración de cualquier punto $P$ sobre el cuerpo puede ser obtenida por diferenciación con respecto al tiempo de la ecuación 20-3, lo cual resulta en

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) \qquad (20\text{–}4)$$

La forma de esta ecuación es la misma que la desarrollada en la sección 16.3, la cual define la aceleración de un punto ubicado sobre un cuerpo sometido a rotación con respecto a un eje fijo.

## *20.2 La derivada con respecto al tiempo de un vector medido desde un sistema fijo o rotatorio en traslación

En muchos tipos de problemas que implican el movimiento de un cuerpo con respecto a un punto fijo, la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ es especificada en términos de sus movimientos componentes angulares. Por ejemplo, el disco mostrado en la figura 20-5 gira con respecto al eje horizontal $y$ a $\boldsymbol{\omega}_s$ mientras que rota o precesa con respecto al eje vertical $z$ a $\boldsymbol{\omega}_p$. Por tanto, su velocidad angular resultante es $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_s + \boldsymbol{\omega}_p$. Si la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}}$ de un cuerpo con tal forma debe ser determinada, a veces es más fácil calcular la derivada con respecto al tiempo de $\boldsymbol{\omega}$ usando un sistema coordenado que tenga *rotación* definida mediante una o más de las componentes de $\boldsymbol{\omega}$.* Por esta razón, y para usos posteriores, derivaremos ahora una ecuación que relaciona la derivada con respecto al tiempo de cualquier vector $\mathbf{A}$ definida desde un marco de referencia en traslación y rotación a su derivada con respecto al tiempo definida desde una referencia fija.

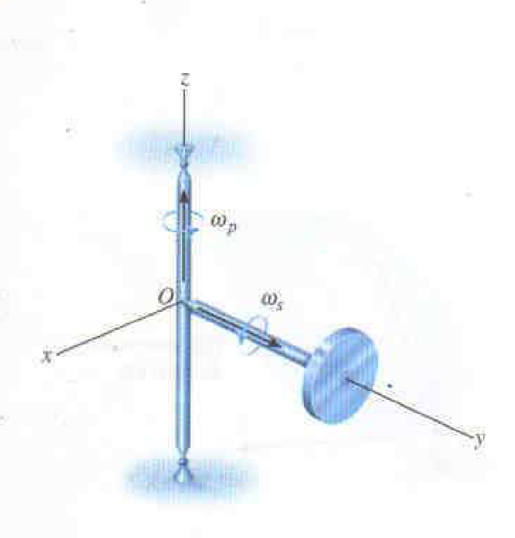



Fig. 20–5

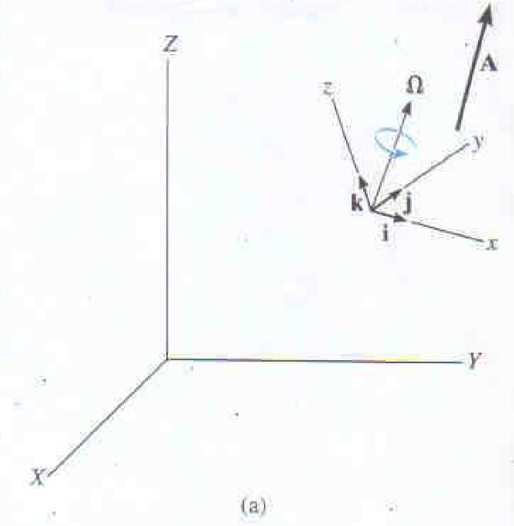
*En el caso del disco giratorio, figura 20-5, a los ejes $x$, $y$, $z$ se les puede imprimir una velocidad angular de $\boldsymbol{\omega}_p$.

Considere que los ejes $x, y, z$ del marco de referencia móvil tienen una velocidad angular $\mathbf{\Omega}$ medida desde los ejes fijos $X, Y, Z$, figura 20-6*a*. En el siguiente análisis será conveniente expresar el vector $\mathbf{A}$ en términos de sus componentes $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, las cuales definen las direcciones de los ejes móviles. Por consiguiente,

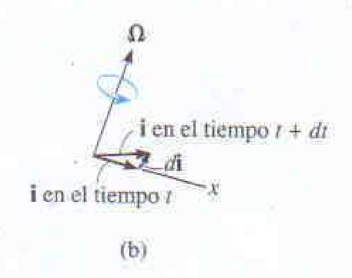
$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k}$$

En general, la derivada con respecto al tiempo de $\mathbf{A}$ debe tomar en cuenta el cambio *tanto* en magnitud *como* en dirección del vector. Sin embargo, si esta derivada se toma *con respecto al marco de referencia móvil*, debe considerarse sólo un cambio en las magnitudes de las componentes de $\mathbf{A}$, ya que las direcciones de las componentes no cambian con respecto a la referencia móvil. Por consiguiente,

$$(\dot{\mathbf{A}})_{xyz} = \dot{A}_x\mathbf{i} + \dot{A}_y\mathbf{j} + \dot{A}_z\mathbf{k} \tag{20–5}$$




(a)




(b)

**Fig. 20–6**

Cuando la derivada con respecto al tiempo de $\mathbf{A}$ se toma *con respecto al marco fijo de referencia*, las *direcciones* de $\mathbf{i}, \mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ sólo cambian debido a la *rotación* $\mathbf{\Omega}$ de los ejes y no a su traslación. Por ello, en general,

$$\dot{\mathbf{A}} = \dot{A}_x\mathbf{i} + \dot{A}_y\mathbf{j} + \dot{A}_z\mathbf{k} + A_x\dot{\mathbf{i}} + A_y\dot{\mathbf{j}} + A_z\dot{\mathbf{k}}$$

Consideraremos ahora las derivadas con respecto al tiempo de los vectores unitarios. Por ejemplo, $\dot{\mathbf{i}} = d\mathbf{i}/dt$ representa sólo un cambio en la *dirección* de $\mathbf{i}$ con respecto al tiempo, ya que $\mathbf{i}$ tiene magnitud fija de 1 unidad. Como se muestra en la figura 20-6*b*, el cambio, $d\mathbf{i}$, es *tangente a la trayectoria* descrita por la cabeza de flecha de $\mathbf{i}$ cuando $\mathbf{i}$ se mueve debido a la rotación $\mathbf{\Omega}$. Por tanto, para tomar en cuenta la magnitud y la dirección de $d\mathbf{i}$, podemos definir $\dot{\mathbf{i}}$ usando el producto cruz, $\dot{\mathbf{i}} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{i}$. En general,

$$\dot{\mathbf{i}} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{i} \qquad \dot{\mathbf{j}} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{j} \qquad \dot{\mathbf{k}} = \mathbf{\Omega} \times \mathbf{k}$$

Estas formulaciones fueron desarrolladas también en la sección 16.8, considerando el movimiento plano de los ejes. Sustituyendo los resultados en la ecuación anterior y usando la ecuación 20-5, obtenemos

$$\dot{\mathbf{A}} = (\dot{\mathbf{A}})_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{A} \tag{20–6}$$

Este resultado es muy importante y será usado en toda la sección 20.4 y en el capítulo 21. Establece que la derivada con respecto al tiempo de *cualquier vector* $\mathbf{A}$ tal como es observado desde el marco fijo de referencia $X, Y, Z$ es igual a la razón de cambio con respecto al tiempo de $\mathbf{A}$ como es observado desde el marco $x, y, z$ de traslación y rotatorio, ecuación 20-5, más $\mathbf{\Omega} \times \mathbf{A}$, el cambio de $\mathbf{A}$ causado por la rotación del marco $x, y, z$. Como resultado, la ecuación 20-6 debe ser usada siempre que $\mathbf{\Omega}$ genere un cambio en la dirección de $\mathbf{A}$ como se aprecia desde la referencia $X, Y, Z$. Si este cambio no ocurre, esto es, $\mathbf{\Omega} = \mathbf{0}$, entonces $\dot{\mathbf{A}} = (\dot{\mathbf{A}})_{xyz}$ y la razón de cambio con respecto al tiempo de $\mathbf{A}$ como es observado desde ambos sistemas coordenados será *la misma*.

EJEMPLO 20.1

El disco mostrado en la figura 20-7*a* está girando con respecto a su eje horizontal a velocidad angular constante $\omega_s = 3$ rad/s, mientras que la plataforma horizontal sobre la cual el disco está montado se encuentra rotando con respecto al eje vertical a razón constante $\omega_p = 1$ rad/s. Determine la aceleración angular del disco y la velocidad y la aceleración del punto $A$ sobre éste cuando el disco se encuentra en la posición mostrada.

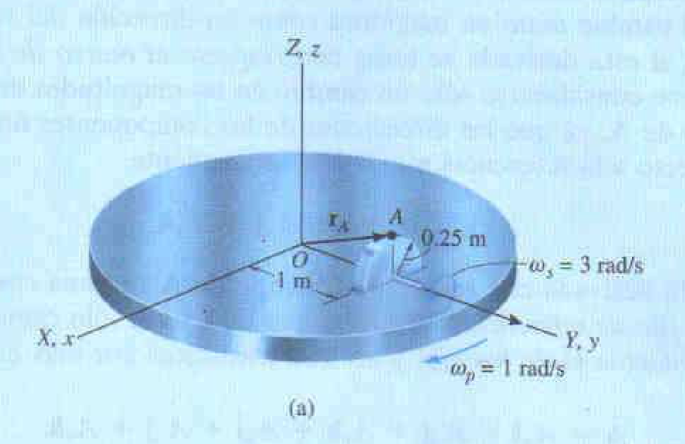



Fig. 20-7

## Solución

El punto $O$ representa un punto fijo de rotación para el disco si se considera una extensión hipotética del disco a este punto. Para determinar la velocidad y la aceleración del punto $A$, es necesario calcular primero las resultantes de velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ y de aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del disco, ya que estos vectores se usan en las ecuaciones 20-3 y 20-4.

***Velocidad angular.*** La velocidad angular, que se mide desde $X$, $Y$, $Z$, es simplemente la suma vectorial de los dos movimientos componentes. Entonces,

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_s + \boldsymbol{\omega}_p = \{3\mathbf{j} - 1\mathbf{k}\} \text{ rad/s}$$

A primera vista, no parece que el disco esté realmente rotando con esta velocidad angular, ya que por lo general es más difícil imaginar la resultante de movimientos angulares que la de movimientos lineales. Para entender mejor el movimiento angular, considere al disco siendo reemplazado por un cono (un cono de cuerpo) que esté rodando sobre el cono espacial estacionario, figura 20-7*b*. El eje instantáneo de rotación está ubicado a lo largo de la línea de contacto de los conos. Este eje define la dirección de la resultante $\boldsymbol{\omega}$ que tiene componentes $\boldsymbol{\omega}_s$ y $\boldsymbol{\omega}_p$.

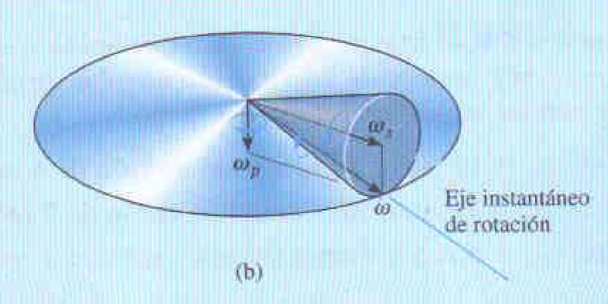



Fig. 20-7B

*Aceleración angular.* Como la magnitud de $\boldsymbol{\omega}$ es constante, sólo un cambio en su dirección, como es visto desde una referencia fija, genera la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del disco. Una manera de obtener $\boldsymbol{\alpha}$ es calculando la derivada con respecto al tiempo *de cada una de las dos componentes* de $\boldsymbol{\omega}$ mediante la ecuación 20-6. En el instante mostrado en la figura 20-7$a$, imagine que los ejes $X$, $Y$, $Z$ fijos coinciden con un marco rotatorio $x$, $y$, $z$. Si se elige que el marco rotatorio $x$, $y$, $z$ tenga velocidad angular $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_p = \{-1\mathbf{k}\}$ rad/s, entonces $\boldsymbol{\omega}_s$ estará dirigida *siempre* a lo largo del eje $y$ (no del $Y$), y la razón de cambio con respecto al tiempo de $\boldsymbol{\omega}_s$ *como es vista desde* $x$, $y$, $z$ *es cero*; esto es, $(\dot{\boldsymbol{\omega}}_s)_{xyz} = \mathbf{0}$ (la magnitud y la dirección de $\boldsymbol{\omega}_s$ son constantes). Entonces, por la ecuación 20-6,

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_s = (\dot{\boldsymbol{\omega}}_p)_{xyz} + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_s = \mathbf{0} + (-1\mathbf{k}) \times (3\mathbf{j}) = \{3\mathbf{i}\} \text{ rad/s}^2$$

Con la misma selección de rotación de ejes, $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_p$, o incluso con $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$, la derivada con respecto al tiempo $(\dot{\boldsymbol{\omega}}_p)_{xyz} = \mathbf{0}$, ya que $\boldsymbol{\omega}_p$ tiene magnitud y dirección constantes. Por consiguiente,

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_s = (\dot{\boldsymbol{\omega}}_p)_{xyz} + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_p = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0}$$

La aceleración angular del disco es, por tanto,

$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_s + \dot{\boldsymbol{\omega}}_p = \{3\mathbf{i}\} \text{ rad/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

*Velocidad y aceleración.* Como $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$ ya han sido determinadas, la velocidad y la aceleración del punto $A$ pueden ser calculadas usando las ecuaciones 20-3 y 20-4. Observando que $\mathbf{r}_A = \{1\mathbf{j} + 0.25\mathbf{k}\}$ m, figura 20-7$a$, tenemos

$$\mathbf{v}_A = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_A = (3\mathbf{j} - 1\mathbf{k}) \times (1\mathbf{j} + 0.25\mathbf{k}) = \{1.75\mathbf{i}\} \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}_A &= \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_A) \\
&= (3\mathbf{i}) \times (1\mathbf{j} + 0.25\mathbf{k}) + (3\mathbf{j} - 1\mathbf{k}) \times [(3\mathbf{j} - 1\mathbf{k}) \times (1\mathbf{j} + 0.25\mathbf{k})] \\
&= \{-2.50\mathbf{j} - 2.25\mathbf{k}\} \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}
\end{aligned}$$

## EJEMPLO 20.2

En el instante $\theta = 60°$, el trompo giroscópico que aparece en la figura 20-8 tiene tres componentes de movimiento angular dirigidas como se muestra y con las magnitudes definidas como:

*giro:* $\omega_s = 10$ rad/s, aumentando a razón de 6 rad/s$^2$

*nutación:* $\omega_n = 3$ rad/s, aumentando a razón de 2 rad/s$^2$

*precesión:* $\omega_p = 5$ rad/s, aumentando a razón de 4 rad/s$^2$

Determine la velocidad angular y la aceleración angular del trompo.

Fig. 20–8

### Solución

**Velocidad angular.** El trompo está girando con respecto al punto fijo $O$. Si los marcos fijo y rotatorio coinciden en el instante mostrado, entonces la velocidad angular puede ser expresada en términos de las componentes **i**, **j**, **k**, asociadas al marco $x$, $y$, $z$; es decir,

$$\boldsymbol{\omega} = -\omega_n\mathbf{i} + \omega_s \operatorname{sen}\theta\mathbf{j} + (\omega_p + \omega_s\cos\theta)\mathbf{k}$$
$$= -3\mathbf{i} + 10\operatorname{sen}60°\mathbf{j} + (5 + 10\cos 60°)\mathbf{k}$$
$$= \{-3\mathbf{i} + 8.66\mathbf{j} + 10\mathbf{k}\}\ \text{rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$

**Aceleración angular.** Igual que en la solución del ejemplo 20.1, la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ será determinada investigando por separado la razón de cambio con respecto al tiempo de *cada una de las componentes de velocidad angular* tal como son vistas desde la referencia fija $X$, $Y$, $Z$. Seleccionaremos una $\boldsymbol{\Omega}$ para la referencia $x$, $y$, $z$ de manera que la componente de $\boldsymbol{\omega}$ que está siendo considerada sea vista con una *dirección constante* al ser observada desde $x$, $y$, $z$.

Un examen cuidadoso del movimiento del trompo revela que $\boldsymbol{\omega}_s$ tiene una *dirección constante* con relación a $x$, $y$, $z$ si estos ejes giran en $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_n + \boldsymbol{\omega}_p$. Entonces,

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_s = (\dot{\boldsymbol{\omega}}_s)_{xyz} + (\boldsymbol{\omega}_n + \boldsymbol{\omega}_p)\times\boldsymbol{\omega}_s$$
$$= (6\operatorname{sen}60°\mathbf{j} + 6\cos 60°\mathbf{k}) + (-3\mathbf{i} + 5\mathbf{k})\times(10\operatorname{sen}60°\mathbf{j} + 10\cos 60°\mathbf{k})$$
$$= \{-43.30\mathbf{i} + 20.20\mathbf{j} - 22.98\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}^2$$

Como $\boldsymbol{\omega}_n$ se encuentra *siempre* en el plano fijo $X$-$Y$, este vector tiene *dirección constante* si el movimiento se ve desde los ejes $x$, $y$, $z$ que tienen rotación de $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_p$ (no $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_s + \boldsymbol{\omega}_p$). Entonces,

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_n = (\dot{\boldsymbol{\omega}}_n)_{xyz} + \boldsymbol{\omega}_p\times\boldsymbol{\omega}_n = -2\mathbf{i} + (5\mathbf{k})\times(-3\mathbf{i}) = \{-2\mathbf{i} - 15\mathbf{j}\}\ \text{rad/s}^2$$

Por último, la componente $\boldsymbol{\omega}_p$ está *dirigida siempre* a lo largo del eje $Z$ de manera que aquí no es necesario pensar que los ejes $x$, $y$, $z$ están rotando, esto es, $\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$. Expresando los datos en términos de las componentes **i**, **j**, **k** tenemos, por tanto,

$$\dot{\boldsymbol{\omega}}_p = (\dot{\boldsymbol{\omega}}_p)_{xyz} + \mathbf{0}\times\boldsymbol{\omega}_p = \{4\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}^2$$

Entonces, la aceleración angular del trompo es

$$\boldsymbol{\alpha} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_s + \dot{\boldsymbol{\omega}}_n + \dot{\boldsymbol{\omega}}_p = \{-45.3\mathbf{i} + 5.20\mathbf{j} - 19.0\mathbf{k}\}\ \text{rad/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

## 20.3 Movimiento general

En la figura 20-9 se muestra un cuerpo rígido sometido a movimiento general en tres dimensiones para el cual la velocidad angular es $\boldsymbol{\omega}$ y la aceleración angular es $\boldsymbol{\alpha}$. Si el punto $A$ tiene un movimiento conocido de $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{a}_A$, el movimiento de cualquier otro punto $B$ puede ser determinado usando un análisis de movimiento relativo. En esta sección emplearemos un *sistema coordenado en traslación* para definir el movimiento relativo, y en la próxima sección consideraremos una referencia que gira y se traslada.

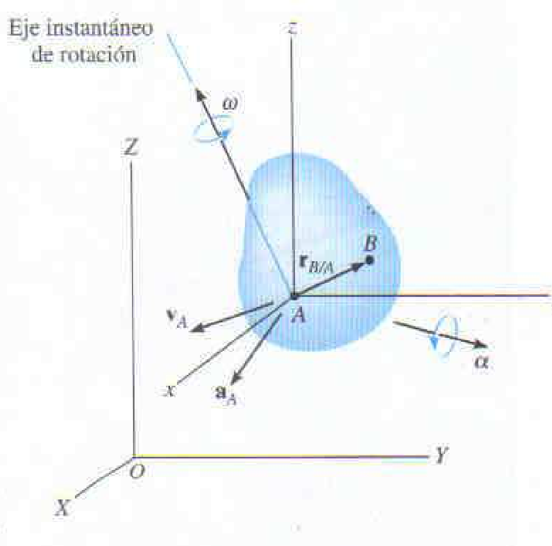



Fig. 20–9

Si el origen del sistema coordenado en traslación $x, y, z$ ($\boldsymbol{\Omega} = \mathbf{0}$) está ubicado en el "punto base" $A$, entonces, en el instante mostrado, el movimiento del cuerpo puede ser considerado como la suma de una traslación instantánea del cuerpo con un movimiento $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{a}_A$ y una rotación del cuerpo con respecto a un eje instantáneo que pase por el punto base. Como el cuerpo es rígido, el movimiento del punto $B$ medido por un observador ubicado en $A$ es el mismo que el *movimiento del cuerpo con respecto a un punto fijo*. Este movimiento relativo ocurre con respecto al eje instantáneo de rotación y es definido mediante $\mathbf{v}_{B/A} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$, ecuación 20-3, y $\mathbf{a}_{B/A} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$, ecuación 20-4. Para ejes en traslación, los movimientos relativos están relacionados con los movimientos absolutos por medio de $\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{v}_{B/A}$ y $\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \mathbf{a}_{B/A}$, ecuaciones 16-15 y 16-17, de manera que la velocidad y la aceleración absolutas del punto $B$ pueden ser determinadas a partir de las ecuaciones

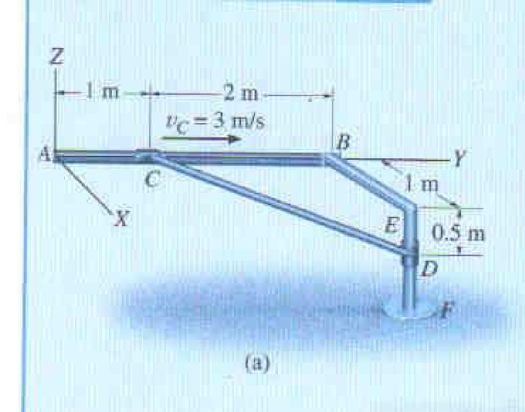
$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \tag{20–7}$$

y

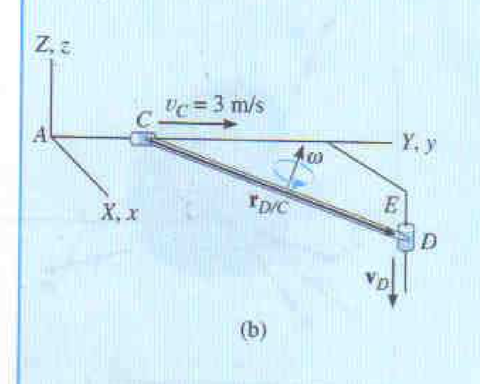
$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) \tag{20–8}$$

Estas dos ecuaciones son idénticas a las que describen el movimiento plano general de un cuerpo rígido, ecuaciones 16-16 y 16-18. Sin embargo, aparecen dificultades en su aplicación al movimiento tridimensional, porque $\boldsymbol{\alpha}$ mide el cambio *tanto* en magnitud *como* en dirección de $\boldsymbol{\omega}$. (Recuerde que para movimiento plano general, $\boldsymbol{\alpha}$ y $\boldsymbol{\omega}$ son siempre paralelas o perpendiculares al plano del movimiento, y por tanto $\boldsymbol{\alpha}$ mide sólo un cambio en la magnitud de $\boldsymbol{\omega}$.) En algunos problemas las restricciones o conexiones de un cuerpo requieren que las direcciones de los movimientos angulares o las trayectorias de desplazamientos de puntos sobre el cuerpo sean definidas. Como se ilustra en el siguiente ejemplo, esta información es útil para obtener algunos de los términos de las ecuaciones anteriores.

## EJEMPLO 20.3




(a)




(b)

Fig. 20-10

Un extremo de la barra rígida $CD$ mostrada en la figura 20-10$a$ se desliza a lo largo del miembro horizontal $AB$, y el otro extremo lo hace a lo largo del miembro vertical $EF$. Si el collarín instalado en $C$ se mueve hacia $B$ con rapidez de 3 m/s, determine la velocidad del collarín situado en $D$ y la velocidad angular de la barra en el instante mostrado. La barra está conectada a los collarines en sus puntos extremos por medio de juntas esféricas.

### Solución

La barra $CD$ está sometida a movimiento general. ¿Por qué? La velocidad del punto $D$ sobre la barra se puede relacionar con la velocidad del punto $C$ mediante la ecuación

$$\mathbf{v}_D = \mathbf{v}_C + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{D/C}$$

Se supone que los marcos de referencia fijo y en traslación coinciden en el instante considerado, figura 20-10$b$. Tenemos

$$\mathbf{v}_D = -v_D\mathbf{k} \qquad \mathbf{v}_C = \{3\mathbf{j}\} \text{ m/s}$$
$$\mathbf{r}_{D/C} = \{1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 0.5\mathbf{k}\} \text{ m} \qquad \boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$$

Al sustituir estas cantidades en la ecuación anterior resulta

$$-v_D\mathbf{k} = 3\mathbf{j} + \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ 1 & 2 & -0.5 \end{vmatrix}$$

Desarrollando e igualando las respectivas componentes **i, j, k** obtenemos

$$-0.5\omega_y - 2\omega_z = 0 \qquad (1)$$
$$0.5\omega_x + 1\omega_z + 3 = 0 \qquad (2)$$
$$2\omega_x - 1\omega_y + v_D = 0 \qquad (3)$$

Estas ecuaciones contienen cuatro incógnitas.* Una cuarta ecuación puede escribirse si se especifica la dirección de $\boldsymbol{\omega}$. En particular, cualquier componente de $\boldsymbol{\omega}$ que actúe a lo largo del eje de la barra no tiene efecto en el movimiento de los collarines. Esto se debe a que la barra puede *rotar libremente* con respecto a su eje. Por tanto, si $\boldsymbol{\omega}$ es especificada como actuando *perpendicularmente* al eje de la barra, entonces $\boldsymbol{\omega}$ debe tener una magnitud única para satisfacer las ecuaciones anteriores. La perpendicularidad es garantizada si el producto punto de $\boldsymbol{\omega}$ y $\mathbf{r}_{D/C}$ es cero (vea la ecución C-14 del apéndice C). Por consiguiente,

$$\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{r}_{D/C} = (\omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}) \cdot (1\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 0.5\mathbf{k}) = 0$$
$$1\omega_x + 2\omega_y - 0.5\omega_z = 0 \qquad (4)$$

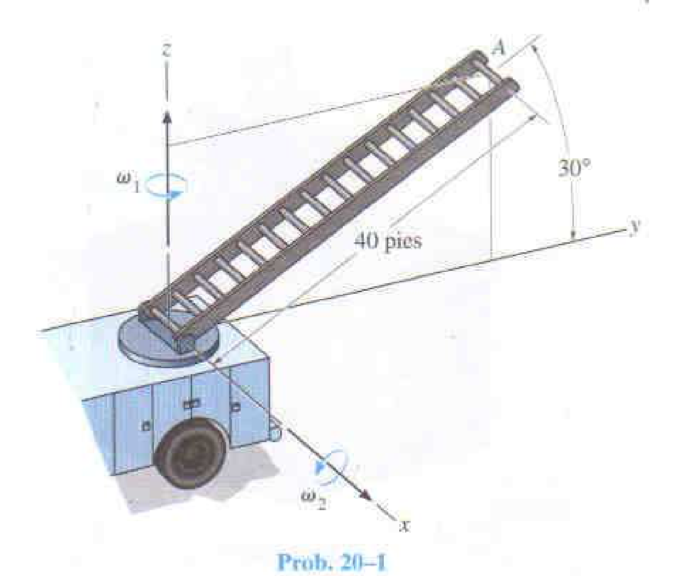
Resolviendo las ecuaciones de la 1 a la 4 simultáneamente obtenemos

$$\omega_x = -4.86 \text{ rad/s} \quad \omega_y = 2.29 \text{ rad/s} \quad \omega_z = -0.571 \text{ rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$
$$v_D = 12.0 \text{ m/s} \downarrow \qquad \textit{Resp.}$$

*Aunque este es el caso, la magnitud de $\mathbf{v}_D$ puede obtenerse. Por ejemplo, obtenga de las ecuaciones 1 y 2 $\omega_y$ y $\omega_x$ en términos de $\omega_z$ y sustitúyalas en la ecuación 3. Observará que $\omega_z$ se *cancela*, lo que permite lograr una solución para $v_D$.

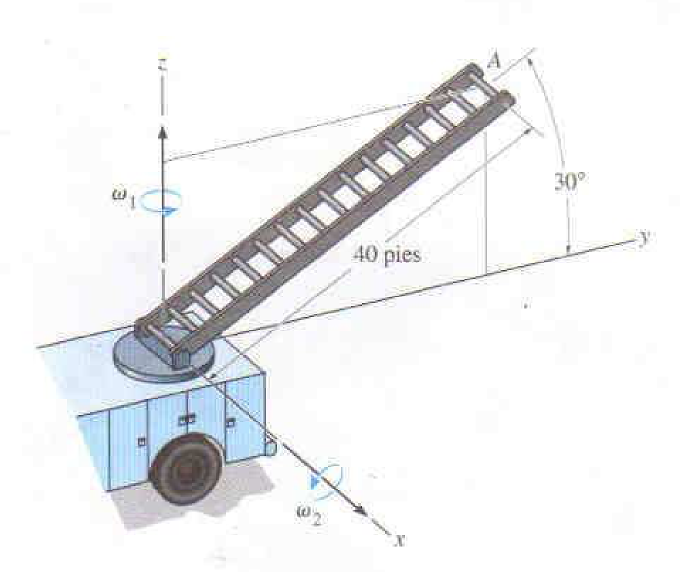
# PROBLEMAS

**20-1.** La escalera del camión de bomberos gira alrededor del eje $z$ con velocidad angular $\omega_1 = 0.15$ rad/s, la cual aumenta a razón de 0.8 rad/s$^2$. En el mismo instante, la escalera está girando hacia arriba a razón constante de $\omega_2 = 0.6$ rad/s. Determine la velocidad y la aceleración del punto $A$ ubicado en la punta de la escalera en este instante.



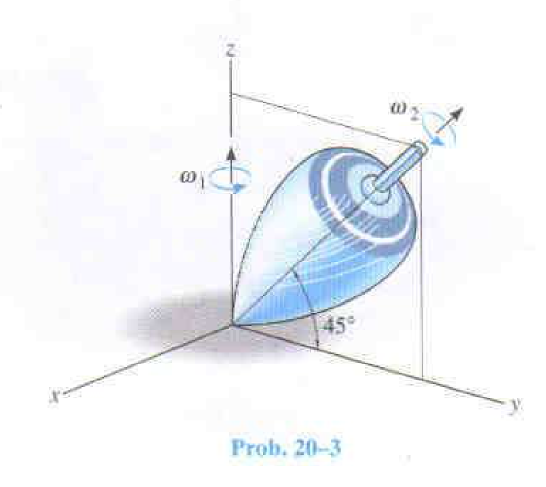

Prob. 20–1

**20-2.** La escalera del camión de bomberos gira alrededor del eje $z$ con velocidad angular $\omega_1 = 0.15$ rad/s, la cual aumenta a razón de 0.2 rad/s$^2$. En el mismo instante, la escalera está girando hacia arriba a $\omega_2 = 0.6$ rad/s mientras aumenta a 0.4 rad/s$^2$. Determine la velocidad y la aceleración del punto $A$ ubicado en la punta de la escalera en este instante.



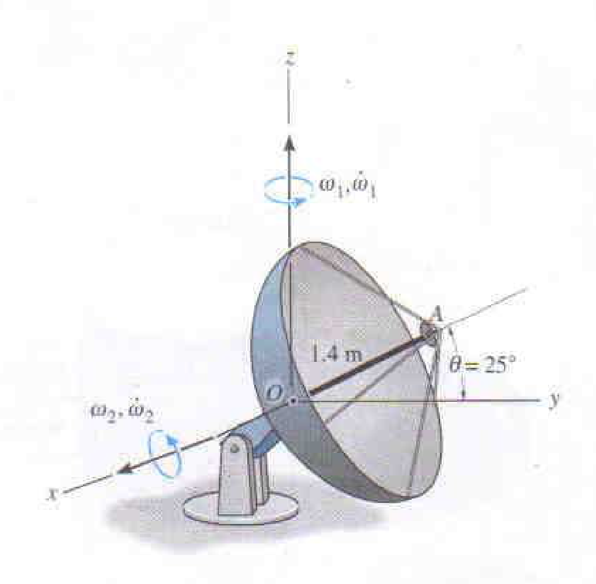

Prob. 20–2

**20-3.** El movimiento del trompo es tal que en el instante mostrado está rotando con respecto al eje $z$ a $\omega_1 = 0.6$ rad/s mientras gira a $\omega_2 = 8$ rad/s. Determine la velocidad angular y la aceleración angular del trompo en este instante. Exprese el resultado como un vector cartesiano.



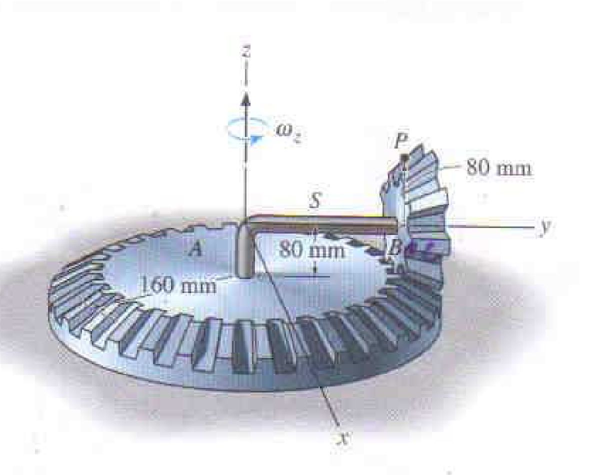

Prob. 20–3

***20-4.** En un instante dado, la antena parabólica tiene movimiento angular $\omega_1 = 6$ rad/s y $\dot{\omega}_1 = 3$ rad/s$^2$ con respecto al eje $z$. En este mismo instante $\theta = 25°$, el movimiento angular con respecto al eje $x$ es $\omega_2 = 2$ rad/s, y $\dot{\omega}_2 = 1.5$ rad/s$^2$. Determine la velocidad y la aceleración del amplificador $A$ en este instante.



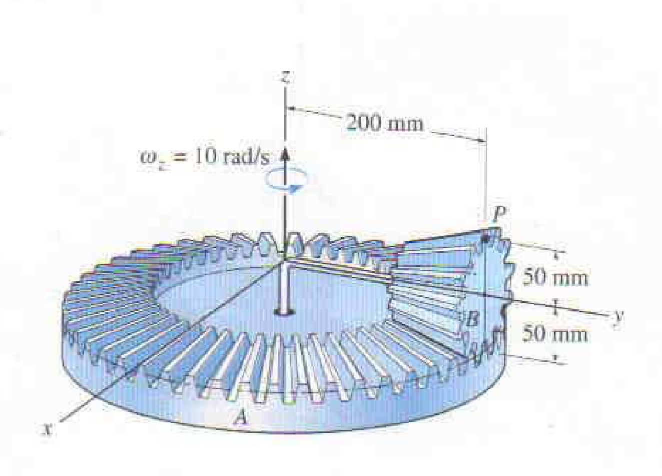

Prob. 20–4

**20-5.** El engrane $A$ está fijo mientras el engrane $B$ puede girar libremente sobre la flecha $S$. Si la flecha está girando alrededor del eje $z$ a $\omega_z = 5$ rad/s, mientras aumenta a 2 rad/s$^2$, determine la velocidad y la aceleración del punto $C$ en el instante mostrado. La cara del engrane $B$ se ubica en un plano vertical.



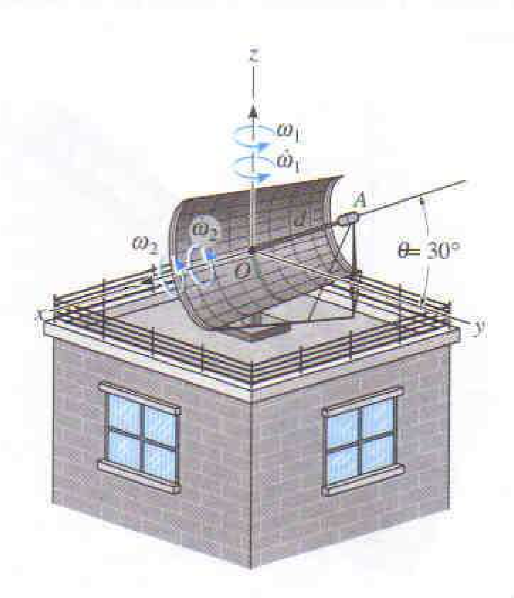

Prob. 20–5

**20-6.** El engrane $B$ está conectado a la flecha rotatoria, mientras que la placa del engrane $A$ está fija. Si la flecha está rotando a una razón constante de $\omega_z = 10$ rad/s con respecto al eje $z$, determine las magnitudes de la velocidad angular y de la aceleración angular del engrane $B$. Determine también las magnitudes de la velocidad y la aceleración del punto $P$.



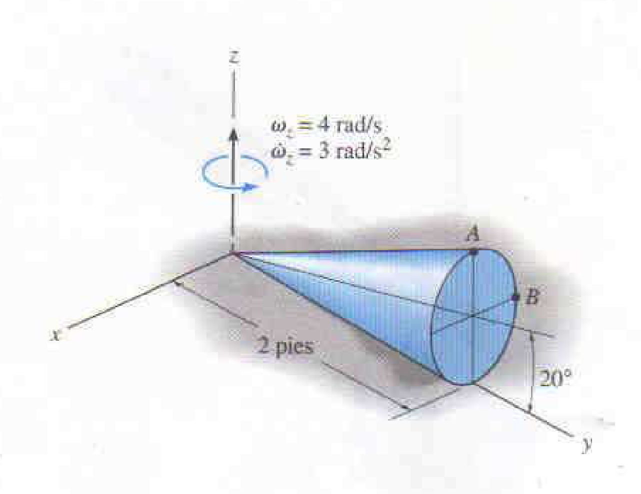

Prob. 20–6

**20-7.** En un instante dado, la antena tiene un movimiento angular $\omega_1 = 3$ rad/s y $\dot{\omega}_1 = 2$ rad/s$^2$ con respecto al eje $z$. En este mismo instante $\theta = 30°$, el movimiento angular con respecto al eje $x$ es $\omega_2 = 1.5$ rad/s, y $\dot{\omega}_2 = 4$ rad/s$^2$. Determine la velocidad y la aceleración del amplificador $A$ en este instante. La distancia desde $O$ hasta $A$ es $d = 3$ pies.



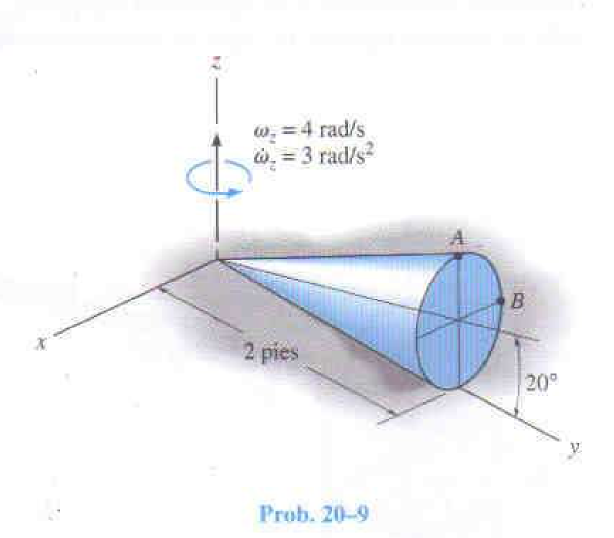

Prob. 20–7

***20-8.** El cono rueda sin deslizar de manera que en el instante mostrado $\omega_z = 4$ rad/s y $\dot{\omega}_z = 3$ rad/s$^2$. Determine la velocidad y la aceleración del punto $A$ en este instante.



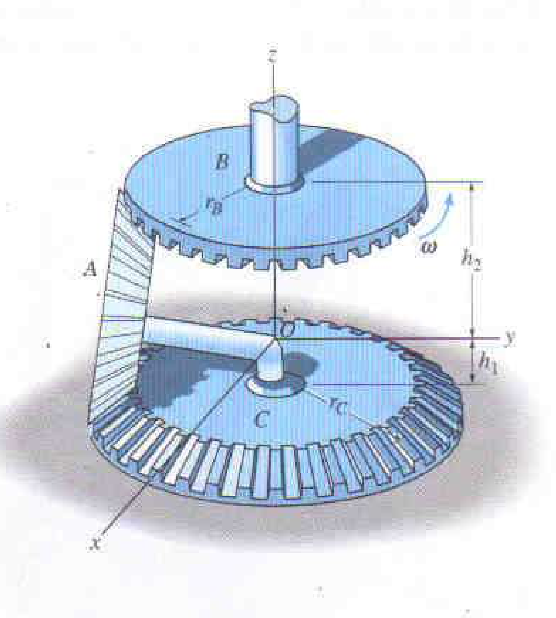

Prob. 20–8

**20-9.** El cono rueda sin deslizar de manera que en el instante mostrado $\omega_z = 4$ rad/s y $\dot{\omega}_z = 3$ rad/s². Determine la velocidad y la aceleración del punto $B$ en este instante.



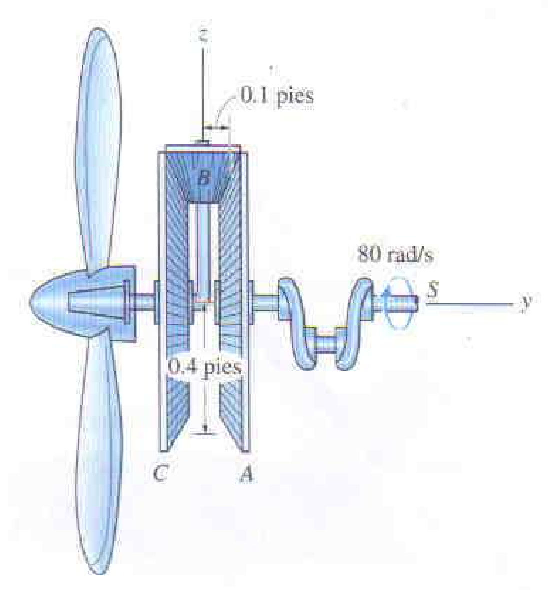

Prob. 20–9

**20-10.** Si el engrane superior $B$ está girando con razón constante $\boldsymbol{\omega}$, determine la velocidad angular del engrane $A$, el cual puede girar libremente alrededor de la flecha y rueda sobre el engrane fijo inferior $C$.



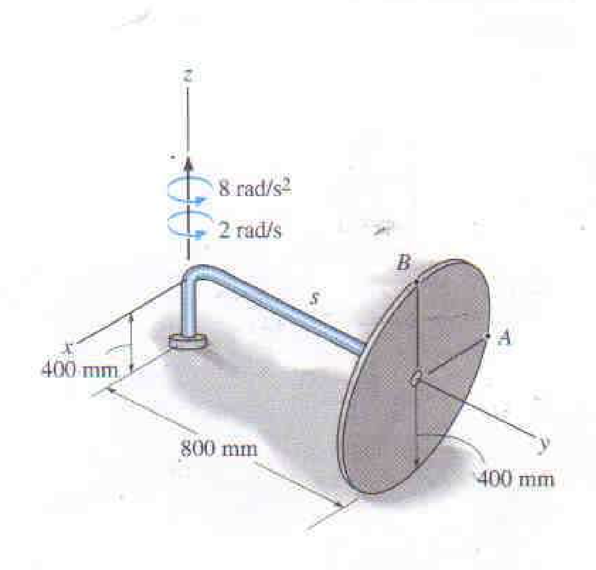

Prob. 20–10

**20-11.** El engrane $A$ está fijo al cigüeñal $S$, mientras que el engrane $C$ está fijo y $B$ puede rotar libremente. El cigüeñal se encuentra girando a 80 rad/s con respecto a su eje. Determine las magnitudes de la velocidad angular de la hélice y de la aceleración angular del engrane $B$.



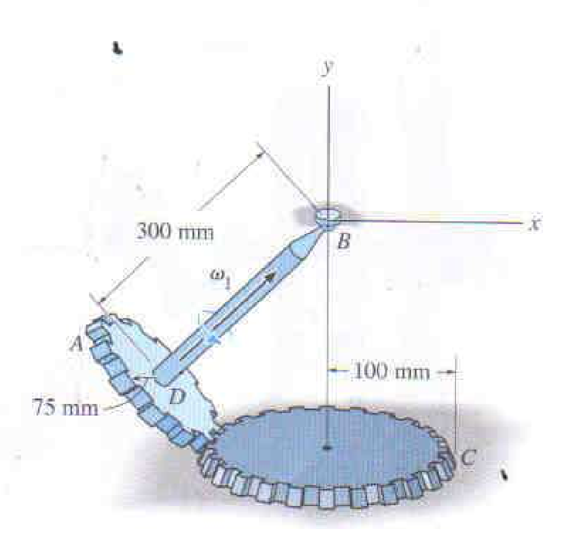

Prob. 20–11

***20-12.** El disco $B$ puede girar libremente sobre la flecha $S$. Si la flecha está girando alrededor del eje $z$ a $\omega_z = 2$ rad/s y acelerando a 8 rad/s², determine la velocidad y la aceleración del punto $A$ en el instante mostrado.



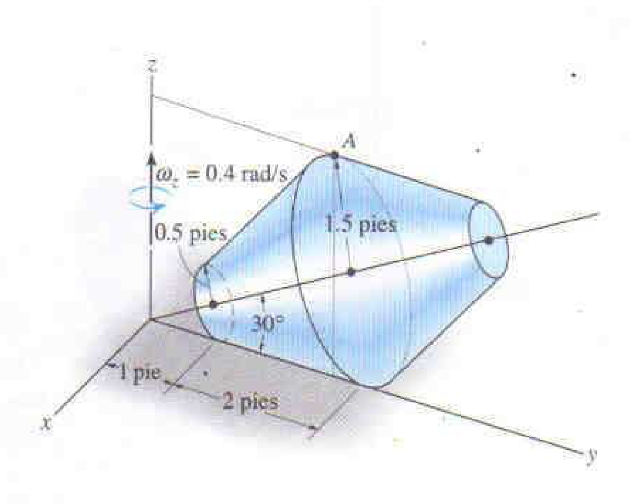

Prob. 20–12

**20-13.** La flecha $BD$ está conectada a una junta esférica en el punto $B$, y un engrane cónico $A$ se encuentra unido a su otro extremo. El engrane está acoplado con un engrane fijo $C$. Si la flecha y el engrane $A$ están *girando* con velocidad angular constante $\omega_1 = 8$ rad/s, determine la velocidad angular y la aceleración angular del engrane $A$.



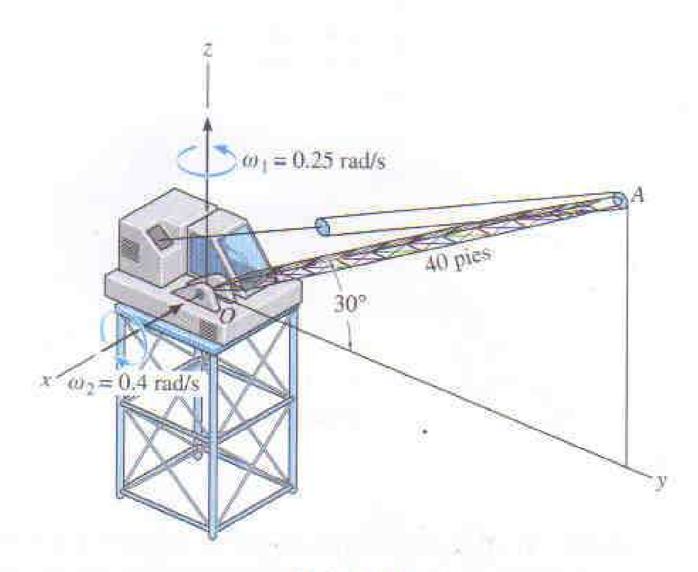

Prob. 20–13

**20-14.** El cono truncado gira con respecto al eje $z$ a razón constante $\omega_z = 0.4$ rad/s sin deslizar sobre el plano horizontal. Determine la velocidad y la aceleración del punto $A$ sobre el cono.



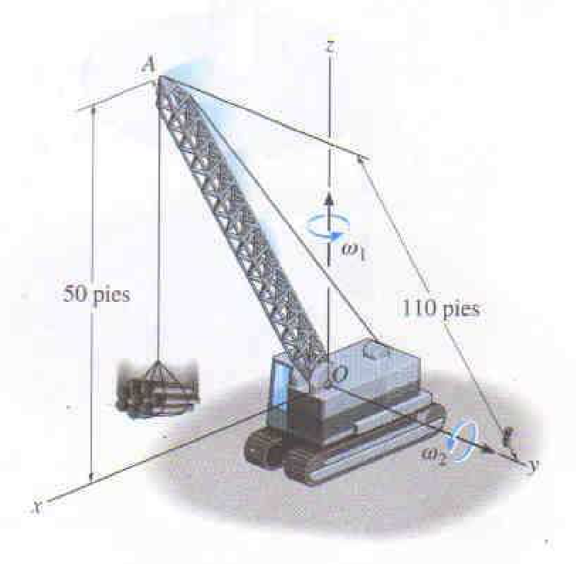

Prob. 20–14

**20-15.** En el instante mostrado, la grúa está rotando con respecto al eje $z$ a velocidad angular $\omega_1 = 0.25$ rad/s, la cual está aumentando a 0.6 rad/s$^2$. El aguilón $OA$ se encuentra rotando hacia abajo con velocidad angular $\omega_2 = 0.4$ rad/s, la cual está aumentando a 0.8 rad/s$^2$. Determine la velocidad y la aceleración del punto $A$ ubicado en la parte superior del aguilón en este instante.



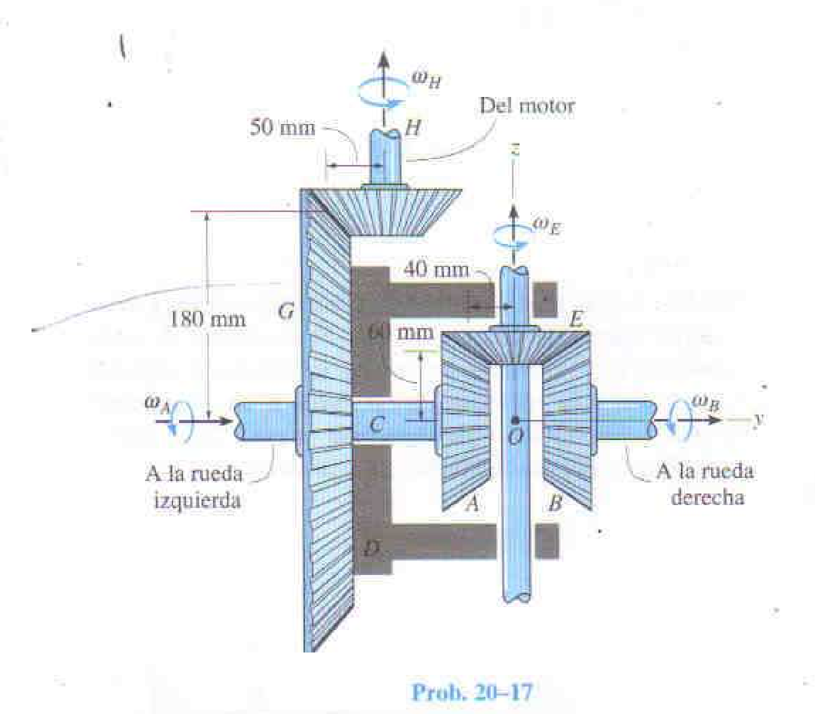

Prob. 20–15

***20-16.** El aguilón $AB$ de la grúa de construcción está girando con respecto al eje $z$ a velocidad angular constante de $\omega_1 = 0.15$ rad/s, mientras que está girando hacia abajo con velocidad angular constante de $\omega_2 = 0.2$ rad/s. Determine la velocidad y la aceleración del punto $A$ ubicado en la punta del aguilón en el instante que se muestra.




Prob. 20–16

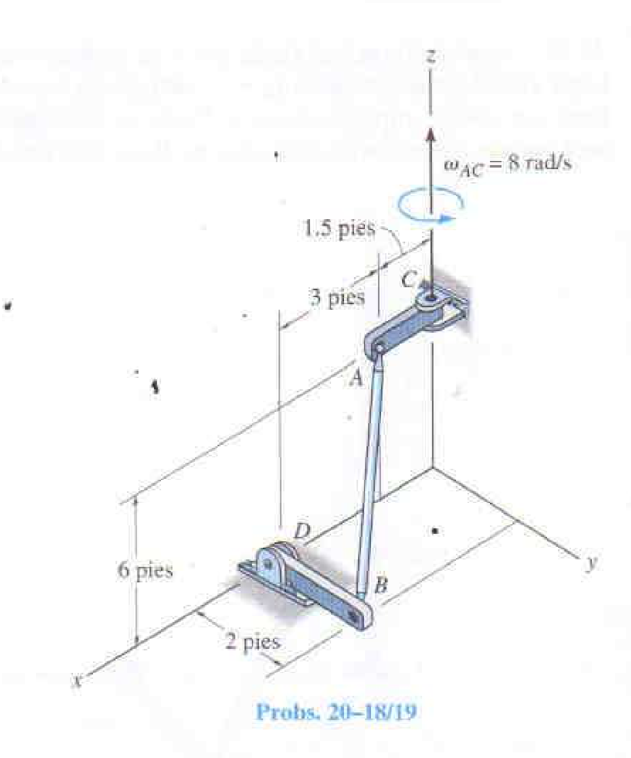
**20-17.** El diferencial de un automóvil permite que las dos ruedas posteriores giren con diferente rapidez cuando el automóvil viaja a lo largo de una curva. Para su operación, los ejes traseros están unidos a las ruedas en un extremo y tienen engranes cónicos $A$ y $B$ en sus otros extremos. La cubierta $D$ del diferencial se encuentra colocada sobre el eje izquierdo pero puede girar con respecto a $C$ independientemente del eje. La cubierta soporta un engrane piñón $E$ sobre una flecha, la cual se acopla con los engranes $A$ y $B$. Finalmente, un engrane de anillo $G$ está *fijo* a la cubierta del diferencial de manera que la cubierta gira con el engrane de anillo cuando este último es impulsado por el piñón impulsor $H$. Este engrane, como la cubierta del diferencial, puede girar libremente con respecto al eje izquierdo de la rueda. Si el piñón impulsor está girando a $\omega_H = 100$ rad/s y el engrane piñón $E$ rota con respecto a su flecha a $\omega_E = 30$ rad/s, determine la velocidad angular, $\omega_A$ y $\omega_B$, de cada eje.




Prob. 20–17

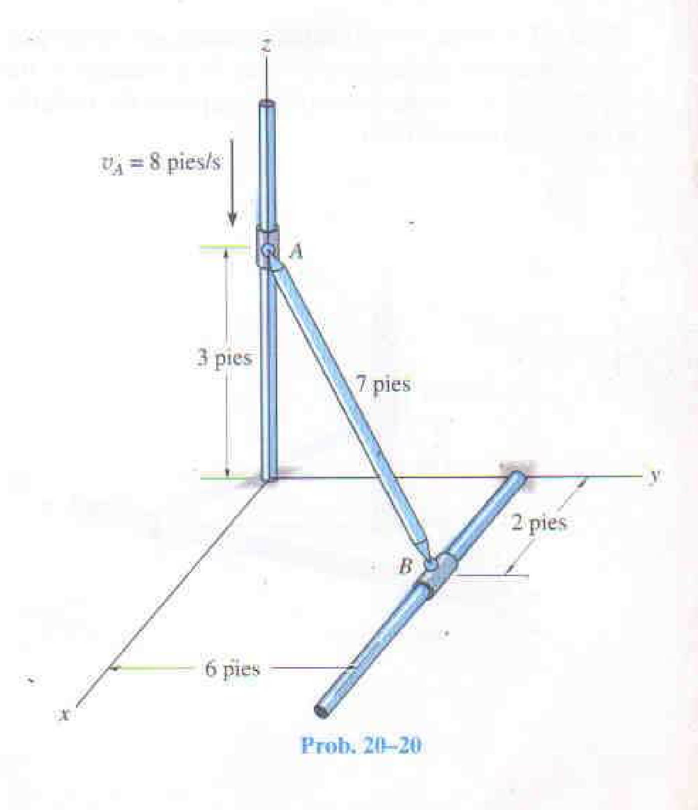
**20-18.** La barra $AB$ está unida al brazo giratorio por medio de una junta esférica. Si $AC$ está girando con velocidad angular constante de 8 rad/s con respecto al pasador instalado en $C$, determine la velocidad angular del eslabón $BD$ en el instante mostrado.

**20-19.** La barra $AB$ está unida al brazo giratorio por medio de una junta esférica. Si $AC$ está girando con respecto al punto $C$ con velocidad angular de 8 rad/s y tiene aceleración angular de 6 rad/s$^2$ en el instante mostrado, determine la velocidad angular y la aceleración angular del eslabón $BD$ en este instante.



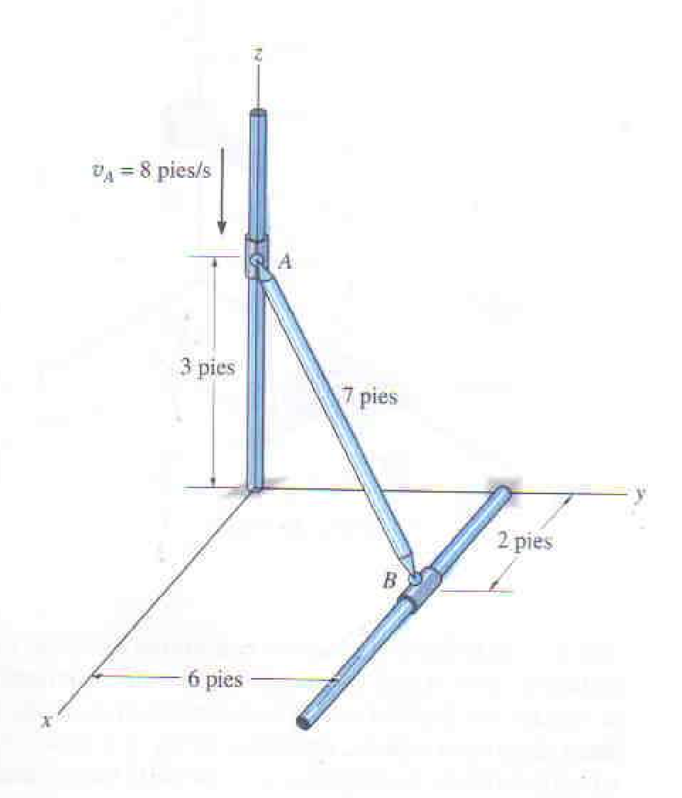

Probs. 20–18/19

***20-20.** Si la barra está unida con juntas esféricas a los collarines lisos $A$ y $B$ en sus puntos extremos, determine la rapidez de $B$ en el instante mostrado si $A$ se mueve hacia abajo con rapidez constante de $v_A = 8$ pies/s. Determine también la velocidad angular de la barra cuando está dirigida perpendicularmente al eje de la barra.



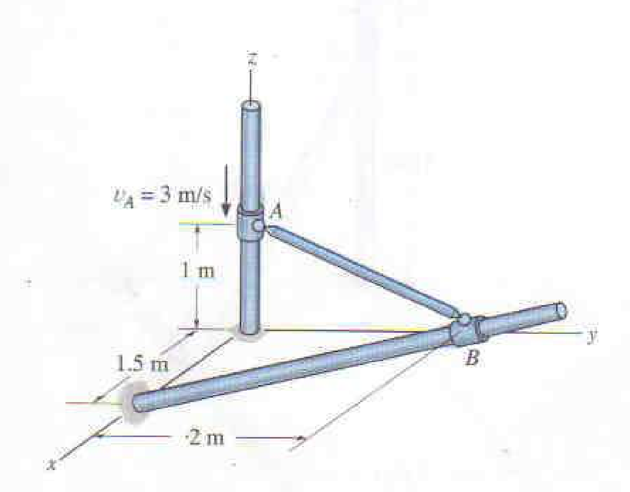

Prob. 20–20

**20-21.** Si el collarín instalado en $A$ se está moviendo hacia abajo con aceleración $\mathbf{a}_A = \{-5\mathbf{k}\}$ pies/s$^2$ en el instante en que su rapidez es $v_A = 8$ pies/s, determine la aceleración del collarín colocado en $B$ en este instante.



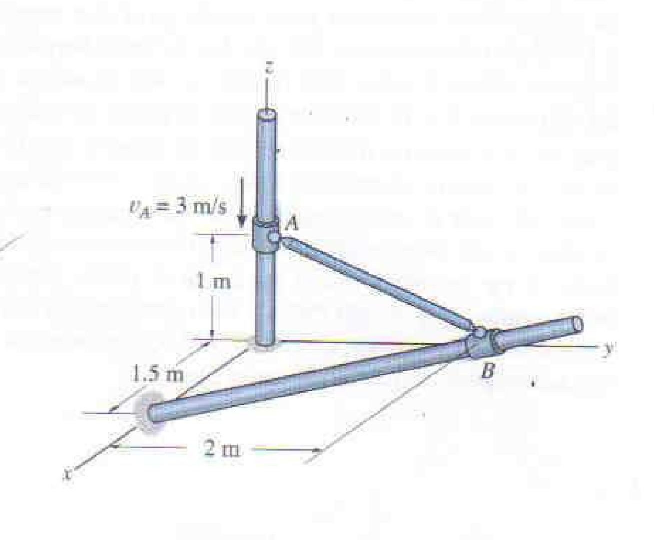

Prob. 20–21

**20-22.** La barra $AB$ está unida a collarines en sus extremos por medio de juntas esféricas. Si el collarín $A$ tiene rapidez $v_A = 3$ m/s, determine la rapidez del collarín $B$ en el instante mostrado.



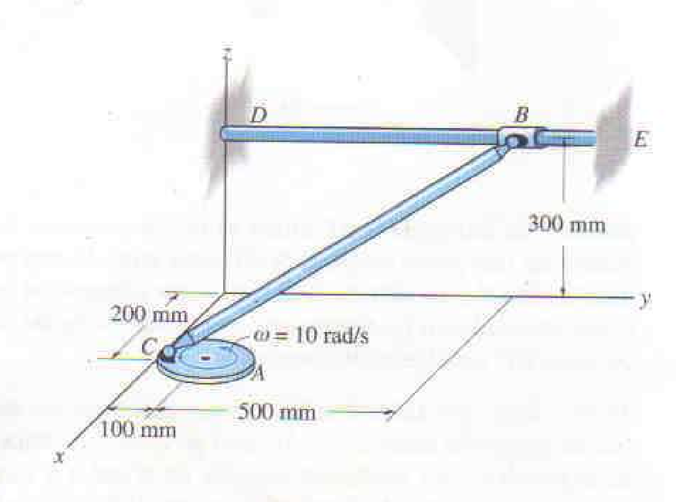

Prob. 20–22

**20-23.** Si el collarín instalado en $A$ tiene aceleración $\mathbf{a}_A = \{-2\mathbf{k}\}$ m/s$^2$ en el instante en que su rapidez es $v_A = 3$ m/s, determine la magnitud de la aceleración del collarín situado en $B$ en este instante.



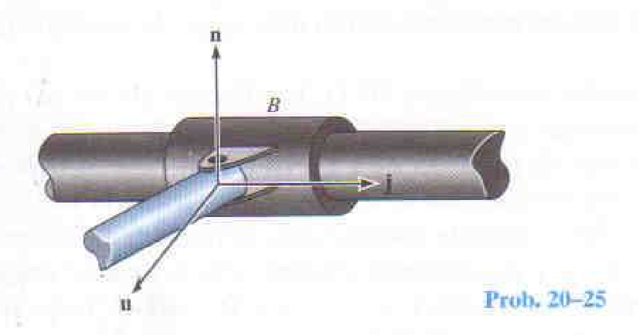

Prob. 20–23

***20-24.** La barra $AB$ está unida a collarines en sus extremos por medio de juntas esféricas. Si el collarín $A$ tiene velocidad $v_A = 5$ pies/s, determine la velocidad angular de la barra y la velocidad del collarín $B$ en el instante mostrado. Suponga que la velocidad angular de la barra está dirigida perpendicularmente a la barra.



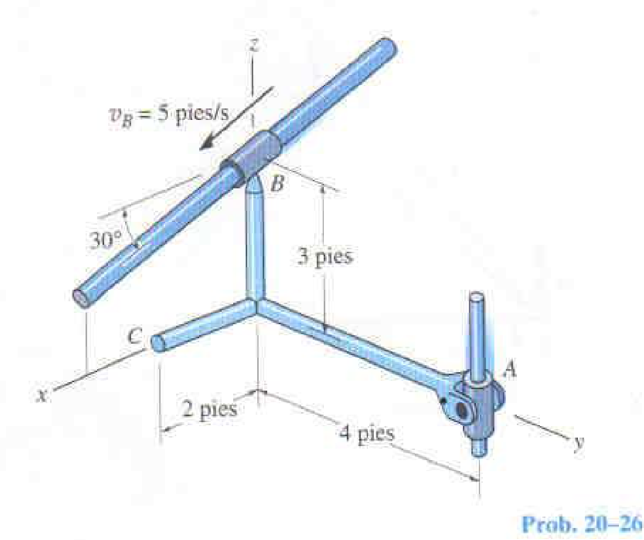

Prob. 20–24

**20-25.** Resuelva el problema 20-24 si la conexión en el collarín $B$ consta de un pasador como se muestra en la figura, en vez de una junta esférica. *Sugerencia*: La restricción permite que la flecha rote a lo largo de la barra (dirección **j**) y a lo largo del eje del pasador (dirección **n**). Como no hay componente rotacional en la dirección **u**, esto es, perpendicular a **n** y **j** donde $\mathbf{u} = \mathbf{j} \times \mathbf{n}$, puede obtenerse una ecuación adicional para encontrar la solución a partir de $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{u} = 0$. El vector **n** está en la misma dirección que $\mathbf{r}_{B/C} \times \mathbf{r}_{D/C}$.




Prob. 20–25

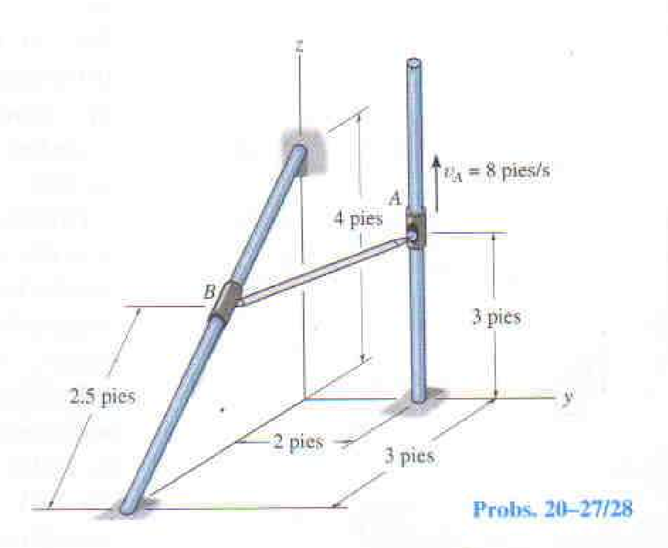
**20-26.** El conjunto de tubos está soportado en $B$ por una junta esférica y en $A$ por una abrazadera. Si el collarín instalado en $B$ se mueve en el plano $x$-$z$ con rapidez $v_B = 5$ pies/s, determine la velocidad de los puntos $A$ y $C$ sobre el conjunto de tubos en el instante mostrado. *Sugerencia*: Vea el problema 20-25.




Prob. 20–26

**20-27.*** La barra $AB$ está unida a collarines en sus extremos mediante juntas esféricas. Si el collarín $A$ se mueve hacia arriba con velocidad de 8 pies/s, determine la velocidad angular de la barra y la rapidez del collarín $B$ en el instante mostrado. Suponga que la velocidad angular de ésta está dirigida perpendicularmente a ella.

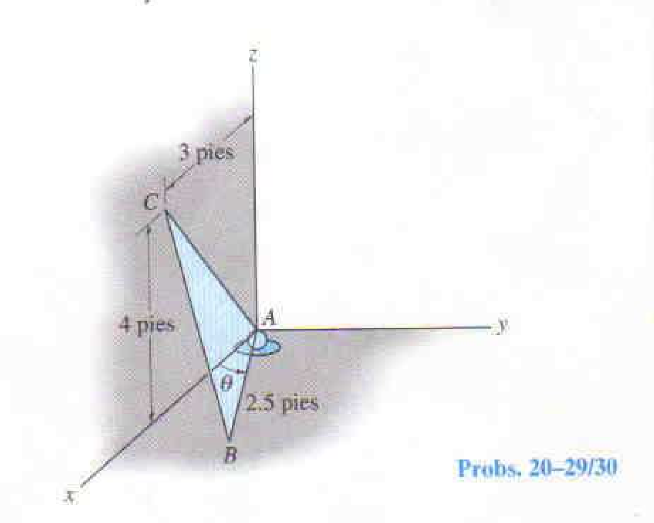
***20-28.** La barra $AB$ está unida a collarines en sus extremos mediante juntas esféricas. Si el collarín $A$ se mueve hacia arriba con aceleración $a_A = 4$ pies/s$^2$, determine la aceleración angular de la barra $AB$ y la magnitud de la aceleración del collarín $B$. Suponga que la aceleración angular de aquella está dirigida perpendicularmente a ella.




Probs. 20–27/28

**20-29.** La placa triangular $ABC$ está soportada en $A$ mediante una junta esférica y en $C$ por el plano $x$-$z$. El lado $AB$ se encuentra en el plano $x$-$y$. En el instante $\theta = 60°$, $\dot{\theta} = 2$ rad/s y el punto $C$ tiene las coordenadas que se muestran. Determine la velocidad angular de la placa y la velocidad del punto $C$ en este instante.

**20-30.** La placa triangular $ABC$ está soportada en $A$ mediante una junta esférica y en $C$ por el plano $x$-$z$. El lado $AB$ se encuentra en el plano $x$-$y$. En el instante $\theta = 60°$, $\dot{\theta} = 2$ rad/s, $\ddot{\theta} = 3$ rad/s$^2$, y el punto $C$ tiene las coordenadas que se muestran. Determine la aceleración angular de la placa y la aceleración del punto $C$ en este instante.




Probs. 20–29/30

## *20.4 Análisis de movimiento relativo usando ejes en traslación y en rotación

La manera más general de analizar el movimiento tridimensional de un cuerpo rígido requiere el uso de ejes $x$, $y$, $z$ de traslación y rotación relativos a un segundo marco $X$, $Y$, $Z$. Este análisis proporciona también un medio para determinar los movimientos de dos puntos $A$ y $B$ ubicados en miembros separados de un mecanismo, y para definir el movimiento relativo de una partícula con respecto a otra cuando una o ambas partículas se están moviendo a lo largo de *trayectorias en rotación*.

Como se muestra en la figura 20-11, las ubicaciones de los puntos $A$ y $B$ son especificadas con relación al marco de referencia $X$, $Y$, $Z$ mediante los vectores de posición $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{r}_B$. El punto base $A$ representa el origen del sistema coordenado $x$, $y$, $z$, el cual se traslada y gira con respecto a $X$, $Y$, $Z$. En el instante considerado, la velocidad y la aceleración del punto $A$ son $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{a}_A$, respectivamente, y la velocidad angular y la aceleración angular de los ejes $x$, $y$, $z$ son $\mathbf{\Omega}$ y $\dot{\mathbf{\Omega}} = d\mathbf{\Omega}/dt$, respectivamente. Todos estos vectores son *medidos* con respecto al marco de referencia $X$, $Y$, $Z$, aunque pueden ser expresados en forma de componentes cartesianas a lo largo de cualquier conjunto de ejes.

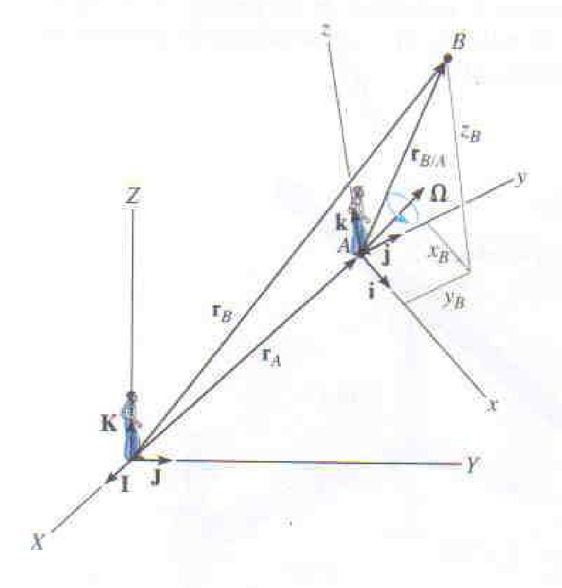



Fig. 20–11

**Posición.** Si la posición de "$B$ con respecto a $A$" es especificada mediante el *vector de posición relativa* $\mathbf{r}_{B/A}$, figura 20-11, entonces, por suma vectorial,

$$\mathbf{r}_B = \mathbf{r}_A + \mathbf{r}_{B/A} \tag{20–9}$$

donde

$\mathbf{r}_B$ = posición de $B$

$\mathbf{r}_A$ = posición del origen $A$

$\mathbf{r}_{B/A}$ = posición relativa de "$B$ con respecto a $A$"

**Velocidad.** La velócidad del punto $B$ medida desde $X, Y, Z$ se determina tomando la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 20-9, que resulta en

$$\dot{\mathbf{r}}_B = \dot{\mathbf{r}}_A + \dot{\mathbf{r}}_{B/A}$$

Los primeros dos términos representan $\mathbf{v}_B$ y $\mathbf{v}_A$. El último término es evaluado aplicando la ecuación 20-6, ya que $\mathbf{r}_{B/A}$ es medida entre dos puntos en una referencia giratoria. Por consiguiente,

$$\dot{\mathbf{r}}_{B/A} = (\dot{\mathbf{r}}_{B/A})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} = (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} \tag{20–10}$$

Aquí $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ es la velocidad relativa de $B$ con respecto a $A$ medida desde $x, y, z$. Así,

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} \tag{20–11}$$

donde

$\mathbf{v}_B$ = velocidad de $B$

$\mathbf{v}_A$ = velocidad del origen $A$ del marco de referencia $x, y, z$

$(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ = velocidad relativa de "$B$ con respecto a $A$" como es medida por un observador situado en el marco de referencia $x, y, z$

$\boldsymbol{\Omega}$ = velocidad angular del marco de referencia $x, y, z$

$\mathbf{r}_{B/A}$ = posición relativa de "$B$ con respecto a $A$"

**Aceleración.** La aceleración del punto $B$ medida desde $X, Y, Z$ se determina tomando la derivada con respecto al tiempo de la ecuación 20-11, lo cual resulta en

$$\dot{\mathbf{v}}_B = \dot{\mathbf{v}}_A + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \mathbf{\Omega} \times \dot{\mathbf{r}}_{B/A} + \frac{d}{dt}(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

Las derivadas con respecto al tiempo definidas en los términos primero y segundo representan $\mathbf{a}_B$ y $\mathbf{a}_A$, respectivamente. El cuarto término es evaluado usando la ecuación 20-10, y el último término es evaluado aplicando la ecuación 20-6, lo que da

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} = (\dot{\mathbf{v}}_{B/A})_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$
$$= (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

Aquí $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$ es la aceleración relativa de $B$ con respecto a $A$ medida desde $x, y, z$. Sustituyendo este resultado y la ecuación 20-10 en la ecuación anterior y simplificando, tenemos

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz} \tag{20–12}$$

donde

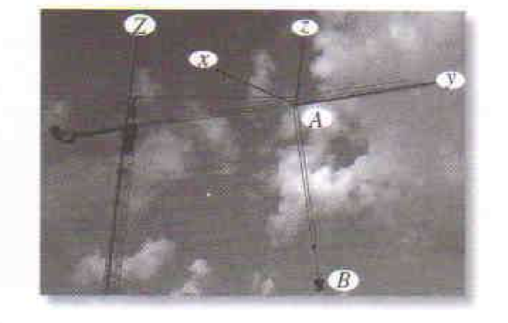
$\mathbf{a}_B$ = aceleración de $B$

$\mathbf{a}_A$ = aceleración del origen $A$ del marco de referencia $x, y, z$

$(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$, $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ = aceleración relativa y velocidad relativa de "$B$ con respecto a $A$" medidas por un observador situado en el marco de referencia giratorio $x, y, z$

$\dot{\mathbf{\Omega}}$, $\mathbf{\Omega}$ = aceleración angular y velocidad angular del marco de referencia $x, y, z$

$\mathbf{r}_{B/A}$ = posición relativa de "$B$ con respecto a $A$"




El complicado movimiento espacial de la cubeta $B$ de concreto ocurre debido a la rotación del aguilón con respecto al eje $Z$, al movimiento de la canasta $A$ a lo largo del aguilón, y a la extensión y oscilación del cable $AB$. Un sistema coordenado $x, y, z$ en traslación y giratorio puede ser establecido sobre la canasta, y es posible aplicar un análisis de movimiento relativo al estudio de este movimiento.

Las ecuaciones 20-11 y 20-12 son idénticas a las usadas en la sección 16.8 para analizar movimiento plano relativo.* Sin embargo, en ese caso, la aplicación se simplifica ya que $\mathbf{\Omega}$ y $\dot{\mathbf{\Omega}}$ tienen una *dirección constante* que siempre es perpendicular al plano del movimiento. Para movimiento tridimensional, $\dot{\mathbf{\Omega}}$ debe calcularse usando la ecuación 20-6, ya que $\dot{\mathbf{\Omega}}$ depende del cambio *tanto* en magnitud *como* en dirección de $\mathbf{\Omega}$.

*Refiérase a la sección 16.8 para encontrar una interpretación de los términos.

## PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

El movimiento tridimensional de partículas o cuerpos rígidos puede ser analizado con las ecuaciones 20-11 y 20-12 usando el siguiente procedimiento.

*Ejes coordenados.*

- Seleccione la ubicación y la orientación de los ejes coordenados $X, Y, Z$ y $x, y, z$. A menudo las soluciones son obtenidas fácilmente si en el instante considerado:

  (1) los orígenes *coinciden*
  (2) los ejes son colineales
  (3) los ejes son paralelos

- Si varias componentes de velocidad angular están implicadas en un problema, los cálculos se reducirán si los ejes $x, y, z$ son seleccionados de manera que sólo una componente de velocidad angular es observada en este marco ($\mathbf{\Omega}_{xyz}$) y el marco gira con $\mathbf{\Omega}$ definida mediante las otras componentes de velocidad angular.

*Ecuaciones cinemáticas.*

- Después que el origen $A$ de la referencia móvil se ha definido y el punto móvil $B$ ha sido especificado, las ecuaciones 20-11 y 20-12 deben escribirse en forma simbólica como

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$$

- Si $\mathbf{r}_A$ y $\mathbf{\Omega}$ parecen *cambiar de dirección* al ser observados desde la referencia fija $X, Y, Z$, use un conjunto de ejes de referencia con primas, $x', y', z'$ que tengan $\mathbf{\Omega}' = \mathbf{\Omega}$, y la ecuación 20-6 para determinar $\dot{\mathbf{\Omega}}$ y el movimiento $\mathbf{v}_A$ y $\mathbf{a}_A$ del origen de los ejes móviles $x, y, z$.

- Si $(\mathbf{r}_{B/A})_{xyz}$ y $\mathbf{\Omega}_{xyz}$ parecen *cambiar de dirección* al ser observados desde $x, y, z$, entonces use un conjunto de ejes de referencia con primas, $x', y', z'$ que tengan $\mathbf{\Omega}' = \mathbf{\Omega}_{xyz}$, y la ecuación 20-6 para determinar $\dot{\mathbf{\Omega}}_{xyz}$ y el movimiento relativo $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$ y $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$.

- Después que las formas finales de $\dot{\mathbf{\Omega}}, \mathbf{v}_A, \mathbf{a}_A, \dot{\mathbf{\Omega}}_{xyz}, (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$, y $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$ son obtenidas, los datos numéricos del problema pueden ser sustituidos y los términos cinemáticos evaluados. Las componentes de todos estos vectores pueden seleccionarse a lo largo de los ejes $X, Y, Z$ o $x, y, z$. La selección es arbitraria, siempre que sea usado un conjunto consistente de vectores unitarios.

## EJEMPLO 20.4

Un motor y una barra $AB$ unida a él tienen los movimientos angulares mostrados en la figura 20-12. Un collarín $C$ instalado sobre la barra se ubica a 0.25 m de $A$ y se está moviendo hacia abajo a lo largo de la barra con velocidad de 3 m/s y aceleración de 2 m/s$^2$. Determine la velocidad y la aceleración de $C$ en este instante.

### Solución

*Ejes coordenados.* Elegimos ubicar el origen de la referencia fija $X$, $Y$, $Z$ en el centro de la plataforma, y el origen del marco móvil $x$, $y$, $z$ en el punto $A$, figura 20-12. Como el collarín está sometido a dos componentes de movimiento angular, $\boldsymbol{\omega}_p$ y $\boldsymbol{\omega}_M$, será considerado con una velocidad angular de $\boldsymbol{\Omega}_{xyz} = \boldsymbol{\omega}_M$ en $x$, $y$, $z$. Los ejes $x$, $y$, $z$ se unirán a la plataforma de manera que $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_p$.

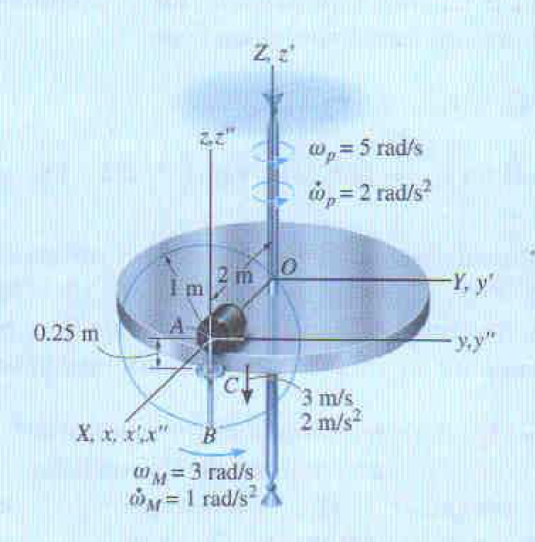



Fig. 20–12

*Ecuaciones cinemáticas.* Las ecuaciones 20-11 y 20-12, aplicadas a los puntos $C$ y $A$, toman la forma

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/A} + (\mathbf{v}_{C/A})_{xyz}$$
$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/A})_{xyz}$$

*Movimiento de A.*

Aquí $\mathbf{r}_A$ cambia de dirección con respecto a $X\ Y\ Z$.

Para encontrar las derivadas con respecto al tiempo de $\mathbf{r}_A$, usaremos un conjunto de ejes $x', y', z'$ que coincidan con los ejes $X, Y, Z$ que giran a $\boldsymbol{\Omega}' = \boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_p$. Entonces

$$\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_p = \{5\mathbf{k}\} \text{ rad/s } (\boldsymbol{\Omega} \text{ no cambia de dirección con respecto a } XYZ.)$$
$$\dot{\boldsymbol{\Omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_p = \{2\mathbf{k}\} \text{ rad/s}^2$$
$$\mathbf{r}_A = \{2\mathbf{i}\} \text{ m}$$
$$\mathbf{v}_A = \dot{\mathbf{r}}_A = (\dot{\mathbf{r}}_A)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_p \times \mathbf{r}_A = \mathbf{0} + 5\mathbf{k} \times 2\mathbf{i} = \{10\mathbf{j}\} \text{ m/s}$$
$$\mathbf{a}_A = \ddot{\mathbf{r}}_A = [(\ddot{\mathbf{r}}_A)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_p \times (\dot{\mathbf{r}}_A)_{x'y'z'}] + \dot{\boldsymbol{\omega}}_p \times \mathbf{r}_A + \boldsymbol{\omega}_p \times \dot{\mathbf{r}}_A$$
$$= [\mathbf{0} + \mathbf{0}] + 2\mathbf{k} \times 2\mathbf{i} + 5\mathbf{k} \times 10\mathbf{j} = \{-50\mathbf{i} + 4\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2$$

*Movimiento de C con respecto a A.*

Aquí $(\mathbf{r}_{C/A})_{xyz}$ cambia de dirección con respecto a $x\ y\ z$. Para encontrar las derivadas con respecto al tiempo de $(\mathbf{r}_{C/A})_{xyz}$, use un conjunto de ejes $x'', y'', z''$ que giren a $\boldsymbol{\Omega}'' = \boldsymbol{\Omega}_{xyz} = \boldsymbol{\omega}_M$. Así

$$\boldsymbol{\Omega}_{xyz} = \boldsymbol{\omega}_M = \{3\mathbf{i}\} \text{ rad/s } (\boldsymbol{\Omega}_{xyz} \text{ no cambia de dirección con respecto a } xyz.)$$
$$\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{xyz} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_M = \{1\mathbf{i}\} \text{ rad/s}^2$$
$$(\mathbf{r}_{C/A})_{xyz} = \{-0.25\mathbf{k}\} \text{ m}$$
$$(\mathbf{v}_{C/A})_{xyz} = (\dot{\mathbf{r}}_{C/A})_{xyz} = (\dot{\mathbf{r}}_{C/A})_{xyz} + \boldsymbol{\omega}_M \times (\mathbf{r}_{C/A})_{xyz}$$
$$= -3\mathbf{k} + [3\mathbf{i} \times (-0.25\mathbf{k})] = \{0.75\mathbf{j} - 3\mathbf{k}\} \text{ m/s}$$
$$(\mathbf{a}_{C/A})_{xyz} = (\ddot{\mathbf{r}}_{C/A})_{xyz} = [(\ddot{\mathbf{r}}_{C/A})_{xyz} + \boldsymbol{\omega}_M \times (\dot{\mathbf{r}}_{C/A})_{xyz}] + \dot{\boldsymbol{\omega}}_M \times (\mathbf{r}_{C/A})_{xyz} + \boldsymbol{\omega}_M \times (\dot{\mathbf{r}}_{C/A})_{xyz}$$
$$= [-2\mathbf{k} + 3\mathbf{i} \times (-3\mathbf{k})] + (1\mathbf{i}) \times (-0.25\mathbf{k}) + (3\mathbf{i}) \times (0.75\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$$
$$= \{18.25\mathbf{j} + 0.25\mathbf{k}\} \text{ m/s}^2$$

*Movimiento de C.*

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/A} + (\mathbf{v}_{C/A})_{xyz}$$
$$= 10\mathbf{j} + [5\mathbf{k} \times (-0.25\mathbf{k})] + (0.75\mathbf{j} - 3\mathbf{k})$$
$$= \{10.8\mathbf{j} - 3\mathbf{k}\} \text{ m/s}$$ *Resp.*

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/A})_{xyz}$$
$$= (-50\mathbf{i} + 4\mathbf{j}) + [2\mathbf{k} \times (-0.25\mathbf{k})] + 5\mathbf{k} \times [5\mathbf{k} \times (-0.25\mathbf{k})]$$
$$+ 2[5\mathbf{k} \times (0.75\mathbf{j} - 3\mathbf{k})] + (18.25\mathbf{j} + 0.25\mathbf{k})$$
$$= \{-57.5\mathbf{i} + 22.2\mathbf{j} + 0.25\mathbf{k}\} \text{ m/s}^2$$ *Resp.*

## EJEMPLO 20.5

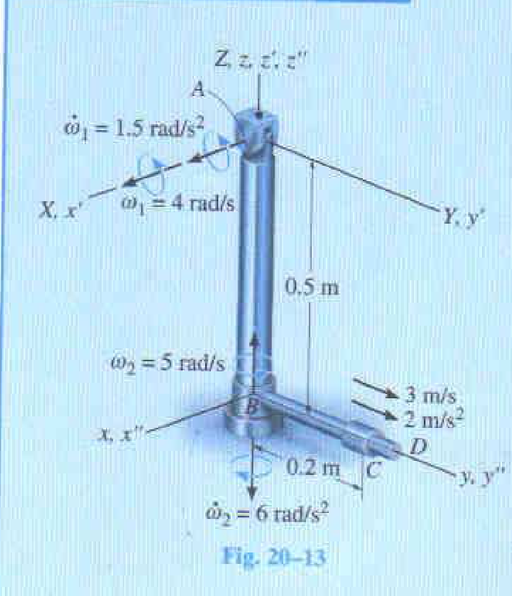



Fig. 20–13

El péndulo mostrado en la figura 20-13 consta de dos barras; $AB$ está soportada mediante un pasador colocado en $A$ y oscila sólo en el plano $Y$-$Z$, mientras que una chumacera instalada en $B$ permite a la barra unida $BD$ girar con respecto a la barra $AB$. En un instante dado, las barras tienen los movimientos angulares mostrados. Además, un collarín $C$, ubicado a 0.2 m de $B$, tiene velocidad de 3 m/s y aceleración de 2 m/s² a lo largo de la barra. Determine la velocidad y la aceleración del collarín en este instante.

### Solución I

*Ejes coordenados.* El origen del marco fijo $X$, $Y$, $Z$ se situará en $A$. Conviene observar el movimiento del collarín desde $B$, por lo que el origen del marco $x$, $y$, $z$ es ubicado en este punto. Seleccionaremos $\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1$ y $\mathbf{\Omega}_{xyz} = \boldsymbol{\omega}_2$.

*Ecuaciones cinemáticas.*

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/B} + (\mathbf{v}_{C/B})_{xyz}$$

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/B} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/B}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/B})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/B})_{xyz}$$

*Movimiento de B.* Para encontrar las derivadas con respecto al tiempo de $\mathbf{r}_B$, dejamos que los ejes $x'$, $y'$, $z'$ giren con $\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1$. Entonces

$$\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1 = \{4\mathbf{i}\} \text{ rad/s} \qquad \dot{\mathbf{\Omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 = \{1.5\mathbf{i}\} \text{ rad/s}^2$$

$$\mathbf{r}_B = \{-0.5\mathbf{k}\} \text{ m}$$

$$\mathbf{v}_B = \dot{\mathbf{r}}_B = (\dot{\mathbf{r}}_B)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_B = \mathbf{0} + 4\mathbf{i} \times (-0.5\mathbf{k}) = \{2\mathbf{j}\} \text{ m/s}$$

$$\mathbf{a}_B = \ddot{\mathbf{r}}_B = [(\ddot{\mathbf{r}}_B)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\dot{\mathbf{r}}_B)_{x'y'z'}] + \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \mathbf{r}_B + \boldsymbol{\omega}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_B$$
$$= [\mathbf{0} + \mathbf{0}] + 1.5\mathbf{i} \times (-0.5\mathbf{k}) + 4\mathbf{i} \times 2\mathbf{j} = \{0.75\mathbf{j} + 8\mathbf{k}\} \text{ m/s}^2$$

*Movimiento de C con respecto a B.*

Para encontrar las derivadas con respecto al tiempo de $(\mathbf{r}_{C/B})_{xyz}$, dejamos que los ejes $x''$, $y''$, $z''$ giren con $\mathbf{\Omega}_{xyz} = \boldsymbol{\omega}_2$. Entonces

$$\mathbf{\Omega}_{xyz} = \boldsymbol{\omega}_2 = \{5\mathbf{k}\} \text{ rad/s} \qquad \dot{\mathbf{\Omega}}_{xyx} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = \{-6\mathbf{k}\} \text{ rad/s}^2$$

$$(\mathbf{r}_{C/B})_{xyz} = \{0.2\mathbf{j}\} \text{ m}$$

$$(\mathbf{v}_{C/B})_{xyz} = (\dot{\mathbf{r}}_{C/B})_{xyz} = (\dot{\mathbf{r}}_{C/B})_{x''y''z''} + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\mathbf{r}_{C/B})_{xyz} = 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k} \times 0.2\mathbf{j} = \{-1\mathbf{i} + 3\mathbf{j}\} \text{ m/s}$$

$$(\mathbf{a}_{C/B})_{xyz} = (\ddot{\mathbf{r}}_{C/B})_{xyz} = [(\ddot{\mathbf{r}}_{C/B})_{x''y''z''} + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\dot{\mathbf{r}}_{C/B})_{x''y''z''}] + \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 \times (\mathbf{r}_{C/B})_{xyz} + \boldsymbol{\omega}_2 \times (\dot{\mathbf{r}}_{C/B})_{xyz}$$
$$= (2\mathbf{j} + 5\mathbf{k} \times 3\mathbf{j}) + (-6\mathbf{k} \times 0.2\mathbf{j}) + [5\mathbf{k} \times (-1\mathbf{i} + 3\mathbf{j})]$$
$$= \{-28.8\mathbf{i} - 3\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2$$

*Movimiento de C.*

$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/B} + (\mathbf{v}_{C/B})_{xyz} = 2\mathbf{j} + 4\mathbf{i} \times 0.2\mathbf{j} + (-1\mathbf{i} + 3\mathbf{j})$$
$$= \{-1\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 0.8\mathbf{k}\} \text{ m/s}$$ *Resp.*

$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/B} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/B}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/B})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/B})_{xyz}$$
$$= (0.75\mathbf{j} + 8\mathbf{k}) + (1.5\mathbf{i} \times 0.2\mathbf{j}) + [4\mathbf{i} \times (4\mathbf{i} \times 0.2\mathbf{j})]$$
$$+ 2[4\mathbf{i} \times (-1\mathbf{i} + 3\mathbf{j})] + (-28.8\mathbf{i} - 3\mathbf{j})$$
$$= \{-28.8\mathbf{i} - 5.45\mathbf{j} + 32.3\mathbf{k}\} \text{ m/s}^2$$ *Resp.*

## Solución II

*Ejes coordenados.* Aquí dejaremos que los ejes $x, y, z$ giren a

$$\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 = \{4\mathbf{i} + 5\mathbf{k}\} \text{ rad/s}$$

Entonces $\mathbf{\Omega}_{xyz} = \mathbf{0}$.

*Movimiento de B.*

De acuerdo con las restricciones del problema, $\boldsymbol{\omega}_1$ no cambia de dirección con respecto a $X, Y, Z$; sin embargo, la dirección de $\boldsymbol{\omega}_2$ es cambiada por $\boldsymbol{\omega}_1$. Así, para obtener $\dot{\mathbf{\Omega}}$ considere que los ejes $x', y', z'$ coinciden con los ejes $X, Y, Z$ en $A$, de manera que $\dot{\mathbf{\Omega}} = \boldsymbol{\omega}_1$. Luego, tomando la derivada de sus componentes,

$$\dot{\mathbf{\Omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 + \dot{\boldsymbol{\omega}}_2 = [(\dot{\boldsymbol{\omega}}_1)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_1] + [(\dot{\boldsymbol{\omega}}_2)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2]$$
$$= [1.5\mathbf{i} + \mathbf{0}] + [-6\mathbf{k} + 4\mathbf{i} \times 5\mathbf{k}] = \{1.5\mathbf{i} - 20\mathbf{j} - 6\mathbf{k}\} \text{ rad/s}^2$$

También, $\boldsymbol{\omega}_1$ cambia la dirección de $\mathbf{r}_B$ de manera que las derivadas con respecto al tiempo de $\mathbf{r}_B$ pueden ser calculadas usando los ejes con primas definidos líneas arriba. Por consiguiente,

$$\mathbf{v}_B = \dot{\mathbf{r}}_B = (\dot{\mathbf{r}}_B)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{r}_B$$
$$= \mathbf{0} + 4\mathbf{i} \times (-0.5\mathbf{k}) = \{2\mathbf{j}\} \text{ m/s}$$
$$\mathbf{a}_B = \ddot{\mathbf{r}}_B = [(\ddot{\mathbf{r}}_B)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_1 \times (\dot{\mathbf{r}}_B)_{x'y'z'}] + \dot{\boldsymbol{\omega}}_1 \times \mathbf{r}_B + \boldsymbol{\omega}_1 \times \dot{\mathbf{r}}_B$$
$$= [\mathbf{0} + \mathbf{0}] + 1.5\mathbf{i} \times (-0.5\mathbf{k}) + 4\mathbf{i} \times 2\mathbf{j} = \{0.75\mathbf{j} + 8\mathbf{k}\} \text{ m/s}^2$$

*Movimiento de C con respecto a B.*

$$\mathbf{\Omega}_{xyz} = \mathbf{0}$$
$$\dot{\mathbf{\Omega}}_{xyz} = \mathbf{0}$$
$$(\mathbf{r}_{C/B})_{xyz} = \{0.2\mathbf{j}\} \text{ m}$$
$$(\mathbf{v}_{C/B})_{xyz} = \{3\mathbf{j}\} \text{ m/s}$$
$$(\mathbf{a}_{C/B})_{xyz} = \{2\mathbf{j}\} \text{ m/s}^2$$

*Movimiento de C.*

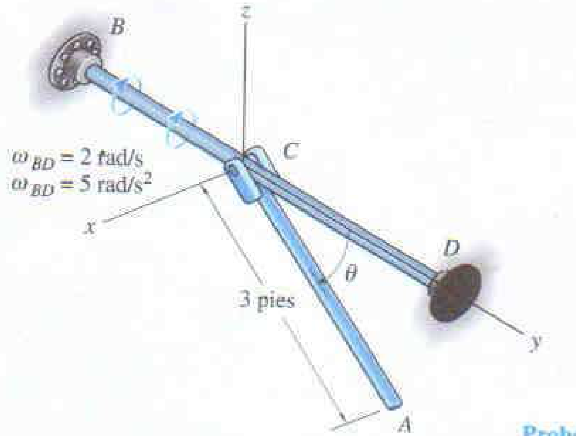
$$\mathbf{v}_C = \mathbf{v}_B + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/B} + (\mathbf{v}_{C/B})_{xyz}$$
$$= 2\mathbf{j} + [(4\mathbf{i} + 5\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{j})] + 3\mathbf{j}$$
$$= \{-1\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 0.8\mathbf{k}\} \text{ m/s} \qquad \textit{Resp.}$$
$$\mathbf{a}_C = \mathbf{a}_B + \dot{\mathbf{\Omega}} \times \mathbf{r}_{C/B} + \mathbf{\Omega} \times (\mathbf{\Omega} \times \mathbf{r}_{C/B}) + 2\mathbf{\Omega} \times (\mathbf{v}_{C/B})_{xyz} + (\mathbf{a}_{C/B})_{xyz}$$
$$= (0.75\mathbf{j} + 8\mathbf{k}) + [(1.5\mathbf{i} - 20\mathbf{j} - 6\mathbf{k}) \times (0.2\mathbf{j})]$$
$$+ (4\mathbf{i} + 5\mathbf{k}) \times [(4\mathbf{i} + 5\mathbf{k}) \times 0.2\mathbf{j}] + 2[(4\mathbf{i} + 5\mathbf{k}) \times 3\mathbf{j}] + 2\mathbf{j}$$
$$= \{-28.8\mathbf{i} - 5.45\mathbf{j} + 32.3\mathbf{k}\} \text{ m/s}^2 \qquad \textit{Resp.}$$

# PROBLEMAS

**20-31.** Resuelva el ejemplo 20-5 de manera que los ejes $x, y, z$ se muevan con traslación curvilínea, $\mathbf{\Omega} = \mathbf{0}$, en cuyo caso el collarín parece tener velocidad angular $\mathbf{\Omega}_{xyz} = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$ y movimiento radial.

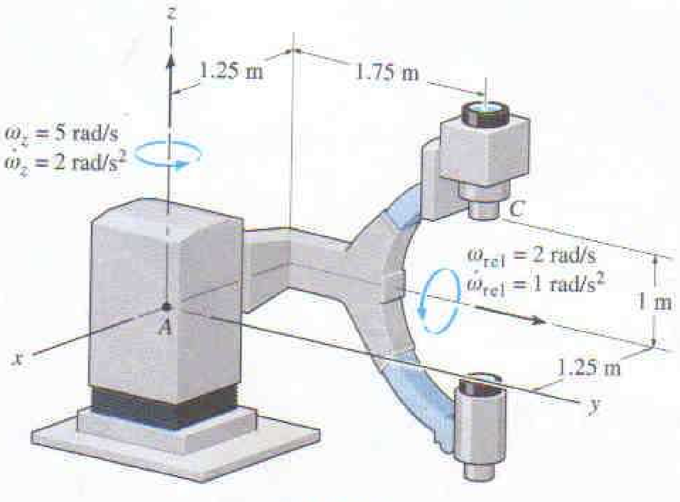
***20-32.** Resuelva el ejemplo 20-5 fijando ejes $x, y, z$ a la barra $BD$ de manera que $\Omega = \boldsymbol{\omega}_1 + \boldsymbol{\omega}_2$. En este caso el collarín parece moverse sólo radialmente hacia fuera a lo largo de $BD$; por consiguiente $\mathbf{\Omega}_{xyz} = \mathbf{0}$.

**20-33.** En un instante dado, la barra $BD$ está girando con respecto al eje $y$ a velocidad angular $\omega_{BD} = 2$ rad/s y aceleración angular $\dot{\omega} = 5$ rad/s². Además, cuando $\theta = 60°$, el eslabón $AC$ está girando hacia abajo de tal manera que $\dot{\theta} = 2$ rad/s y $\ddot{\theta} = 8$ rad/s². Determine la velocidad y la aceleración del punto $A$ sobre el eslabón en este instante.



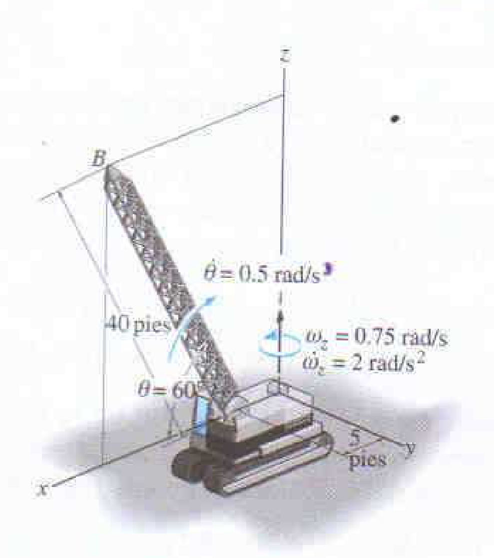

Probs. 20–33

**20-34.** Durante el instante mostrado, el marco de la cámara de rayos X está girando con respecto al eje vertical a $\omega_z = 5$ rad/s y $\dot{\omega} = 2$ rad/s². Con respecto al marco, el brazo está girando a $\omega_{rel} = 2$ rad/s y $\dot{\omega}_{rel} = 1$ rad/s². Determine la velocidad y la aceleración del centro de la cámara $C$ en este instante.



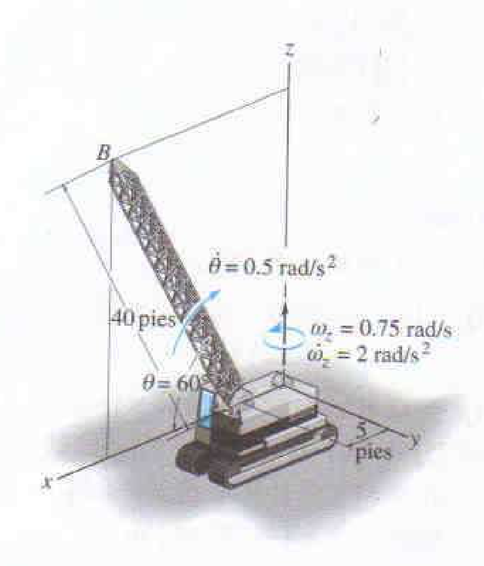

Prob. 20–34

**20-35.** El aguilón $AB$ de la grúa está girando con respecto al eje $z$ a velocidad angular $\omega_z = 0.75$ rad/s, la cual aumenta a $\dot{\omega}_z = 2$ rad/s². En el mismo instante, $\theta = 60°$ y el aguilón se encuentran girando hacia arriba a razón constante $\dot{\theta} = 0.5$ rad/s². Determine la velocidad y la aceleración de la punta $B$ del aguilón en este instante.



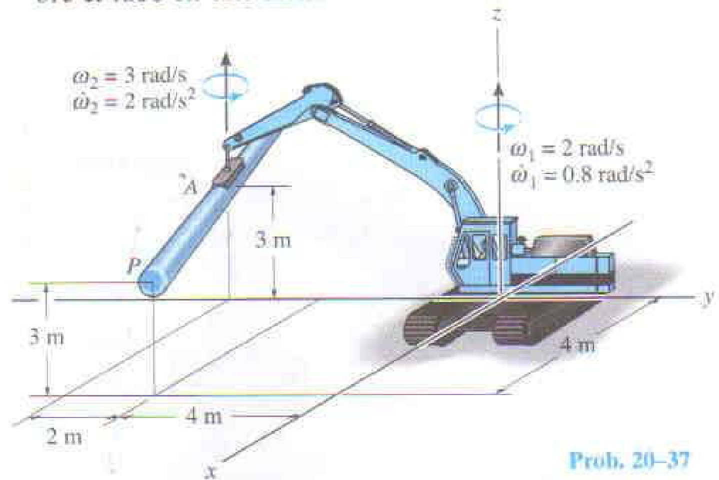

Prob. 20–35

***20-36.** El aguilón $AB$ de la grúa está girando con respecto al eje $z$ a velocidad angular $\omega_z = 0.75$ rad/s, la cual está aumentando a $\dot{\omega}_z = 2$ rad/s². En el mismo instante, $\theta = 60°$ y el aguilón están girando hacia arriba a $\dot{\theta} = 0.5$ rad/s², lo cual aumenta a $\ddot{\theta} = 0.75$ rad/s². Determine la velocidad y la aceleración de la punta $B$ del aguilón en este instante.




Prob. 20–36

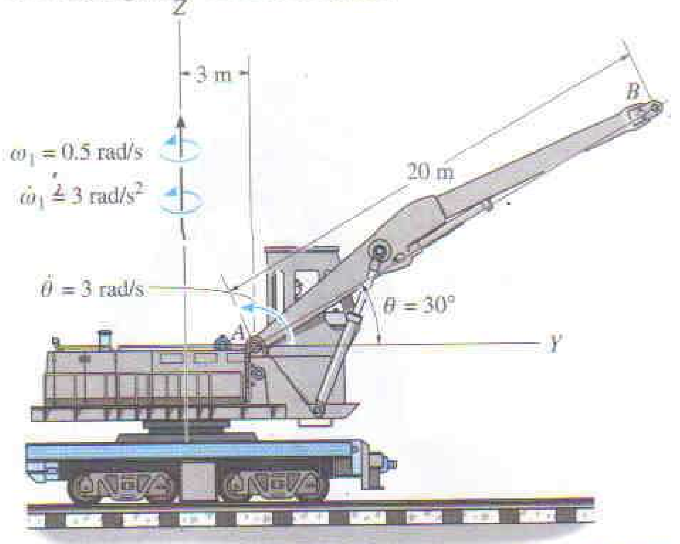
**20-37.** En el instante mostrado, el aguilón está girando con respecto al eje $z$ a velocidad angular $\omega_1 = 2$ rad/s y aceleración angular $\dot{\omega}_1 = 0.8$ rad/s$^2$. En este mismo instante el eslabón giratorio rota a $\omega_2 = 3$ rad/s cuando $\dot{\omega}_2 = 2$ rad/s$^2$, ambas medidas con respecto al aguilón. Determine la velocidad y la aceleración del punto $P$ sobre el tubo en este instante.



Prob. 20-37

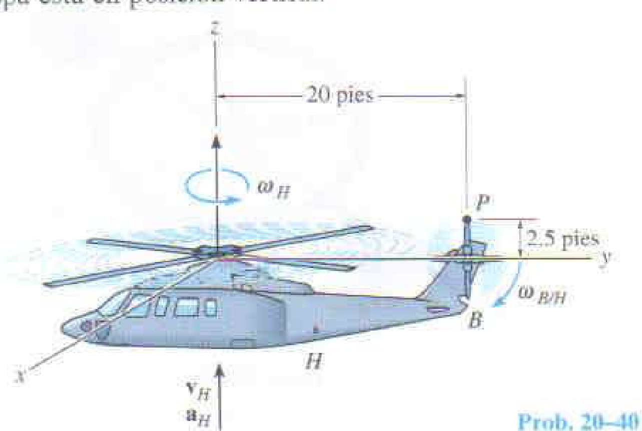
**20-38.** El aguilón $AB$ de la grúa locomotriz está girando con respecto al eje $Z$ a velocidad angular $\omega_1 = 0.5$ rad/s, la cual se incrementa a $\dot{\omega}_1 = 3$ rad/s$^2$. En este mismo instante, $\theta = 30°$ y el aguilón está girando hacia arriba a razón constante de $\dot{\theta} = 3$ rad/s. Determine la velocidad y la aceleración de la punta $B$ del aguilón en este instante.

**20-39.** La grúa locomotriz está viajando hacia la derecha a 2 m/s y tiene aceleración de 1.5 m/s$^2$, mientras que el aguilón se encuentra girando con respecto al eje $Z$ con velocidad angular $\omega_1 = 0.5$ rad/s, la cual está aumentando a $\dot{\omega}_1 = 3$ rad/s$^2$. En este mismo instante, $\theta = 30°$ y el aguilón está girando hacia arriba a razón constante de $\dot{\theta} = 3$ rad/s. Determine la velocidad y la aceleración de la punta $B$ del aguilón en este instante.



Probs. 20-38/39

***20-40.** En el instante mostrado, el helicóptero se está moviendo hacia arriba con velocidad $v_H = 4$ pies/s y tiene aceleración $a_H = 2$ pies/s$^2$. En el mismo instante, el marco $H$, *no* las aspas horizontales, está girando con respecto a un eje vertical a velocidad angular constante $\omega_H = 0.9$ rad/s. Si las aspas $B$ de la cola están girando a velocidad angular constante $\omega_{B/H} = 180$ rad/s, medida con relación a $H$, determine la velocidad y la aceleración del punto $P$, ubicado en la punta de una aspa, en el instante en que el aspa está en posición vertical.

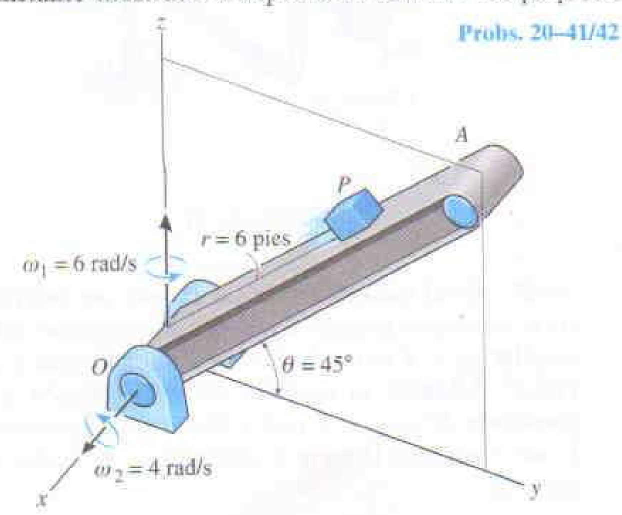


Prob. 20-40

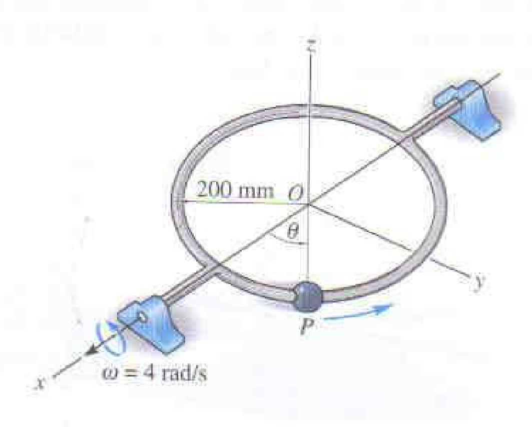
**20-41.** En el instante mostrado, el brazo $OA$ de la banda transportadora está girando con respecto al eje $z$ a velocidad angular constante $\omega_1 = 6$ rad/s, mientras que al mismo instante el brazo se encuentra rotando hacia arriba a la razón constante $\omega_2 = 4$ rad/s. Si la banda se mueve a razón constante $\dot{r} = 5$ pies/s, determine la velocidad y la aceleración del paquete $P$ en el instante mostrado. Desprecie el tamaño del paquete.

**20-42.** En el instante mostrado, el brazo $OA$ de la banda transportadora está girando alrededor del eje $z$ con velocidad angular constante $\omega_1 = 6$ rad/s, mientras que al mismo instante el brazo se encuentra girando hacia arriba a razón constante de $\omega_2 = 4$ rad/s. Si la banda está avanzando a razón de $\dot{r} = 5$ pies/s, la cual aumenta a $\ddot{r} = 8$ pies/s$^2$, determine la velocidad y la aceleración del paquete $P$ en el instante mostrado. Desprecie el tamaño del paquete.

Probs. 20-41/42

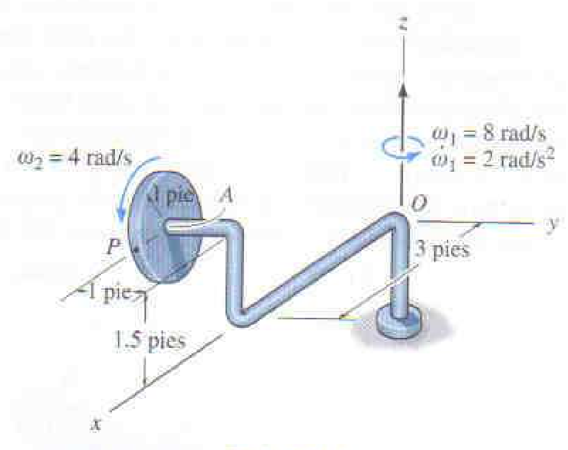


**20-43.** La partícula $P$ se desliza alrededor del aro circular con velocidad angular constante de $\dot{\theta} = 6$ rad/s, mientras que el aro gira con respecto al eje $x$ a razón constante de $\omega = 4$ rad/s. Si en el instante mostrado el aro está en el plano $x$-$y$ y el ángulo $\theta = 45°$, determine la velocidad y la aceleración de la partícula en este instante.




Prob. 20–43

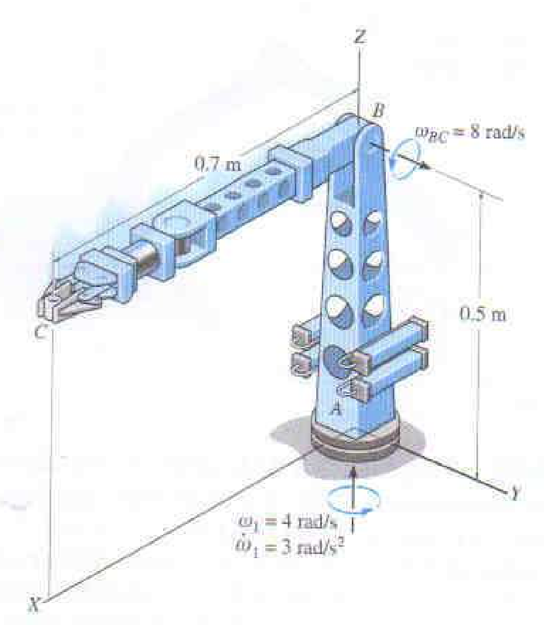
***20-44.** En el instante dado, la barra está girando con respecto al eje $z$ a velocidad angular $\omega_1 = 8$ rad/s y aceleración angular $\dot{\omega}_1 = 2$ rad/s$^2$. En este mismo instante, el disco está girando a razón constante $\omega_2 = 4$ rad/s, medida *con relación* a la barra. Determine la velocidad y la aceleración del punto $P$ sobre el disco en este instante.




Prob. 20–44

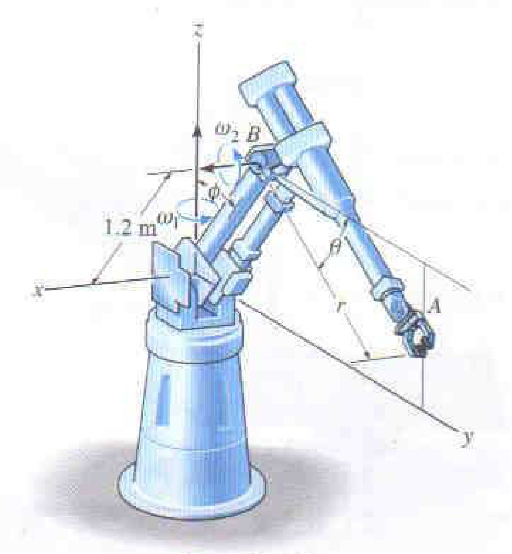
**20-45.** En el instante mostrado, la base del brazo robótico se encuentra girando alrededor del eje $z$ con velocidad angular $\omega_1 = 4$ rad/s, la cual está aumentando a $\dot{\omega}_1 = 3$ rad/s$^2$. Además, el aguilón $BC$ está girando a razón constante de $\omega_{BC} = 8$ rad/s. Determine la velocidad y la aceleración de la parte $C$ sostenida en su tenaza en este instante.

**20-46.** En el instante mostrado, la base del brazo robótico se encuentra girando alrededor del eje $z$ con velocidad angular $\omega_1 = 4$ rad/s, la cual está aumentando a $\dot{\omega}_1 = 3$ rad/s$^2$. El segmento $BC$ está rotando a $\omega_{BC} = 8$ rad/s, la cual aumenta a $\dot{\omega}_{BC} = 2$ rad/s$^2$. Determine la velocidad y la aceleración de la parte $C$ sostenida en su tenaza en este instante.




Probs. 20–45/46

**20-47.** En el instante mostrado, el manipulador industrial está girando con respecto al eje $z$ a $\omega_1 = 5$ rad/s, y alrededor de la junta $B$ a $\omega_2 = 2$ rad/s. Determine la velocidad y la aceleración de la tenaza $A$ en este instante, cuando $\phi = 30°$, $\theta = 45°$ y $r = 1.6$ m.




Prob. 20–47

## REPASO DEL CAPÍTULO

- ***Rotación con respecto a un punto fijo.*** Cuando un cuerpo gira con respecto a un punto fijo $O$, entonces los puntos sobre el cuerpo siguen una trayectoria que se encuentra sobre la superficie de una esfera. Las rotaciones infinitesimales son cantidades vectoriales, mientras que las rotaciones finitas no lo son.

  Como la aceleración angular es una razón de cambio con respecto al tiempo de la velocidad angular, entonces debemos tomar en cuenta los cambios tanto en magnitud como en dirección de $\boldsymbol{\omega}$ al calcular su derivada. Para hacer esto, la velocidad angular es a menudo especificada en términos de sus movimientos componentes, de tal manera que algunas de esas componentes permanezcan constantes con respecto a ejes $x$, $y$, $z$ rotatorios. Si este es el caso, entonces la derivada con respecto al tiempo relativa al eje fijo puede ser determinada a partir de la ecuación 20-6, esto es,

$$\dot{\mathbf{A}} = (\dot{\mathbf{A}})_{xyz} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{A}$$

  Una vez conocidas $\boldsymbol{\omega}$ y $\boldsymbol{\alpha}$, la velocidad y la aceleración del punto $P$ pueden ser determinadas con

$$\mathbf{a} = \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r})$$

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$$

- ***Movimiento general.*** Si el cuerpo experimenta un movimiento general, entonces el movimiento de un punto $B$ en el cuerpo puede ser relacionado al movimiento de otro punto $A$ usando un análisis de movimiento relativo, junto con ejes trasladables en $A$. Las relaciones son

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \boldsymbol{\alpha} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{B/A})$$

- ***Análisis del movimiento relativo usando ejes en traslación y en rotación.*** El movimiento de dos puntos $A$ y $B$ sobre un cuerpo, sobre una serie de cuerpos conectados o ubicados sobre dos trayectorias diferentes, puede ser relacionado usando un análisis de movimiento relativo con ejes en rotación y en traslación en $A$. Las relaciones son

$$\mathbf{v}_B = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A} + (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$$

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \dot{\boldsymbol{\Omega}} \times \mathbf{r}_{B/A} + \boldsymbol{\Omega} \times (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{r}_{B/A}) + 2\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}_{B/A})_{xyz} + (\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$$

  Al aplicar estas ecuaciones, es importante tomar en cuenta los cambios en magnitud y dirección de $\mathbf{r}_A$, $(\mathbf{r}_{B/A})_{xyz}$, $\boldsymbol{\Omega}$ y $\boldsymbol{\Omega}_{xyz}$ al tomar sus derivadas con respecto al tiempo para encontrar $\mathbf{v}_A$, $\mathbf{a}_A$, $(\mathbf{v}_{B/A})_{xyz}$, $(\mathbf{a}_{B/A})_{xyz}$ y $\dot{\boldsymbol{\Omega}}$, y $\dot{\boldsymbol{\Omega}}_{xyz}$. Para hacer esto apropiadamente, debe usarse la ecuación 20-6.



El diseño de los juegos mecánicos de los parques de diversiones requiere un análisis de fuerzas que depende del movimiento tridimensional de tales juegos.

CAPÍTULO 21

# Cinética tridimensional de un cuerpo rígido

## OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

- Presentar los métodos necesarios para encontrar los momentos de inercia y los productos de inercia de un cuerpo con respecto a varios ejes.
- Mostrar cómo aplicar los principios del trabajo y la energía y del momentum lineal y el momentum angular a un cuerpo rígido que tenga movimiento tridimensional.
- Desarrollar y aplicar las ecuaciones de movimiento en tres dimensiones.
- Estudiar el movimiento de un giróscopo y el movimiento libre de torca.

## *21.1 Momentos y productos de inercia

Al estudiar la cinética plana de un cuerpo, fue necesario introducir el momento de inercia $I_G$, el cual se calculó con respecto a un eje perpendicular al plano del movimiento y pasaba por el centro de masa $G$ del cuerpo. Para el análisis cinético del movimiento tridimensional, ocasionalmente será necesario calcular seis cantidades inerciales. Estos términos, llamados momentos y productos de inercia, describen de una manera particular la distribución de masa para un cuerpo con respecto a un sistema coordenado dado que tiene orientación específica y punto de origen.

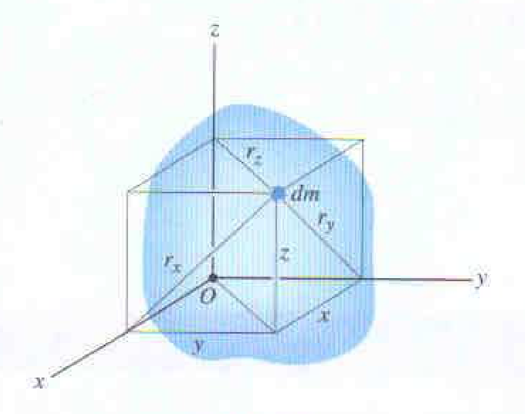



Fig. 21–1

**Momento de inercia.** Considere el cuerpo rígido mostrado en la figura 21-1. El *momento de inercia* para un elemento diferencial $dm$ del cuerpo con respecto a cualquiera de los tres ejes coordenados es definido como el producto de la masa del elemento y el cuadrado de la distancia más corta del eje al elemento. Por ejemplo, como se ve en la figura, $r_x = \sqrt{y^2 + z^2}$, de modo que el momento de inercia de masa de $dm$ con respecto al eje $x$ es

$$dI_{xx} = r_x^2\, dm = (y^2 + z^2)\, dm$$

El momento de inercia $I_{xx}$ para el cuerpo es determinado integrando esta expresión sobre toda la masa del cuerpo. Por consiguiente, para cada uno de los ejes, podemos escribir

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_m r_x^2\, dm = \int_m (y^2 + z^2)\, dm \\ I_{yy} &= \int_m r_y^2\, dm = \int_m (x^2 + z^2)\, dm \\ I_{zz} &= \int_m r_z^2\, dm = \int_m (x^2 + y^2)\, dm \end{aligned} \qquad (21\text{–}1)$$

Aquí se aprecia que el momento de inercia es *siempre una cantidad positiva*, puesto que es la suma del producto de la masa $dm$, que es siempre positiva, y las distancias al cuadrado.

**Producto de inercia.** El *producto de inercia* para un elemento diferencial $dm$ es definido, con respecto a un conjunto de *dos planos ortogonales*, como el producto de la masa del elemento y las distancias perpendiculares (o más cortas) de los planos al elemento. Por ejemplo, esta distancia es $x$ al plano $y$–$z$ y es $y$ al plano $x$–$z$, figura 21-1. El producto de inercia $dI_{xy}$ para el elemento $dm$ es, por tanto

$$dI_{xy} = xy\, dm$$

También advierta que $dI_{yx} = dI_{xy}$. Integrando sobre toda la masa, el producto de inercia del cuerpo para cada combinación de planos puede ser expresado como

$$\begin{aligned} I_{xy} = I_{yx} &= \int_m xy\, dm \\ I_{yz} = I_{zy} &= \int_m yz\, dm \\ I_{xz} = I_{zx} &= \int_m xz\, dm \end{aligned} \qquad (21\text{–}2)$$

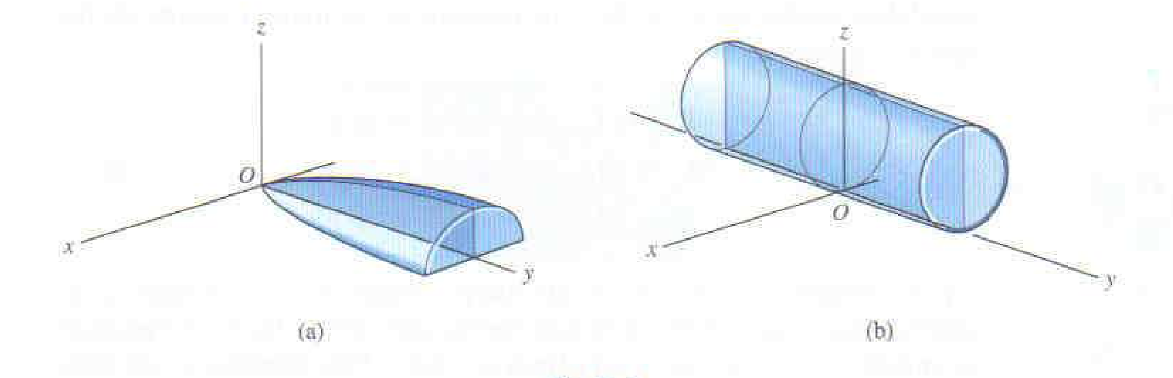



Fig. 21–2

A diferencia del momento de inercia, que es siempre positivo, el producto de inercia puede ser positivo, negativo o cero. El resultado depende de los signos de las dos coordenadas definitorias, las cuales varían independientemente una de otra. En particular, si uno o ambos planos ortogonales son *planos de simetría* para la masa, el *producto de inercia* con respecto a esos planos será *cero*. En tales casos, los elementos de masa se presentan en *pares* ubicados a cada lado del plano de simetría. En un lado del plano el producto de inercia para el elemento será positivo, mientras que en el otro lado el producto de inercia para el correspondiente elemento será negativo, y por tanto la suma será igual a cero. Ejemplos de esto se muestran en la figura 21-2. En el primer caso, figura 21-2*a*, el plano $y$–$z$ es un plano de simetría, y por tanto $I_{xy} = I_{xz} = 0$. El cálculo de $I_{yz}$ dará un resultado *positivo*, ya que todos los elementos de masa son ubicados usando sólo coordenadas $y$ y $z$ positivas. Para el cilindro, con los ejes coordenados ubicados como se muestra en la figura 21-2*b*, ambos planos $x$–$z$ y $y$–$z$ son planos de simetría. Así, $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$.

**Teoremas de los ejes paralelos y de los planos paralelos.** Los métodos de integración que se usan para determinar el momento de inercia de un cuerpo fueron descritos en la sección 17.1. También se analizaron métodos para determinar el momento de inercia de un cuerpo compuesto, esto es, un cuerpo que consta de segmentos simples, como los tabulados en la cubierta interna posterior de este libro. En estos dos casos, a menudo se usa el *teorema de los ejes paralelos* para efectuar los cálculos. Este teorema, que fue desarrollado en la sección 17.1, es usado para transferir el momento de inercia de un cuerpo desde un eje que pasa por su centro de masa $G$ hasta un eje paralelo que pasa por algún otro punto. En cuanto a esto, si $G$ tiene coordenadas $x_G, y_G, z_G$ con respecto a los ejes $x, y, z$, figura 21-3, entonces las ecuaciones de los ejes

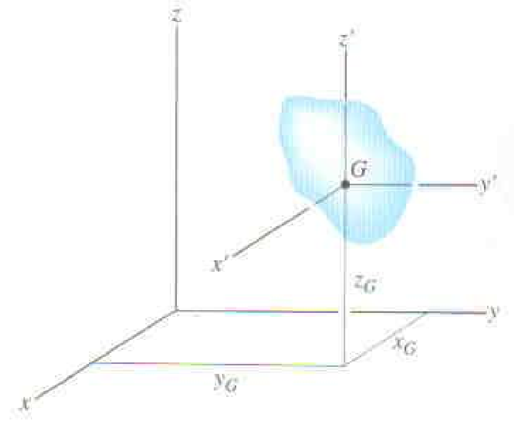



Fig. 21–3



paralelos usadas para calcular los momentos de inercia acerca de los ejes $x, y, z$ son

$$
\begin{aligned}
I_{xx} &= (I_{x'x'})_G + m(y_G^2 + z_G^2) \\
I_{yy} &= (I_{y'y'})_G + m(x_G^2 + z_G^2) \\
I_{zz} &= (I_{z'z'})_G + m(x_G^2 + y_G^2)
\end{aligned}
\qquad (21\text{–}3)
$$

Los productos de inercia de un cuerpo compuesto se calculan de la misma manera que los momentos de inercia del cuerpo. Sin embargo, aquí es importante el *teorema de los planos paralelos*. Este teorema se usa para transferir los productos de inercia del cuerpo desde un conjunto de tres planos ortogonales que pasan por el centro de masa del cuerpo hasta un conjunto correspondiente de tres planos paralelos que pasan por algún otro punto $O$. Definiendo las distancias perpendiculares entre los planos como $x_G, y_G$ y $z_G$, figura 21-3, las ecuaciones de los planos paralelos pueden escribirse como

$$
\begin{aligned}
I_{xy} &= (I_{x'y'})_G + m x_G y_G \\
I_{yz} &= (I_{y'z'})_G + m y_G z_G \\
I_{zx} &= (I_{z'x'})_G + m z_G x_G
\end{aligned}
\qquad (21\text{–}4)
$$

La derivación de estas fórmulas es similar a la dada para las ecuaciones de los ejes paralelos en la sección 17.1.

**Tensor de inercia.** Las propiedades inerciales de un cuerpo son completamente caracterizadas por nueve términos, seis de los cuales son independientes entre sí. Este conjunto de términos se define usando las ecuaciones 21-1 y 21-2 y puede ser escrito como

$$
\begin{pmatrix}
I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\
-I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\
-I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz}
\end{pmatrix}
$$

Este arreglo se llama *tensor de inercia*. Tiene un conjunto único de valores para un cuerpo cuando se calcula para cada ubicación del origen $O$ y cada orientación de los ejes coordenados.

En general, para el punto $O$ podemos especificar una inclinación única de ejes para la cual los productos de inercia para el cuerpo son cero al calcularlos con respecto a estos ejes. Cuando se hace esto, se dice que el tensor de inercia está "diagonalizado" y puede ser escrito en la forma simplificada

$$
\begin{pmatrix}
I_x & 0 & 0 \\
0 & I_y & 0 \\
0 & 0 & I_z
\end{pmatrix}
$$

Aquí $I_x = I_{xx}$, $I_y = I_{yy}$, e $I_z = I_{zz}$ son llamados los *momentos principales de inercia* para el cuerpo, y se calculan a partir de los *ejes principales de inercia*. De estos tres momentos principales de inercia, uno será un máximo y otro un mínimo de los momentos de inercia del cuerpo.



El comportamiento dinámico del transbordador espacial al orbitar la Tierra puede ser previsto sólo si sus momentos y productos de inercia son conocidos.

La determinación matemática de las direcciones de los ejes principales de inercia no se verá aquí (vea el problema 21-21). Sin embargo, hay muchos casos en que los ejes principales pueden ser determinados por inspección. En el análisis anterior vimos que si los ejes coordenados están orientados de manera que *dos* de los tres planos ortogonales que contienen los ejes son planos de *simetría* para el cuerpo, entonces todos los productos de inercia para el cuerpo son cero con respecto a los planos coordenados, y por tanto los ejes coordenados son ejes principales de inercia. Por ejemplo, los ejes $x$, $y$, $z$ mostrados en la figura 21-2$b$ representan los ejes principales de inercia para el cilindro en el punto $O$.

**Momentos de inercia con respecto a un eje arbitrario.** Considere el cuerpo mostrado en la figura 21-4, donde los nueve elementos del tensor de inercia han sido calculados para los ejes $x$, $y$, $z$ con origen en $O$. Aquí deseamos determinar el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje $Oa$, para el cual su dirección es definida por el vector unitario $\mathbf{u}_a$. Por definición $I_{Oa} = \int b^2\,dm$, donde $b$ es la *distancia perpendicular* desde $dm$ hasta $Oa$. Si la posición de $dm$ es ubicada usando $\mathbf{r}$, entonces $b = r \operatorname{sen} \theta$, que representa la *magnitud* del producto cruz $\mathbf{u}_a \times \mathbf{r}$. Por tanto, el momento de inercia puede ser expresado como

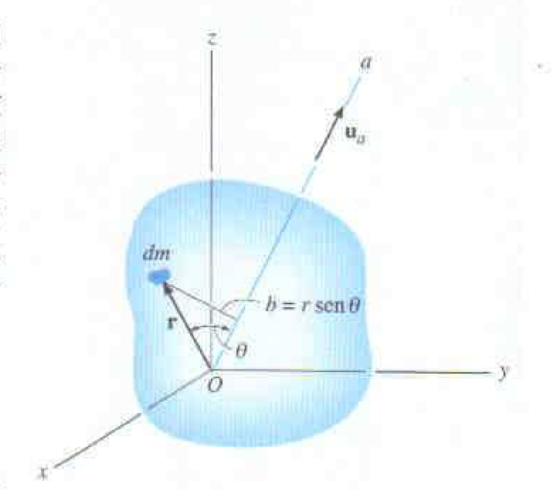



Fig. 21-4

$$I_{Oa} = \int_m |(\mathbf{u}_a \times \mathbf{r})|^2\,dm = \int_m (\mathbf{u}_a \times \mathbf{r}) \cdot (\mathbf{u}_a \times \mathbf{r})\,dm$$

Si $\mathbf{u}_a = u_x\mathbf{i} + u_y\mathbf{j} + u_z\mathbf{k}$ y $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, de manera que $\mathbf{u}_a \times \mathbf{r} = (u_yz - u_zy)\mathbf{i} + (u_zx - u_xz)\mathbf{j} + (u_xy - u_yx)\mathbf{k}$, entonces, después de sustituir y efectuar las operaciones de producto punto, podemos escribir el momento de inercia como

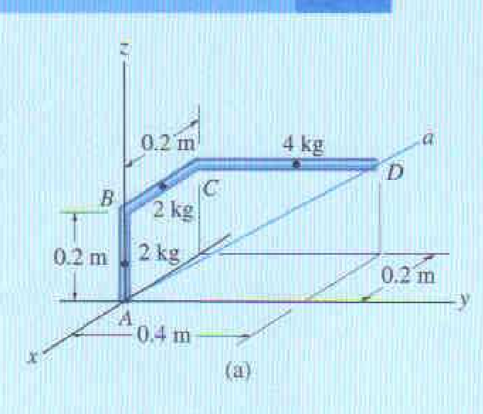
$$\begin{aligned} I_{Oa} &= \int_m [(u_yz - u_zy)^2 + (u_zx - u_xz)^2 + (u_xy - u_yx)^2]\,dm \\ &= u_x^2\int_m (y^2 + z^2)\,dm + u_y^2\int_m (z^2 + x^2)\,dm + u_z^2\int_m (x^2 + y^2)\,dm \\ &\qquad - 2u_xu_y\int_m xy\,dm - 2u_yu_z\int_m yz\,dm - 2u_zu_x\int_m zx\,dm \end{aligned}$$

Observando que las integrales son los momentos y productos de inercia del cuerpo, ecuaciones 21-1 y 21-2, tenemos

$$I_{Oa} = I_{xx}u_x^2 + I_{yy}u_y^2 + I_{zz}u_z^2 - 2I_{xy}u_xu_y - 2I_{yz}u_yu_z - 2I_{zx}u_zu_x \quad (21\text{–}5)$$

Entonces, si el tensor de inercia es especificado para los ejes $x$, $y$, $z$, el momento de inercia del cuerpo con respecto al eje $Oa$ inclinado puede encontrarse usando la ecuación 21-5. Para realizar el cálculo deben determinarse los cosenos directores $u_x$, $u_y$, $u_z$ de los ejes. Estos términos especifican los cosenos de los ángulos coordenados de dirección $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ formados entre el eje positivo $Oa$ y los ejes positivos $x$, $y$, $z$, respectivamente (vea el Apéndice C).

## EJEMPLO 21.1




Determine el momento de inercia de la barra doblada mostrada en la figura 21-5*a* con respecto al eje *Aa*. La masa de cada uno de los tres segmentos se muestra en la figura.

### Solución

Antes de aplicar la ecuación 21-5, es necesario determinar primero los momentos y productos de inercia de la barra con respecto a los ejes *x*, *y*, *z*. Esto se hace usando la fórmula para el momento de inercia de una barra esbelta, $I = \frac{1}{12} ml^2$, y los teoremas de los ejes paralelos y de los planos paralelos, ecuaciones 21-3 y 21-4. Dividiendo la barra en tres partes y ubicando el centro de masa de cada segmento, figura 21-5*b*, tenemos

$$I_{xx} = [\tfrac{1}{12}(2)(0.2)^2 + 2(0.1)^2] + [0 + 2(0.2)^2] + [\tfrac{1}{12}(4)(0.4)^2 + 4((0.2)^2 + (0.2)^2)] = 0.480 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_{yy} = [\tfrac{1}{12}(2)(0.2)^2 + 2(0.1)^2] + [\tfrac{1}{12}(2)(0.2)^2 + 2((-0.1)^2 + (0.2)^2)] + [0 + 4((-0.2)^2 + (0.2)^2)] = 0.453 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_{zz} = [0 + 0] + [\tfrac{1}{12}(2)(0.2)^2 + 2(0.1)^2] + [\tfrac{1}{12}(4)(0.4)^2 + 4((-0.2)^2 + (0.2)^2)] = 0.400 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_{xy} = [0 + 0] + [0 + 0] + [0 + 4(-0.2)(0.2)] = -0.160 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_{yz} = [0 + 0] + [0 + 0] + [0 + 4(0.2)(0.2)] = 0.160 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

$$I_{zx} = [0 + 0] + [0 + 2(0.2)(-0.1)] + [0 + 4(0.2)(-0.2)] = -0.200 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

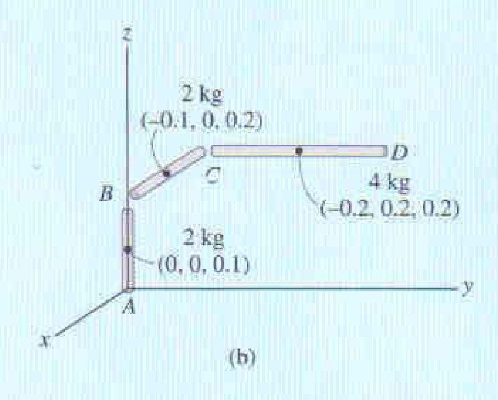



Fig. 21-5

El eje *Aa* es definido por el vector unitario

$$\mathbf{u}_{Aa} = \frac{\mathbf{r}_D}{r_D} = \frac{-0.2\mathbf{i} + 0.4\mathbf{j} + 0.2\mathbf{k}}{\sqrt{(-0.2)^2 + (0.4)^2 + (0.2)^2}} = -0.408\mathbf{i} + 0.816\mathbf{j} + 0.408\mathbf{k}$$

Entonces,

$$u_x = -0.408 \qquad u_y = 0.816 \qquad u_z = 0.408$$

Sustituyendo estos resultados en la ecuación 21-5 obtenemos

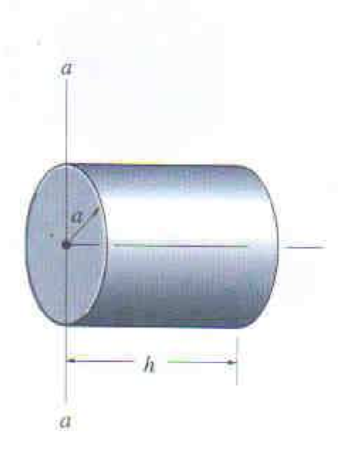
$$\begin{aligned} I_{Aa} &= I_{xx}u_x^2 + I_{yy}u_y^2 + I_{zz}u_z^2 - 2I_{xy}u_xu_y - 2I_{yz}u_yu_z - 2I_{zx}u_zu_x \\ &= 0.480(-0.408)^2 + (0.453)(0.816)^2 + 0.400(0.408)^2 \\ &\quad - 2(-0.160)(-0.408)(0.816) - 2(0.160)(0.816)(0.408) \\ &\quad - 2(-0.200)(0.408)(-0.408) \\ &= 0.169 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \end{aligned}$$

*Resp.*

# PROBLEMAS

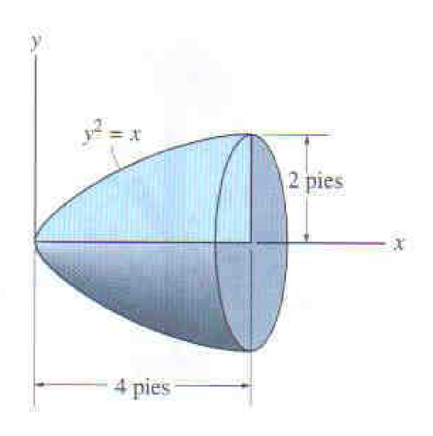
**21-1.** Demuestre que la suma de los momentos de inercia de un cuerpo, $I_{xx} + I_{yy} + I_{zz}$, es independiente de la orientación de los ejes $x$, $y$, $z$ y depende sólo de la ubicación del origen.

**21-2.** Determine el momento de inercia del cilindro con respecto al eje $a$-$a$. El cilindro tiene masa $m$.




Prob. 21–2

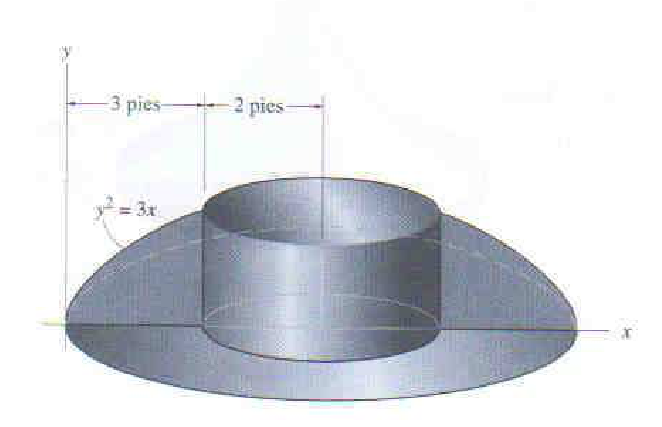
**21-3.** Determine el momento de inercia $I_y$ del sólido generado al girar el área sombreada alrededor del eje $x$. La densidad del material es $\rho = 12$ slug/pie$^3$.




Prob. 21–3

***21-4.** Determine el producto de inercia $I_{xy}$ del cuerpo formado al girar el área sombreada alrededor de la línea $x = 5$ pies. Exprese el resultado en términos de la densidad $\rho$ del material.

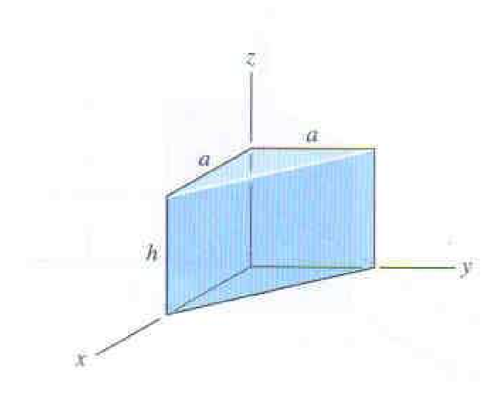
**21-5.** Determine el momento de inercia $I_y$ del cuerpo formado al girar el área sombreada alrededor de la línea $x = 5$ pies. Exprese el resultado en términos de la densidad $\rho$ del material.




Probs. 21–4/5

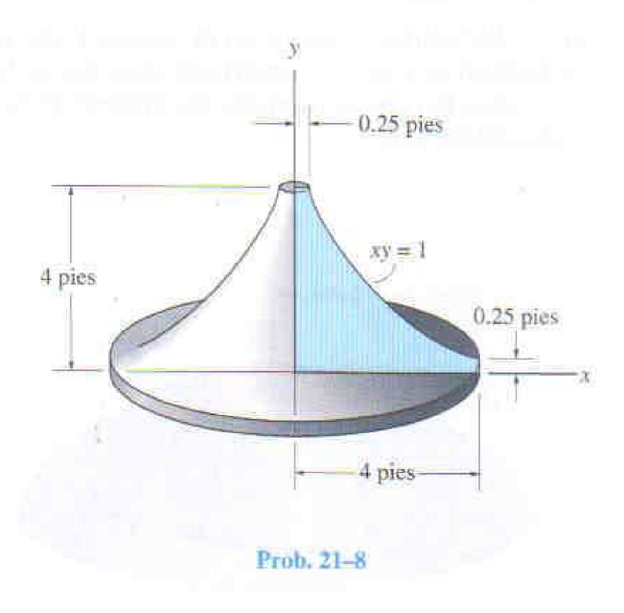
**21-6.** Determine por integración directa el producto de inercia $I_{yz}$ para el prisma homogéneo. La densidad del material es $\rho$. Exprese el resultado en términos de la masa $m$ del prisma.

**21-7.** Determine por integración directa el producto de inercia $I_{xy}$ para el prisma homogéneo. La densidad del material es $\rho$. Exprese el resultado en términos de la masa $m$ del prisma.



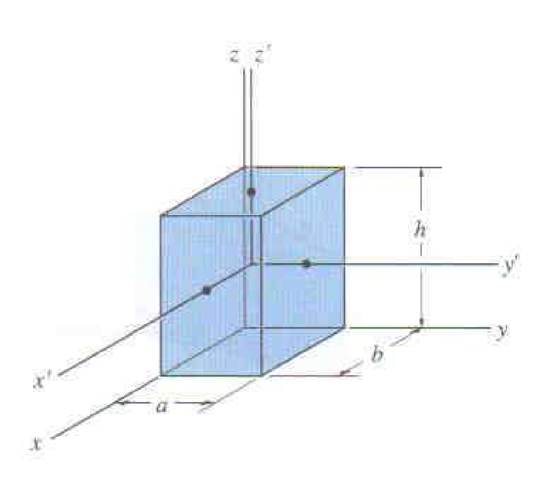

Probs. 21–6/7

*21-8. Determine los radios de giro $k_x$ y $k_y$ para el sólido formado al girar el área sombreada con respecto al eje $y$. La densidad del material es $\rho$.



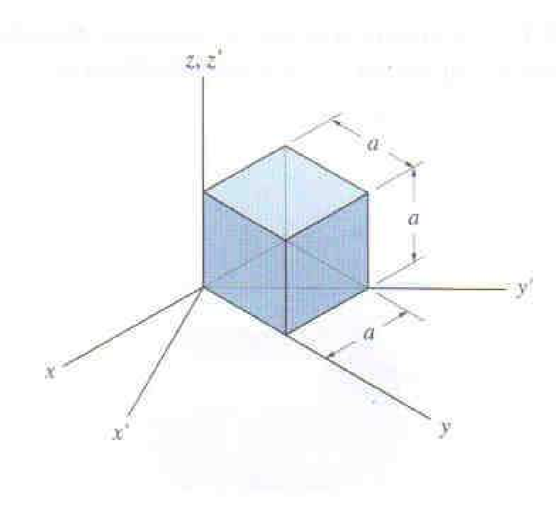

Prob. 21-8

21-9. Determine el momento de inercia de masa del bloque homogéneo con respecto a su eje $x'$ centroidal. La masa del bloque es $m$.



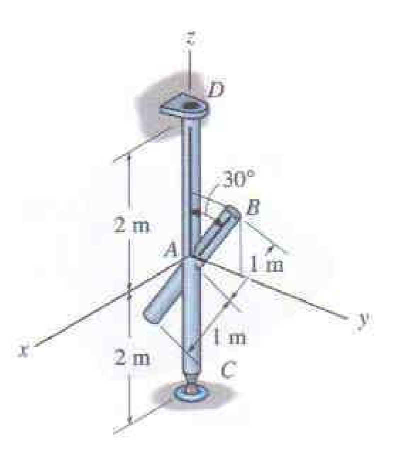

Prob. 21-9

21-10. Determine los elementos del tensor de inercia para el cubo con respecto al sistema coordenado $x$, $y$, $z$. La masa del cubo es $m$.



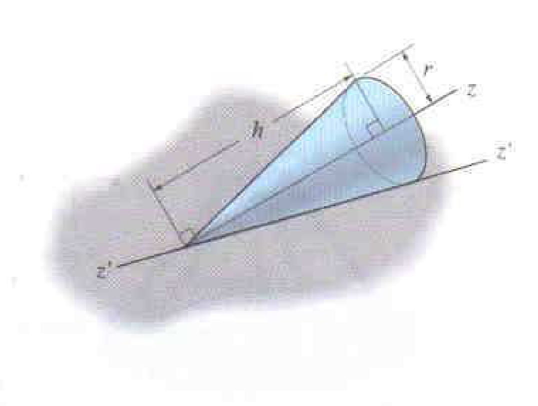

Prob. 21-10

21-11. Determine los momentos de inercia con respecto a los ejes $x$, $y$, $z$ del conjunto de barras. Las barras tienen masa de 0.75 kg/m.



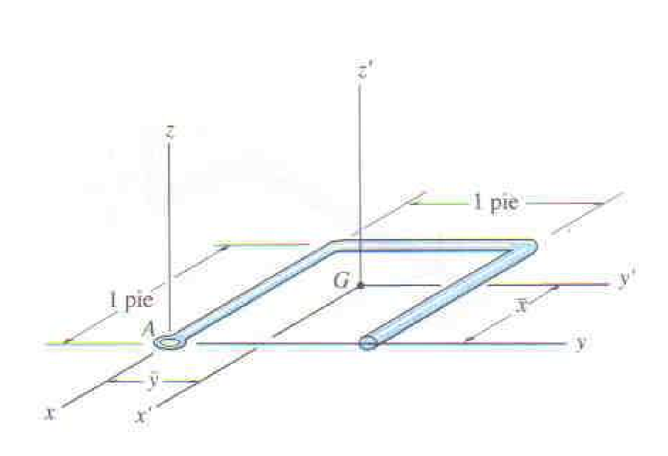

Prob. 21-11

*21-12. Determine el momento de inercia del cono con respecto al eje $z'$. El peso del cono es de 15 lb, la *altura* es $h = 1.5$ pies, y el radio es $r = 0.5$ pies.



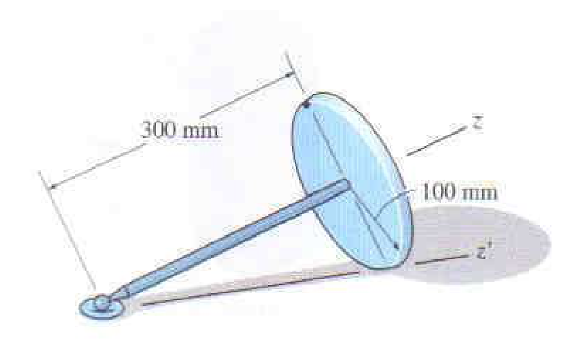

Prob. 21-12

21-13. La barra doblada tiene un peso de 1.5 lb/pie. Localice el centro de gravedad $G(\overline{x}, \overline{y})$ y determine los momentos de inercia principales $I_{x'}$, $I_y$ e $I_{z'}$ de la barra con respecto a los ejes $x'$, $y'$, $z'$.




Prob. 21-13

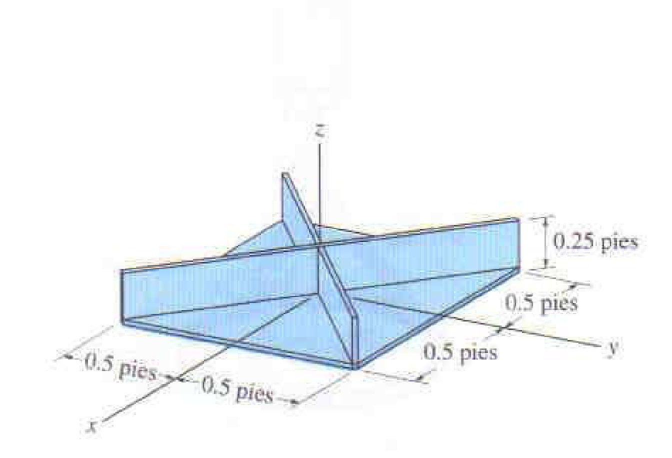
21-14. Determine el momento de inercia de la barra de 1.5 kg y del disco de 4 kg con respecto al eje $z'$.




Prob. 21-14

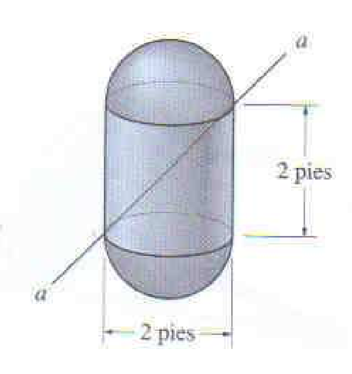
21-15. Determine el momento de inercia $I_x$ del conjunto de placas. Las placas tienen peso específico de 6 lb/pie$^2$.

*21-16. Determine el producto de inercia $I_{yz}$ del conjunto de placas. Las placas tienen peso de 6 lb/pie$^2$.



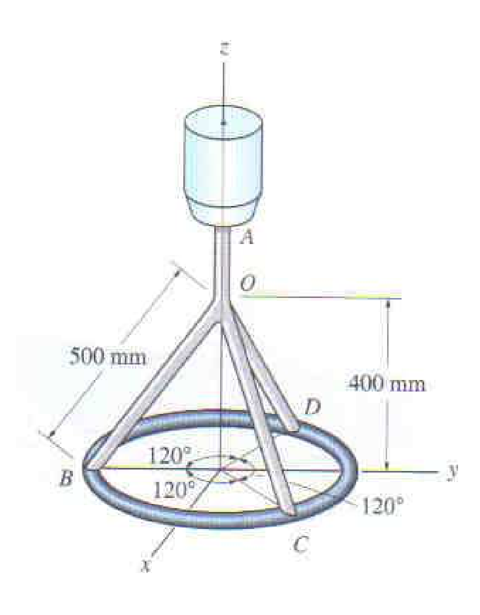

Probs. 21-15/16

**21-17.** Determine el momento de inercia del cuerpo compuesto con respecto al eje *aa*. El cilindro pesa 20 lb y cada semiesfera pesa 10 lb.



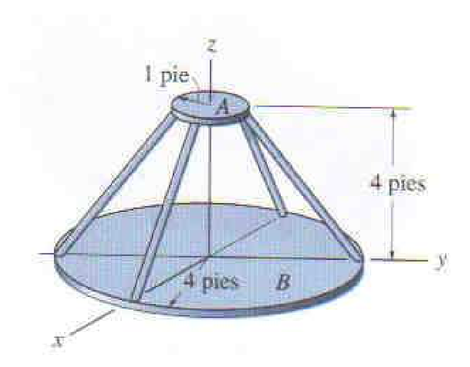

Prob. 21–17

**21-18.** Determine el momento de inercia del conjunto de barras y anillo delgado con respecto al eje $z$. Las barras y el anillo tienen masa de 2 kg/m.



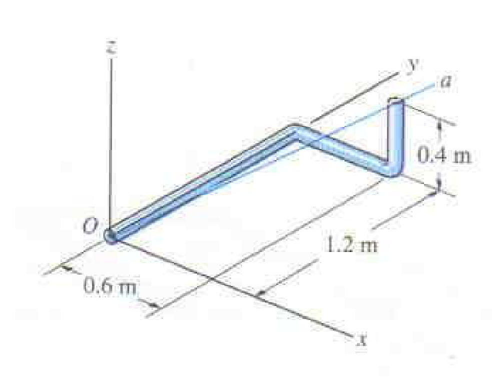

Prob. 21–18

**21-19.** La pieza metálica consta de una placa $A$ de 15 lb, una placa $B$ de 40 lb y cuatro barras de 7 lb cada una. Determine los momentos de inercia de la pieza con respecto a los ejes principales $x$, $y$, $z$.




Prob. 21–19

***21-20.** La barra doblada tiene masa de 4 kg/m. Determine el momento de inercia de la barra con respecto al eje $Oa$.




Prob. 21–20

## *21.2 Momentum angular

En esta sección desarrollaremos las ecuaciones necesarias para determinar el momentum angular de un cuerpo rígido con respecto a un punto arbitrario. Esta formulación nos dará un medio para desarrollar el principio del impulso y momentum y las ecuaciones de movimiento rotatorio para un cuerpo rígido.

Considere el cuerpo rígido mostrado en la figura 21-6 y que tiene masa $m$ y centro de masa en $G$. El sistema coordenado $X, Y, Z$ representa un marco de referencia inercial, y por consiguiente, sus ejes están fijos o se trasladan con velocidad constante. El momentum angular como es medido desde esta referencia se calculará relativo al punto arbitrario $A$. Los vectores de posición $\mathbf{r}_A$ y $\boldsymbol{\rho}_A$ se trazan desde el origen de coordenadas hasta el punto $A$ y desde $A$ hasta la partícula $i$−ésima del cuerpo. Si la masa de la partícula es $m_i$, el momentum angular con respecto al punto $A$ es

$$(\mathbf{H}_A)_i = \boldsymbol{\rho}_A \times m_i \mathbf{v}_i$$

donde $\mathbf{v}_i$ representa la velocidad de la partícula medida desde el sistema coordenado $X, Y, Z$. Si el cuerpo tiene velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ en el instante considerado, $\mathbf{v}_i$ puede ser relacionada a la velocidad de $A$ aplicando la ecuación 20-7, es decir,

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A$$

Entonces,

$$\begin{aligned}(\mathbf{H}_A)_i &= \boldsymbol{\rho}_A \times m_i(\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A)\\ &= (\boldsymbol{\rho}_A m_i) \times \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\rho}_A \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A)\, m_i\end{aligned}$$

Sumar todas las partículas del cuerpo requiere una integración, y como $m_i \rightarrow dm$, tenemos

$$\mathbf{H}_A = \left(\int_m \boldsymbol{\rho}_A\, dm\right) \times \mathbf{v}_A + \int_m \boldsymbol{\rho}_A \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A)\, dm \qquad (21\text{–}6)$$

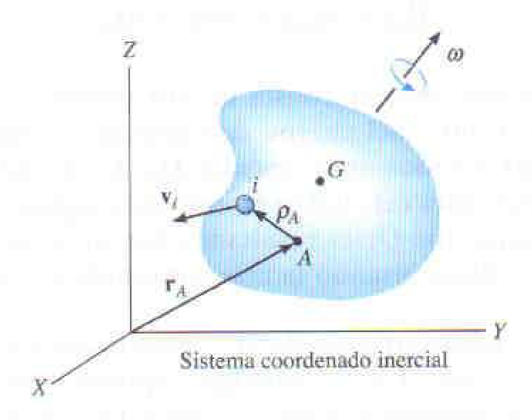



Fig. 21-6

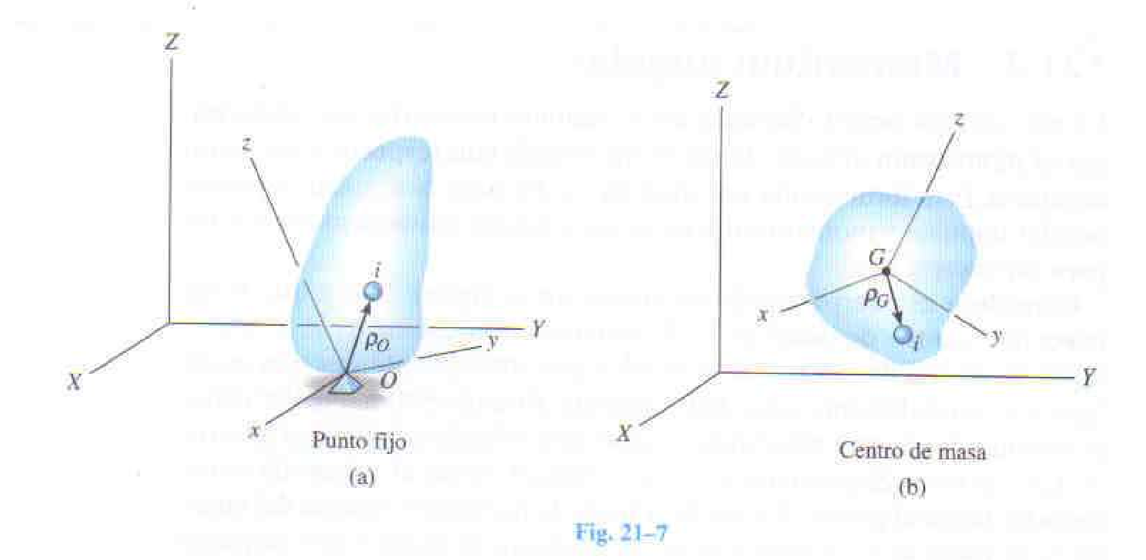



Fig. 21–7

**Punto fijo O.** Si $A$ se vuelve un *punto fijo O* en el cuerpo, figura 21-7*a*, entonces $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$ y la ecuación 21-6 se reduce a

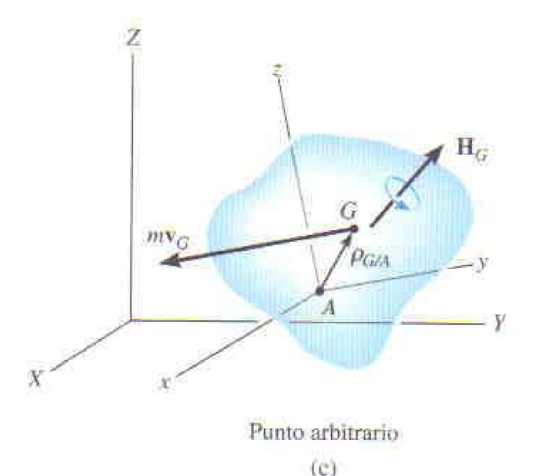
$$\mathbf{H}_O = \int_m \boldsymbol{\rho}_O \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_O)\, dm \qquad (21\text{–}7)$$

**Centro de masa G.** Si $A$ está situado en el *centro de masa G* del cuerpo, figura 21-7*b*, entonces $\int_m \boldsymbol{\rho}_A\, dm = \mathbf{0}$ y

$$\mathbf{H}_G = \int_m \boldsymbol{\rho}_G \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_G)\, dm \qquad (21\text{–}8)$$

**Punto arbitrario A.** En general, $A$ puede ser algún otro punto distinto de $O$ o de $G$, figura 21-7*c*, en cuyo caso la ecuación 21-6 puede, sin embargo, ser simplificada a la forma siguiente (vea el problema 21-22).

$$\mathbf{H}_A = \boldsymbol{\rho}_{G/A} \times m\mathbf{v}_G + \mathbf{H}_G \qquad (21\text{–}9)$$




Punto arbitrario
(c)

Aquí el momentum angular consta de dos partes —el momento del momentum lineal $m\mathbf{v}_G$ del cuerpo con respecto al punto $A$ sumado (vectorialmente) al momentum angular $\mathbf{H}_G$. La ecuación 21-9 puede ser usada también para calcular el momentum angular del cuerpo con respecto a un punto fijo $O$; los resultados, por supuesto, serán los mismos que los calculados usando la más conveniente ecuación 21-7.

**Componentes rectangulares de H.** Para hacer uso práctico de las ecuaciones 21-7, 21-8 y 21-9, tenemos que expresar el momentum angular en términos de sus componentes escalares. Para esto, es conveniente elegir un segundo conjunto de ejes $x, y, z$ con orientación arbitraria relativa

a los ejes $X, Y, Z$, figura 21-7, y para una formulación general, advertimos que las ecuaciones 21-7 y 21-8 son ambas de la forma

$$\mathbf{H} = \int_m \boldsymbol{\rho} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho})\, dm$$

Si expresamos **H**, $\boldsymbol{\rho}$ y $\boldsymbol{\omega}$ en términos de componentes $x$, $y$, y $z$, tenemos

$$H_x\mathbf{i} + H_y\mathbf{j} + H_z\mathbf{k} = \int_m (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \times [(\omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}) \times (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})]\, dm$$

Al desarrollar los productos cruz y combinarlos obtenemos

$$\begin{aligned} H_x\mathbf{i} + H_y\mathbf{j} + H_z\mathbf{k} &= \left[\omega_x \int_m (y^2 + z^2)\, dm - \omega_y \int_m xy\, dm - \omega_z \int_m xz\, dm\right]\mathbf{i} \\ &+ \left[-\omega_x \int_m xy\, dm + \omega_y \int_m (x^2 + z^2)\, dm - \omega_z \int_m yz\, dm\right]\mathbf{j} \\ &+ \left[-\omega_x \int_m zx\, dm - \omega_y \int_m yz\, dm + \omega_z \int_m (x^2 + y^2)\, dm\right]\mathbf{k} \end{aligned}$$

Igualando las componentes respectivas **i**, **j**, **k** y reconociendo que las integrales representan los momentos y los productos de inercia, obtenemos

$$\begin{aligned} H_x &= I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z \\ H_y &= -I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z \\ H_z &= -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z \end{aligned} \qquad (21\text{–}10)$$

Estas tres ecuaciones representan la forma escalar de las componentes **i**, **j**, **k** de $\mathbf{H}_O$ o $\mathbf{H}_G$ (dada en forma vectorial por las ecuaciones 21-7 y 21-8). El momentum angular del cuerpo con respecto al punto arbitrario $A$, distinto del punto fijo $O$ o del centro de masa $G$, también puede ser expresado en forma escalar. Aquí es necesario usar la ecuación 21-9 para representar $\boldsymbol{\rho}_{G/A}$ y $\mathbf{v}_G$ como vectores cartesianos, efectuar la operación del producto cruz y sustituir las componentes, ecuaciones 21-10, para $\mathbf{H}_G$.

Las ecuaciones 21-10 pueden simplificarse si los ejes coordenados $x, y, z$ se orientan de manera que sean *ejes principales de inercia* para el cuerpo en el punto. Cuando se usan estos ejes, los productos de inercia $I_{xy} = I_{yz} = I_{zx} = 0$, y si los momentos de inercia principales con respecto a los ejes $x, y, z$ son representados como $I_x = I_{xx}$, $I_y = I_{yy}$, e $I_z = I_{zz}$, las tres componentes del momentum angular toman la forma

$$H_x = I_x\omega_x \qquad H_y = I_y\omega_y \qquad H_z = I_z\omega_z \qquad (21\text{–}11)$$



El movimiento del astronauta es controlado por el uso de pequeños propulsores direccionales sujetos a su traje espacial. Los impulsos que proporcionan estos propulsores deben ser especificados cuidadosamente para impedir la pérdida de estabilidad y orientación.

**Principio del impulso y momentum.** Ahora que la formulación del momentum angular para un cuerpo ha sido desarrollada, el *principio del impulso y momentum*, como se estudió en la sección 19.2, puede ser usado para resolver problemas cinéticos que implican *fuerza, velocidad y tiempo*. Para este caso, se dispone de las siguientes dos ecuaciones vectoriales:

$$m(\mathbf{v}_G)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt = m(\mathbf{v}_G)_2 \qquad (21\text{–}12)$$

$$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\,dt = (\mathbf{H}_O)_2 \qquad (21\text{–}13)$$

En tres dimensiones, cada término vectorial puede ser representado mediante tres componentes escalares, y por tanto puede escribirse un total de *seis ecuaciones escalares*. Tres ecuaciones relacionan el impulso lineal con el momentum lineal en las direcciones $x, y, z$, y las otras tres relacionan el impulso angular del cuerpo con el momentum angular sobre los ejes $x, y, z$. Antes de aplicar las ecuaciones 21-12 y 21-13 a la solución de problemas, convendría que el lector repasara el material presentado en las secciones 19.2 y 19.3.

## *21.3 Energía cinética

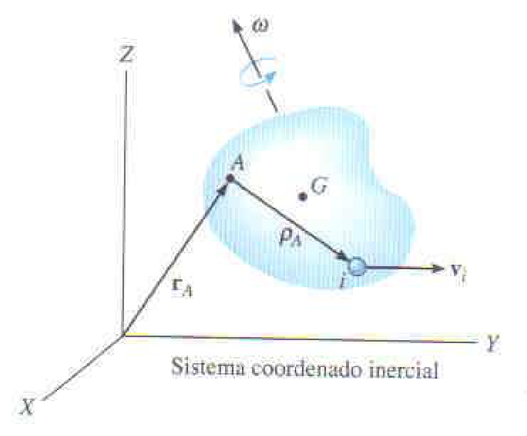



Fig. 21–8

Para aplicar el principio del trabajo y la energía a la solución de problemas que implican el movimiento general de un cuerpo rígido, es necesario formular primero expresiones para la energía cinética del cuerpo. Con respecto a esto, considere el cuerpo rígido mostrado en la figura 21-8, que tiene masa $m$ y centro de masa en $G$. La energía cinética de la partícula $i$–ésima del cuerpo con masa $m_i$ y velocidad $\mathbf{v}_i$, medida con relación al marco de referencia inercial $X, Y, Z$, es

$$T_i = \tfrac{1}{2}m_i v_i^2 = \tfrac{1}{2}m_i(\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_i)$$

Si la velocidad de un punto arbitrario $A$ en el cuerpo es conocida, $\mathbf{v}_i$ puede ser relacionada con $\mathbf{v}_A$ mediante la ecuación $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A$, donde $\boldsymbol{\omega}$ es la velocidad angular del cuerpo, medida desde el sistema coordenado $X, Y, Z$, y $\boldsymbol{\rho}_A$ es un vector de posición dibujado desde $A$ hasta $i$. Usando esta expresión para $\mathbf{v}_i$, la energía cinética para la partícula puede ser escrita como

$$\begin{aligned} T_i &= \tfrac{1}{2}m_i(\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A)\cdot(\mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A) \\ &= \tfrac{1}{2}(\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A)\, m_i + \mathbf{v}_A \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A)\, m_i + \tfrac{1}{2}(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A)\cdot(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A)\, m_i \end{aligned}$$

La energía cinética para todo el cuerpo se obtiene sumando las energías cinéticas de todas las partículas del cuerpo. Esto requiere una integración, y como $m_i \rightarrow dm$, obtenemos

$$T = \tfrac{1}{2}m(\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A) + \mathbf{v}_A \cdot \left(\boldsymbol{\omega} \times \int_m \boldsymbol{\rho}_A\, dm\right) + \tfrac{1}{2}\int_m (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A)\cdot(\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A)\, dm$$

El último término a la derecha puede ser reescrito usando la identidad vectorial $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}$, donde $\mathbf{a} = \boldsymbol{\omega}$, $\mathbf{b} = \boldsymbol{\rho}_A$, y $\mathbf{c} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A$. El resultado final es

$$T = \tfrac{1}{2}m(\mathbf{v}_A \cdot \mathbf{v}_A) + \mathbf{v}_A \cdot \left(\boldsymbol{\omega} \times \int_m \boldsymbol{\rho}_A \, dm\right) + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \int_m \boldsymbol{\rho}_A \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_A) \, dm \quad (21\text{–}14)$$

Esta ecuación rara vez se usa debido a los cálculos que implican las integrales. Sin embargo, las operaciones se pueden simplificar cuando el punto de referencia $A$ es un punto fijo $O$ o el centro de masa $G$.

**Punto fijo O.** Si $A$ es un *punto fijo* $O$ en el cuerpo, figura 21-7*a*, entonces $\mathbf{v}_A = \mathbf{0}$, y usando la ecuación 21-7, podemos expresar la ecuación 21-14 como

$$T = \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H}_O$$

Si los ejes $x, y, z$ representan los ejes principales de inercia para el cuerpo, entonces $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}$ y $\mathbf{H}_O = I_x\omega_x\mathbf{i} + I_y\omega_y\mathbf{j} + I_z\omega_z\mathbf{k}$. Sustituyendo en la ecuación anterior y efectuando las operaciones de producto punto resulta

$$T = \tfrac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \tfrac{1}{2}I_y\omega_y^2 + \tfrac{1}{2}I_z\omega_z^2 \quad (21\text{–}15)$$

**Centro de masa G.** Si $A$ está situado en el *centro de masa* $G$ del cuerpo, figura 21-7*b*, entonces $\int \boldsymbol{\rho}_A \, dm = \mathbf{0}$ y, usando la ecuación 21-8, podemos escribir la ecuación 21-14 como

$$T = \tfrac{1}{2}mv_G^2 + \tfrac{1}{2}\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{H}_G$$

De manera similar que para un punto fijo, el último término en el lado derecho puede ser representado en forma escalar, en cuyo caso

$$T = \tfrac{1}{2}mv_G^2 + \tfrac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \tfrac{1}{2}I_y\omega_y^2 + \tfrac{1}{2}I_z\omega_z^2 \quad (21\text{–}16)$$

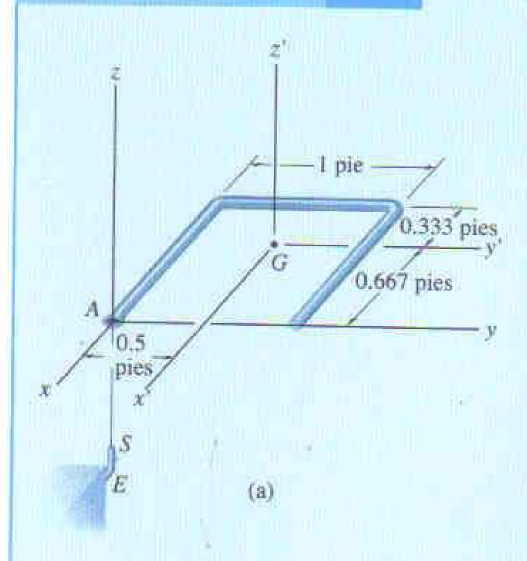
Aquí se aprecia que la energía cinética consta de dos partes: la energía cinética traslacional del centro de masa, $\frac{1}{2}\,mv^2{}_G$, y la energía cinética rotacional del cuerpo.

**Principio del trabajo y la energía.** Una vez formulada la energía cinética para un cuerpo, el *principio del trabajo y la energía* puede ser aplicado para resolver problemas cinéticos que implican *fuerza, velocidad y desplazamiento*. En este caso, sólo una ecuación escalar puede ser escrita para cada cuerpo, esto es,

$$T_1 + \Sigma U_{1\text{-}2} = T_2 \quad (21\text{–}17)$$

Antes de aplicar esta ecuación, es aconsejable repasar el material presentado en el capítulo 18.

## EJEMPLO 21.2



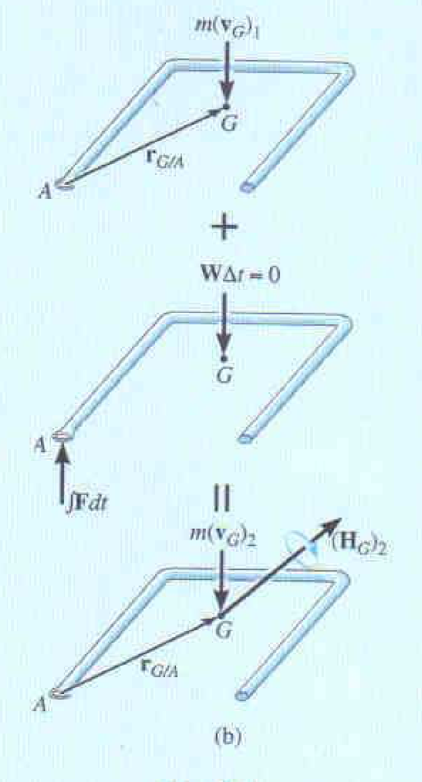




Fig. 21-9

La barra mostrada en la figura 21-9*a* tiene un peso de 1.5 lb/pie. Determine su velocidad angular justo después que el extremo $A$ se inserta en el gancho colocado en $E$. El gancho proporciona una conexión permanente para la barra debido al mecanismo $S$ de cerradura de golpe. Justo antes de golpear el gancho la barra está cayendo con rapidez $(v_G)_1 = 10$ pies/s.

### Solución

El principio del impulso y momentum será usado ya que ocurre un impacto.

***Diagramas de impulso y momentum.*** Figura 21-9*b*. Durante el corto tiempo $\Delta t$, la fuerza impulsiva $\mathbf{F}$ que actúa en $A$ cambia el momentum de la barra. (El impulso generado por el peso $\mathbf{W}$ de la barra durante este tiempo es pequeño comparado con $\int \mathbf{F}\,dt$, por lo que se desprecia, es decir, el peso es una fuerza no impulsiva.) Por consiguiente, el momentum angular de la barra *se conserva* con respecto al punto $A$ ya que el momento de $\int \mathbf{F}\,dt$ sobre $A$ es cero.

***Conservación del momentum angular.*** La ecuación 21-9 debe usarse para calcular el momentum angular de la barra, ya que $A$ no es un *punto fijo* sino hasta *después* de la interacción con el gancho. Entonces, con referencia a la figura 21-9*b*, $(\mathbf{H}_A)_1 = (\mathbf{H}_A)_2$, o

$$\mathbf{r}_{G/A} \times m(\mathbf{v}_G)_1 = \mathbf{r}_{G/A} \times m(\mathbf{v}_G)_2 + (\mathbf{H}_G)_2 \qquad (1)$$

A partir de la figura 21-9*a*, $\mathbf{r}_{G/A} = \{-0.667\mathbf{i} + 0.5\mathbf{j}\}$ pies. Además, los ejes con primas son ejes principales de inercia para la barra porque $I_{x'y'} = I_{x'z'} = I_{z'y'} = 0$. Por tanto, a partir de las ecuaciones 21-11, $(\mathbf{H}_G)_2 = I_{x'}\omega_x\mathbf{i} + I_{y'}\omega_y\mathbf{j} + I_{z'}\omega_z\mathbf{k}$. Los momentos de inercia principales son $I_{x'} = 0.0272$ slug · pie$^2$, $I_{y'} = 0.0155$ slug · pie$^2$, $I_{z'} = 0.0427$ slug · pie$^2$ (vea el problema 21-13). Sustituyendo en la ecuación 1, tenemos

$$(-0.667\mathbf{i} + 0.5\mathbf{j}) \times \left[\left(\frac{4.5}{32.2}\right)(-10\mathbf{k})\right] = (-0.667\mathbf{i} + 0.5\mathbf{j}) \times \left[\left(\frac{4.5}{32.2}\right)(-v_G)_2\mathbf{k}\right]$$
$$+\ 0.0272\omega_x\mathbf{i} + 0.0155\omega_y\mathbf{j} + 0.0427\omega_z\mathbf{k}$$

Desarrollando e igualando las respectivas componentes **i**, **j** y **k** se obtiene

$$-0.699 = -0.0699(v_G)_2 + 0.0272\omega_x \qquad (2)$$
$$-0.932 = -0.0932(v_G)_2 + 0.0155\omega_y \qquad (3)$$
$$0 = 0.0427\omega_z \qquad (4)$$

***Cinemática.*** Hay cuatro incógnitas en las ecuaciones anteriores; sin embargo, se puede obtener otra ecuación relacionando $\boldsymbol{\omega}$ con $(\mathbf{v}_G)_2$ mediante *cinemática*. Como $\omega_z = 0$ (Ec. 4) y después del impacto la barra gira con respecto al punto fijo $A$, la ecuación 20-3 puede ser aplicada, en cuyo caso $(\mathbf{v}_G)_2 = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}_{G/A}$, o

$$-(v_G)_2\mathbf{k} = (\omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j}) \times (-0.667\mathbf{i} + 0.5\mathbf{j})$$
$$-(v_G)_2 = 0.5\omega_x + 0.667\omega_y \qquad (5)$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones de la 2 a la 5 resulta

$$(\mathbf{v}_G)_2 = \{-8.41\mathbf{k}\} \text{ pies/s} \qquad \boldsymbol{\omega} = \{-4.09\mathbf{i} - 9.55\mathbf{j}\} \text{ rad/s} \quad \textit{Resp.}$$

## EJEMPLO 21.3

Una torca de 5 N · m es aplicada a la flecha vertical *CD* que se muestra en la figura 21-10*a*, la cual permite que el engrane *A* de 10 kg gire libremente alrededor de *CE*. Suponiendo que el engrane *A* parte del reposo, determine la velocidad angular de la flecha *CD* después que ésta ha efectuado dos revoluciones. Desprecie la masa de la flecha *CD* y del eje *CE* y suponga que el engrane *A* puede ser aproximado por un disco delgado. El engrane *B* está fijo.

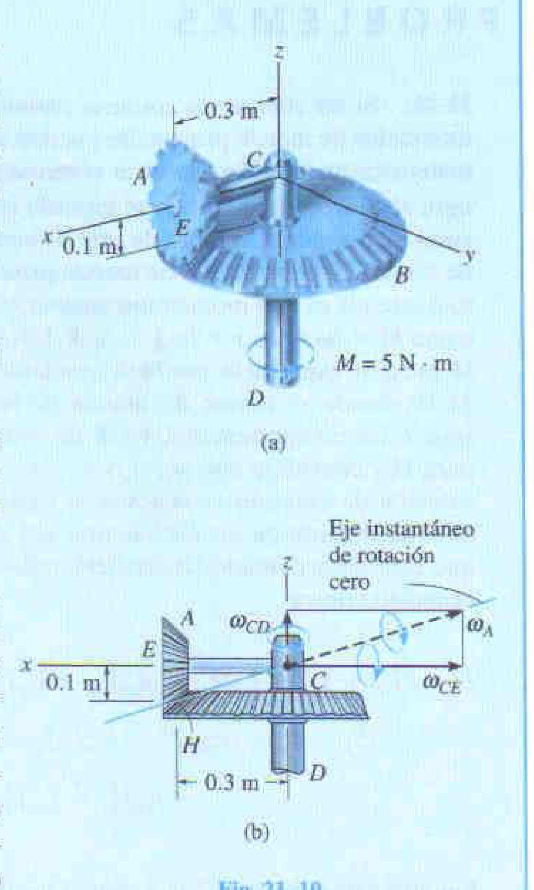



Fig. 21-10

### Solución

El principio del trabajo y la energía puede ser usado para encontrar la solución. ¿Por qué?

***Trabajo.*** Si la flecha *CD*, el eje *CE* y el engrane *A* son considerados como un sistema de cuerpos conectados, sólo trabaja el par aplicada **M**. Para dos revoluciones de *CD*, este trabajo es $\Sigma U_{1\text{-}2} = (5 \text{ N} \cdot \text{m})(4\pi \text{ rad}) = 62.83$ J.

***Energía cinética.*** Como el engrane está originalmente en reposo, su energía cinética inicial es cero. Un diagrama cinemático para el engrane se muestra en la figura 21-10*b*. Si la velocidad angular de *CD* se toma como $\boldsymbol{\omega}_{CD}$, entonces la velocidad angular del engrane *A* es $\boldsymbol{\omega}_A = \boldsymbol{\omega}_{CD} + \boldsymbol{\omega}_{CE}$. El engrane puede ser imaginado como una porción de un cuerpo extendido sin masa que está rotando con respecto al *punto fijo C*. El eje instantáneo de rotación para este cuerpo está a lo largo de la línea *CH*, porque ambos puntos *C* y *H* sobre el cuerpo (engrane) tienen velocidad cero y, por tanto, deben encontrarse sobre este eje. Esto requiere que las componentes $\boldsymbol{\omega}_{CD}$ y $\boldsymbol{\omega}_{CE}$ estén relacionadas mediante la ecuación $\omega_{CD}/0.1 \text{ m} = \omega_{CE}/0.3 \text{ m}$ o $\omega_{CE} = 3\,\omega_{CD}$. Entonces,

$$\boldsymbol{\omega}_A = -\omega_{CE}\mathbf{i} + \omega_{CD}\mathbf{k} = -3\omega_{CD}\mathbf{i} + \omega_{CD}\mathbf{k} \qquad (1)$$

En la figura 21-10*a*, los ejes *x*, *y*, *z* representan *ejes principales de inercia* en *C* para el engrane. Como el punto *C* es un punto fijo de rotación, la ecuación 21-15 puede ser aplicada para determinar la energía cinética, esto es,

$$T = \tfrac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \tfrac{1}{2}I_y\omega_y^2 + \tfrac{1}{2}I_z\omega_z^2 \qquad (2)$$

Usando el teorema de los ejes paralelos, los momentos de inercia del engrane con respecto al punto *C* son los siguientes:

$$I_x = \tfrac{1}{2}(10 \text{ kg})(0.1 \text{ m})^2 = 0.05 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$I_y = I_z = \tfrac{1}{4}(10 \text{ kg})(0.1 \text{ m})^2 + 10 \text{ kg}(0.3 \text{ m})^2 = 0.925 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Como $\omega_x = -3\omega_{CD}$, $\omega_y = 0$, $\omega_z = \omega_{CD}$, la ecuación 2 se convierte en

$$T_A = \tfrac{1}{2}(0.05)(-3\omega_{CD})^2 + 0 + \tfrac{1}{2}(0.925)(\omega_{CD})^2 = 0.6875\omega_{CD}^2$$

***Principio del trabajo y la energía.*** Aplicando el principio del trabajo y la energía, obtenemos

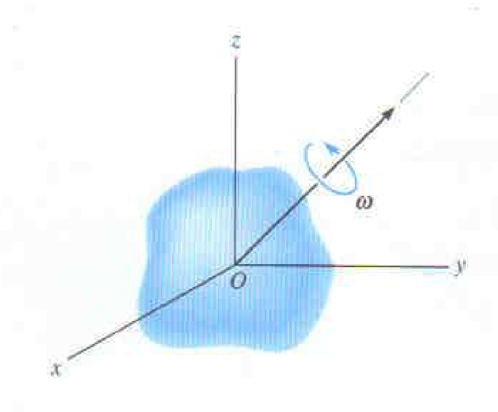
$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$
$$0 + 62.83 = 0.6875\omega_{CD}^2$$
$$\omega_{CD} = 9.56 \text{ rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$

# PROBLEMAS

**21-21.** Si un cuerpo *no contiene planos de simetría*, los momentos de inercia principales pueden ser determinados matemáticamente. Para mostrar cómo se hace esto, considere el cuerpo rígido que está girando con velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$, dirigida a lo largo de uno de sus ejes principales de inercia. Si el momento de inercia principal con respecto a este eje es $I$, el momentum angular se puede expresar como $\mathbf{H} = I\omega = I\omega_x\mathbf{i} + I\omega_y\mathbf{j} + I\omega_z\mathbf{k}$. Las componentes de $\mathbf{H}$ pueden expresarse también mediante las ecuaciones 21-10, donde el tensor de inercia se supone conocido. Iguale las componentes $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$ y $\mathbf{k}$ de ambas expresiones para $\mathbf{H}$ y considere que $\omega_x$, $\omega_y$ y $\omega_z$ son desconocidas. La solución de esas tres ecuaciones se obtiene siempre que el determinante de los coeficientes sea cero. Demuestre que este determinante, al ser desarrollado, conduce a la ecuación cúbica

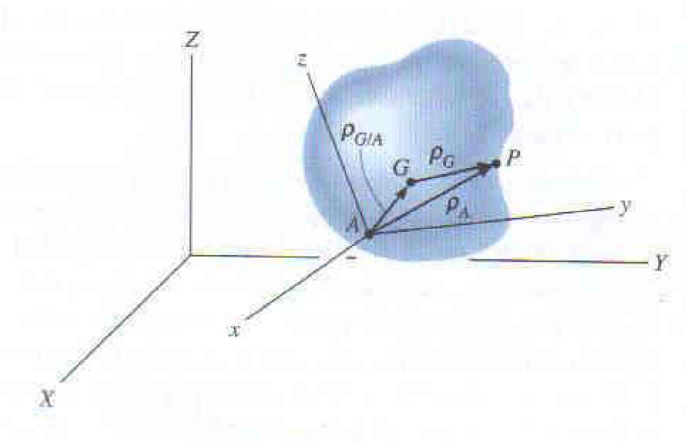
$$I^3 - (I_{xx} + I_{yy} + I_{zz})I^2 + (I_{xx}I_{yy} + I_{yy}I_{zz} + I_{zz}I_{xx} - I_{xy}^2 - I_{yz}^2 - I_{zx}^2)I - (I_{xx}I_{yy}I_{zz} - 2I_{xy}I_{yz}I_{zx} - I_{xx}I_{yz}^2 - I_{yy}I_{zx}^2 - I_{zz}I_{xy}^2) = 0$$

Las tres raíces positivas de $I$, obtenidas de la solución de la ecuación, representan los momentos de inercia principales $I_x$, $I_y$ e $I_z$.



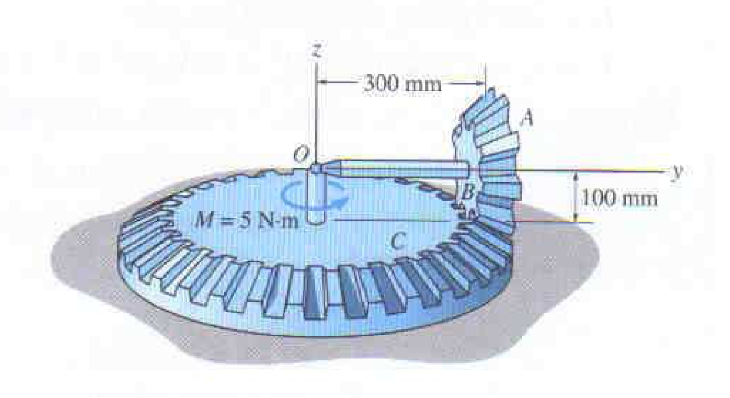

Prob. 21–21

**21-22.** Demuestre que si el momentum angular de un cuerpo es determinado con respecto a un punto arbitrario $A$, entonces $\mathbf{H}_A$ puede ser expresado mediante la ecuación 21-9. Esto requiere sustituir $\boldsymbol{\rho}_A = \boldsymbol{\rho}_G + \boldsymbol{\rho}_{G/A}$ en la ecuación 21-6 y desarrollarla, observando que $\int \boldsymbol{\rho}_G \, dm = \mathbf{0}$ por definición del centro de masa y $\mathbf{v}_G = \mathbf{v}_A + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\rho}_{G/A}$.




Prob. 21–22

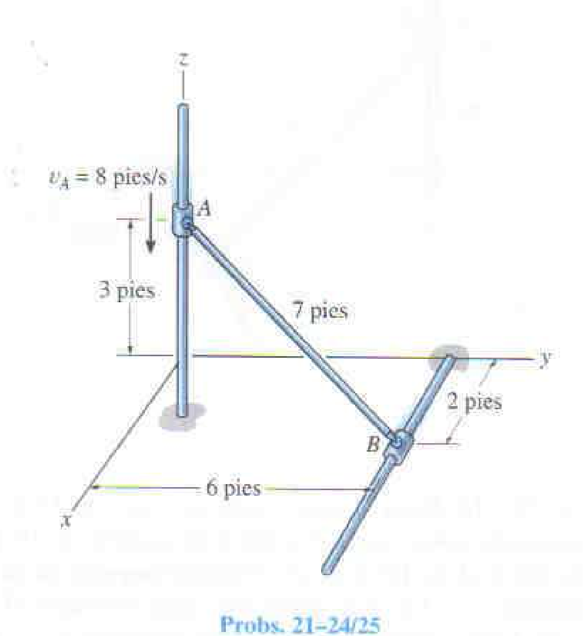
**21-23.** El engrane $A$ de 2 kg rueda sobre el engrane $C$ de placa fija. Determine la velocidad angular de la barra $OB$ con respecto al eje $z$ después que rota una revolución con respecto al eje $z$, partiendo del reposo. Sobre la barra actúa el momento constante $M = 5$ N · m. Desprecie la masa de la barra $OB$. Suponga que el engrane $A$ es un disco uniforme con radio de 100 mm.




Prob. 21–23

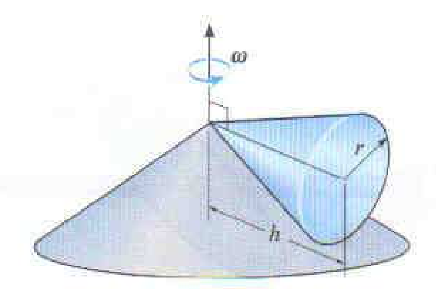
*21-24. La barra $AB$ tiene un peso de 6 lb y está unida a dos collarines lisos en sus puntos extremos por medio de juntas esféricas. Si el collarín $A$ se está moviendo hacia abajo con rapidez de 8 pies/s, determine la energía cinética de la barra en el instante mostrado. Suponga que en este instante la velocidad angular de la barra está dirigida perpendicularmente al eje de la barra.

21-25. En el instante mostrado el collarín ubicado en $A$ sobre la barra $AB$ de 6 lb tiene velocidad $v_A = 8$ pies/s. Determine la energía cinética de la barra después que el collarín ha descendido 3 pies. Desprecie la fricción y el espesor de la barra. Desprecie la masa del collarín si éste se encuentra unido a la barra por medio de juntas esféricas.



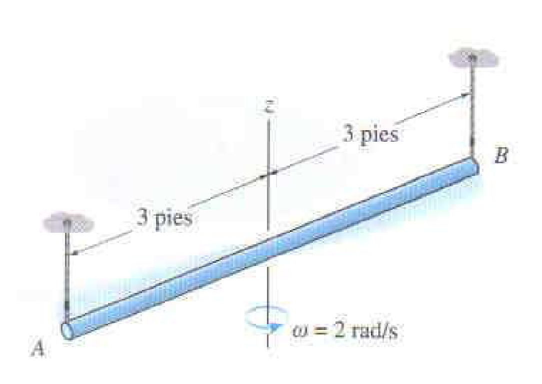

Probs. 21-24/25

21-26. El cono tiene masa $m$ y rueda sin deslizar sobre la superficie cónica de manera que tiene velocidad angular con respecto al eje vertical de $\boldsymbol{\omega}$. Determine la energía cinética del cono debida a este movimiento.




Prob. 21-26

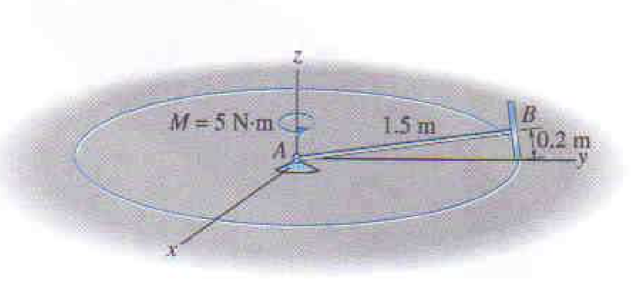
21-27. La barra pesa 3 lb/pie y está suspendida de cuerdas paralelas colocadas en $A$ y $B$. Si la barra tiene velocidad angular de 2 rad/s con respecto al eje $z$ en el instante mostrado, determine qué tan alto se encuentra su centro en el instante en que deja momentáneamente de oscilar.




Prob. 21-27

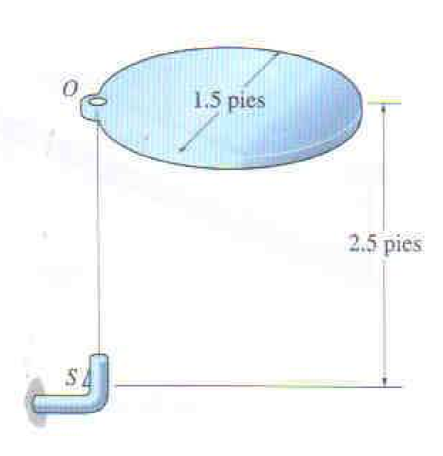
*21-28. El disco de 5 kg está conectado a la barra esbelta de 3 kg. Si el conjunto se encuentra unido a una junta esférica en $A$ y es aplicado el momento de par de 5 N · m, determine la velocidad angular de la barra con respecto al eje $z$ después que el conjunto ha efectuado dos revoluciones sobre el eje $z$ partiendo del reposo. El disco rueda sin deslizar.

21-29. El disco de 5 kg está conectado a la barra esbelta de 3 kg. Si el conjunto se encuentra unido a la junta esférica en $A$ y el momento de par de 5 N · m le da una velocidad angular con respecto al eje $z$ de $\omega_z = 2$ rad/s, determine la magnitud del momentum angular del conjunto con respecto a $A$.



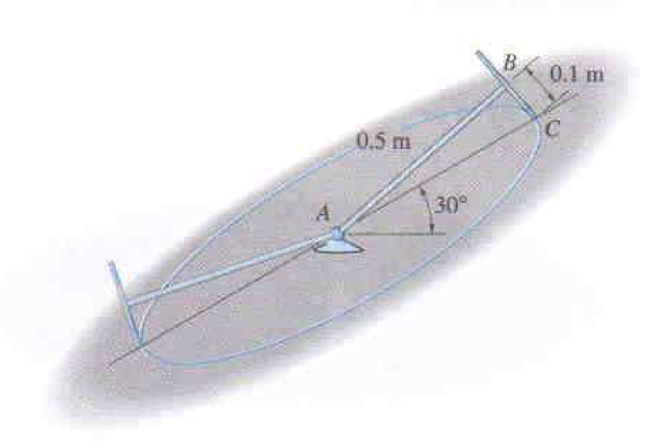

Probs. 21-28/29

**21-30.** La placa circular tiene un peso de 19 lb y diámetro de 1.5 pies. Si es liberada del reposo y cae horizontalmente 2.5 pies sobre el gancho colocado en $S$, que le proporciona una conexión permanente, determine la velocidad del centro de masa de la placa justo después que se efectúa la conexión con el gancho.



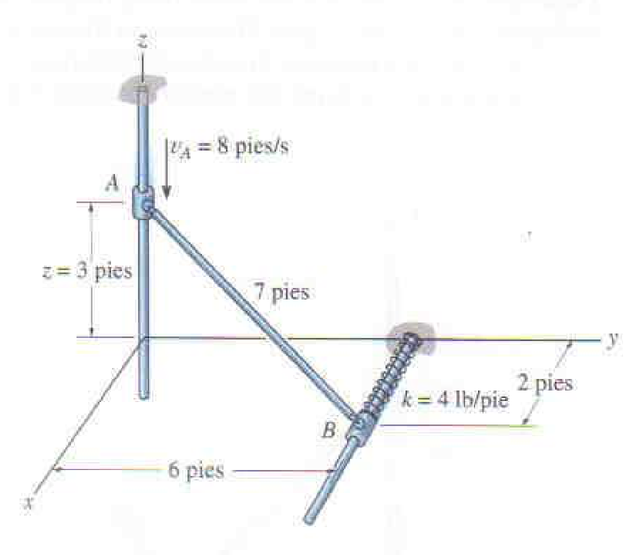

Prob. 21-30

**21-31.** El disco delgado de 2 kg está conectado a la barra esbelta fija a la junta esférica en el punto $A$. Si se libera del reposo en la posición mostrada, determine el giro del disco con respecto a la barra cuando el disco alcanza su punto más bajo. Desprecie la masa de la barra. El disco rueda sin deslizar.




Prob. 21-31

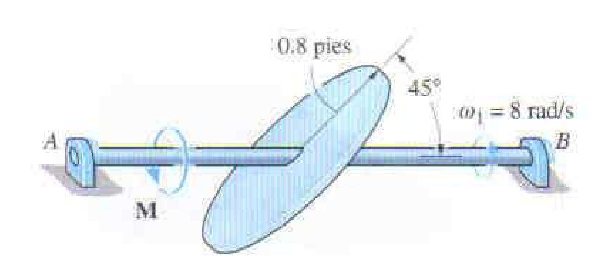
***21-32.** La barra $AB$ tiene un peso de 6 lb y en sus extremos está unida a dos collarines lisos por medio de juntas esféricas. Si el collarín $A$ se está moviendo hacia abajo con rapidez de 8 pies/s cuando $z = 3$ pies, determine la rapidez de $A$ en el instante $z = 0$. El resorte tiene longitud no estirada de 2 pies. Desprecie la masa de los collarines. Suponga que la velocidad angular de la barra $AB$ es perpendicular a su eje.




Prob. 21-32

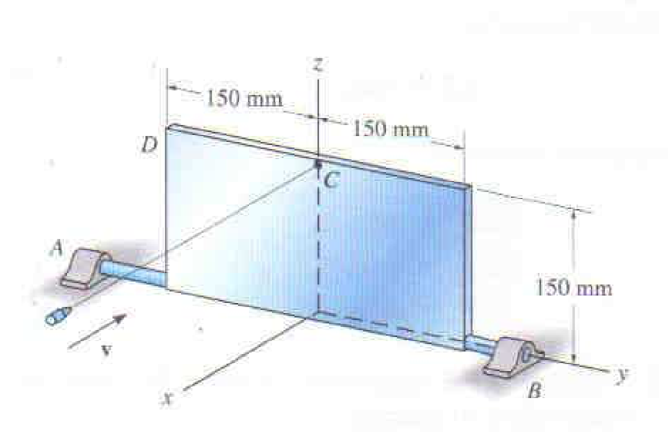
**21-33.** El disco circular tiene un peso de 15 lb y está montado sobre la flecha $AB$ a un ángulo de 45° con la horizontal. Determine la velocidad angular de la flecha cuando $t = 3$ s si se le aplica una torca constante $M = 2$ lb · pie. Originalmente la flecha está girando a $\omega_1 = 8$ rad/s cuando el par es aplicada.

**21-34.** El disco circular tiene un peso de 15 lb y está montado sobre la flecha $AB$ a un ángulo de 45° con la horizontal. Determine la velocidad angular de la flecha cuando $t = 2$ s si se le aplica una torca $M = (4e^{0.1t})$ lb · pie, donde $t$ está en segundos. Originalmente la flecha está girando a $\omega_1 = 8$ rad/s cuando el par es aplicada.



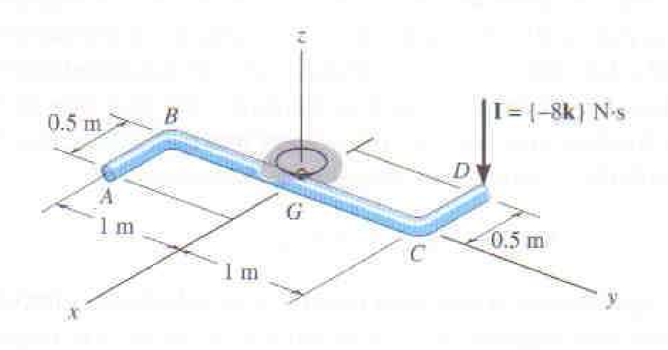

Probs. 21-33/34

**21-35.** La placa rectangular de 15 kg puede rotar libremente alrededor del eje $y$ gracias a las chumaceras colocadas en $A$ y $B$. Cuando la placa está en equilibrio en el plano vertical, una bala de 3 g es disparada hacia ella, perpendicularmente a su superficie, con velocidad $\mathbf{v} = \{-2000\mathbf{i}\}$ m/s. Calcule la velocidad angular de la placa en el instante en que ha girado 180°. Si la bala golpea la esquina $D$ con la misma velocidad $\mathbf{v}$, en vez del punto central $C$, ¿es igual la velocidad angular resultante? ¿Por qué sí o por qué no?



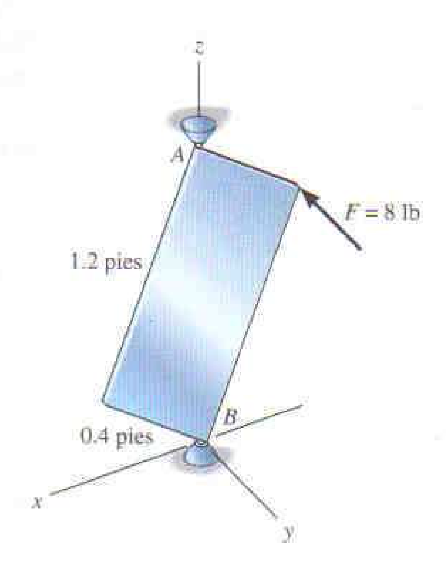

Prob. 21–35

***21-36.** La barra doblada está sostenida en el punto $G$ mediante una junta esférica. Cada segmento tiene masa de 0.5 kg/m. Si la barra se encuentra originalmente en reposo y se aplica un impulso $\mathbf{I} = \{-8\mathbf{k}\}$ N · s en $D$, determine la velocidad angular del conjunto después del impacto.




Prob. 21–36

**21-37.** La placa de 15 lb está sometida a una fuerza $F$ = 8 lb que siempre se encuentra dirigida perpendicularmente a la cara de la placa. Si originalmente la placa está en reposo, determine su velocidad angular después que ha rotado una revolución (360°). La placa está soportada por medio de juntas esféricas en los puntos $A$ y $B$.




Prob. 21–37

**21-38.** La cápsula espacial tiene masa de 3.5 Mg y sus radios de giro son $k_x = k_z = 0.8$ m y $k_y = 0.5$ m. Si está viajando con velocidad $\mathbf{v}_G = \{600\mathbf{j}\}$ m/s, calcule su velocidad angular justo después que es golpeada por un meteorito con masa de 0.60 kg y velocidad $\mathbf{V}_m = \{-200\mathbf{i} - 400\mathbf{j} + 200\mathbf{k}\}$ m/s. Suponga que el meteorito se empotra en la cápsula en el punto $A$ y que inicialmente la cápsula no tiene velocidad angular.

Prob. 21–38

## *21.4 Ecuaciones de movimiento

Una vez familiarizados con los procedimientos que se usan para describir las propiedades inerciales y el momentum angular de un cuerpo, podemos escribir las ecuaciones que describen el movimiento del cuerpo en sus formas más útiles.

**Ecuaciones del movimiento traslacional.** El *movimiento traslacional* de un cuerpo se define en términos de la aceleración del centro de masa del cuerpo, la cual se mide desde un marco de referencia inercial $X$, $Y$, $Z$. La ecuación del movimiento traslacional para el cuerpo puede ser escrita en forma vectorial como

$$\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}_G \tag{21-18}$$

o por las tres ecuaciones escalares

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= m(a_G)_x \\ \Sigma F_y &= m(a_G)_y \\ \Sigma F_z &= m(a_G)_z \end{aligned} \tag{21-19}$$

Aquí, $\Sigma \mathbf{F} = \Sigma F_x\mathbf{i} + \Sigma F_y\mathbf{j} + \Sigma F_z\mathbf{k}$ representa la suma de todas las fuerzas externas que actúan sobre el cuerpo.

**Ecuaciones del movimiento rotacional.** En la sección 15.6 desarrollamos la ecuación 15-17,

$$\Sigma \mathbf{M}_O = \dot{\mathbf{H}}_O \tag{21-20}$$

la cual establece que la suma de los momentos con respecto a un punto fijo $O$ de todas las fuerzas externas que actúan sobre un sistema de partículas (contenidas en un cuerpo rígido) es igual a la razón de cambio con respecto al tiempo del momentum angular total del cuerpo con relación al punto $O$. Cuando los momentos de las fuerzas externas que actúan sobre las partículas son sumados con respecto al *centro de masa* $G$ del sistema, se obtiene de nuevo la misma forma simple de la ecuación 21-20, la cual relaciona la suma de momentos $\Sigma \mathbf{M}_G$ con el momentum angular $\mathbf{H}_G$. Para demostrar esto, considere el sistema de partículas que aparece en la figura 21-11, donde $X$, $Y$, $Z$ representa un marco de referencia inercial y los ejes $x$, $y$, $z$, con origen en $G$, se *trasladan* con respecto a este marco. En general, $G$ está *acelerando*, así que por definición el marco en traslación *no* es una referencia inercial. El momentum angular de la partícula $i$–ésima con respecto a este marco es,

$$(\mathbf{H}_i)_G = \mathbf{r}_{i/G} \times m_i\mathbf{v}_{i/G}$$

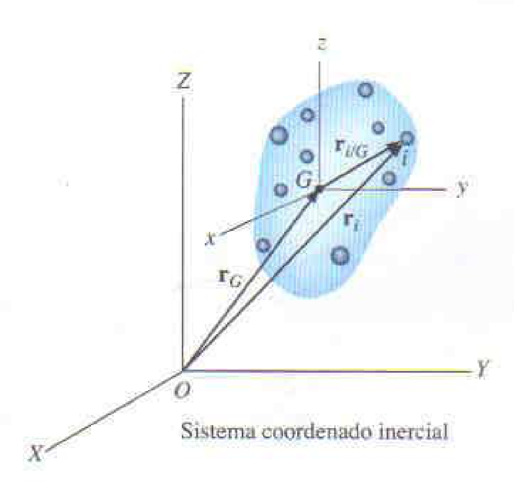



Fig. 21–11

donde $\mathbf{r}_{i/G}$ y $\mathbf{v}_{i/G}$ representan la posición relativa y la velocidad relativa de la partícula $i$–ésima con respecto a $G$. Tomando la derivada con respecto al tiempo, tenemos

$$(\dot{\mathbf{H}}_i)_G = \dot{\mathbf{r}}_{i/G} \times m_i\mathbf{v}_{i/G} + \mathbf{r}_{i/G} \times m_i\dot{\mathbf{v}}_{i/G}$$

Por definición, $\mathbf{v}_{i/G} = \dot{\mathbf{r}}_{i/G}$. Entonces, el primer término del lado derecho es cero ya que el producto cruz de vectores iguales es cero. También, $\mathbf{a}_{i/G} = \dot{\mathbf{v}}_{i/G}$, por lo que

$$(\dot{\mathbf{H}}_i)_G = (\mathbf{r}_{i/G} \times m_i\mathbf{a}_{i/G})$$

Expresiones similares pueden ser escritas para las otras partículas del cuerpo. Cuando se suman los resultados, obtenemos

$$\dot{\mathbf{H}}_G = \Sigma(\mathbf{r}_{i/G} \times m_i\mathbf{a}_{i/G})$$

Aquí $\dot{\mathbf{H}}_G$ es la razón de cambio con respecto al tiempo del momentum angular total del cuerpo calculado con relación al punto $G$.

La aceleración relativa de la $i$–ésima partícula es definida por la ecuación $\mathbf{a}_{i/G} = \mathbf{a}_i - \mathbf{a}_G$, donde $\mathbf{a}_i$ y $\mathbf{a}_G$ representan, respectivamente, las aceleraciones de la partícula $i$–ésima y del punto $G$ medidas con respecto al *marco inercial de referencia*. Sustituyendo y desarrollando, y usando la propiedad distributiva del producto cruz vectorial, obtenemos

$$\dot{\mathbf{H}}_G = \Sigma(\mathbf{r}_{i/G} \times m_i\mathbf{a}_i) - (\Sigma m_i\mathbf{r}_{i/G}) \times \mathbf{a}_G$$

Por definición del centro de masa, la suma $(\Sigma m_i\mathbf{r}_{i/G}) = (\Sigma m_i)\bar{\mathbf{r}}$ es igual a cero, ya que el vector posición $\bar{\mathbf{r}}$ relativo a $G$ es cero. Por consiguiente, el último término en la ecuación anterior es cero. Usando la ecuación de movimiento, el producto $m_i\mathbf{a}_i$ puede ser reemplazado por la *fuerza externa* resultante $\mathbf{F}_i$ actuando sobre la partícula $i$–ésima. Denotando $\Sigma\mathbf{M}_G = (\Sigma\mathbf{r}_{i/G} \times \mathbf{F}_i)$, el resultado final puede escribirse como

$$\Sigma\mathbf{M}_G = \dot{\mathbf{H}}_G \qquad (21\text{–}21)$$

La ecuación rotacional de movimiento para el cuerpo será desarrollada ahora ya sea a partir de la ecuación 21-20 o de la 21-21. Con relación a esto, las componentes escalares del momentum angular $\mathbf{H}_O$ o $\mathbf{H}_G$ son definidas mediante las ecuaciones 21-10 o, si se usan ejes de inercia principales en los puntos $O$ o $G$, mediante las ecuaciones 21-11. Si estas componentes son calculadas con respecto a ejes $x, y, z$ que están *girando* a velocidad angular $\mathbf{\Omega}$, la cual puede ser *diferente* de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo, entonces la derivada con respecto al tiempo $\dot{\mathbf{H}} = d\mathbf{H}/dt$, como es usada en las ecuaciones 21-20 y 21-21, debe tomar en cuenta la rotación de los ejes $x, y, z$ como se mide desde los ejes inerciales $X, Y, Z$. Por consiguiente, la derivada con respecto al tiempo de $\mathbf{H}$ debe ser determinada a partir de la ecuación 20-6, en cuyo caso las ecuaciones 21-20 y 21-21 se convierten en

$$\Sigma\mathbf{M}_O = (\dot{\mathbf{H}}_O)_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{H}_O$$
$$\Sigma\mathbf{M}_G = (\dot{\mathbf{H}}_G)_{xyz} + \mathbf{\Omega} \times \mathbf{H}_G \qquad (21\text{–}22)$$

Aquí $(\dot{\mathbf{H}})_{xyz}$ es la razón de cambio con respecto al tiempo de $\mathbf{H}$ medida desde la referencia $x, y, z$.

Hay tres maneras en que podemos definir el movimiento de los ejes $x, y, z$.

Naturalmente, el movimiento de esta referencia debe elegirse de manera que dé el conjunto más simple de ecuaciones de momento para encontrar la solución de un problema en particular.

**Ejes $x, y, z$ con movimiento $\Omega = 0$.** Si el cuerpo tiene movimiento general, los ejes $x, y, z$ pueden ser elegidos con origen en $G$, de tal forma que los ejes sólo *se trasladen* con respecto al marco de referencia inercial $X, Y, Z$. Haciendo esto se simplificaría la ecuación 21-22, ya que $\mathbf{\Omega} = \mathbf{0}$. Sin embargo, el cuerpo puede tener una rotación $\boldsymbol{\omega}$ con respecto a estos ejes, y por tanto los momentos y productos de inercia del cuerpo tendrían que ser expresados como *funciones del tiempo*. En la mayoría de los casos esto sería una tarea difícil, por lo que una selección tal de ejes tiene un valor limitado.

**Ejes $x, y, z$ con movimiento $\Omega = \omega$.** Los ejes $x, y, z$ pueden ser elegidos de manera que estén *fijos en y se muevan con el cuerpo*. Los momentos y productos de inercia del cuerpo con respecto a estos ejes serán *constantes* durante el movimiento. Como $\mathbf{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$, las ecuaciones 21-22 toman la forma

$$\Sigma \mathbf{M}_O = (\dot{\mathbf{H}}_O)_{xyz} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_O$$
$$\Sigma \mathbf{M}_G = (\dot{\mathbf{H}}_G)_{xyz} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{H}_G \qquad (21\text{–}23)$$

Podemos expresar cada una de estas ecuaciones vectoriales como tres ecuaciones escalares usando las ecuaciones 21-10. Despreciando los subíndices $O$ y $G$ resulta

$$\Sigma M_x = I_{xx}\dot{\omega}_x - (I_{yy} - I_{zz})\omega_y\omega_z - I_{xy}(\dot{\omega}_y - \omega_z\omega_x) - I_{yz}(\omega_y^2 - \omega_z^2) - I_{zx}(\dot{\omega}_z + \omega_x\omega_y)$$
$$\Sigma M_y = I_{yy}\dot{\omega}_y - (I_{zz} - I_{xx})\omega_z\omega_x - I_{yz}(\dot{\omega}_z - \omega_x\omega_y) - I_{zx}(\omega_z^2 - \omega_x^2) - I_{xy}(\dot{\omega}_x + \omega_y\omega_z) \qquad (21\text{–}24)$$
$$\Sigma M_z = I_{zz}\dot{\omega}_z - (I_{xx} - I_{yy})\omega_x\omega_y - I_{zx}(\dot{\omega}_x - \omega_y\omega_z) - I_{xy}(\omega_x^2 - \omega_y^2) - I_{yz}(\dot{\omega}_y + \omega_z\omega_x)$$

Observe que para un cuerpo rígido simétrico con respecto al plano de referencia $x$-$y$, y experimentando movimiento plano general en este plano, $I_{xz} = I_{yz} = 0$, y $\omega_x = \omega_y = d\omega_x/dt = d\omega_y/dt = 0$. Las ecuaciones 21-24 se reducen a la forma $\Sigma M_x = \Sigma M_y = 0$, y $\Sigma M_z = I_{zz}\alpha_z$ (donde $\alpha_z = \dot{\omega}_z$), la cual esencialmente es la tercera de las ecuaciones 17-16 o 17-17 dependiendo de la selección del punto $O$ o del $G$ para sumar momentos.

Si los ejes $x, y, z$ se eligen como los *ejes principales de inercia*, los productos de inercia son cero, $I_{xx} = I_x$, etc., y las ecuaciones 21-24 se reducen a la forma

$$\Sigma M_x = I_x\dot{\omega}_x - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z$$
$$\Sigma M_y = I_y\dot{\omega}_y - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x \qquad (21\text{–}25)$$
$$\Sigma M_z = I_z\dot{\omega}_z - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y$$

Este conjunto de ecuaciones se conocen históricamente como las *ecuaciones de movimiento de Euler*, en honor del matemático suizo Leonhard Euler, quien fue el primero en desarrollarlas. Estas ecuaciones son aplicables *sólo* para momentos sumados con respecto al punto $O$ o al $G$.

Al aplicar esas ecuaciones debe ser claro que $\dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z$ representan las derivadas con respecto al tiempo de las magnitudes de las componentes $x, y, z$ de $\boldsymbol{\omega}$ como son observadas desde el marco $x, y, z$. Ya que los ejes $x, y, z$ están rotando a $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$, entonces, de la ecuación 20-6, debe observarse que $\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega}$. Como $\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$, $\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz}$. Este importante resultado indica que la requerida derivada con respecto al tiempo de $\boldsymbol{\omega}$ se puede obtener encontrando primero las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ a lo largo de los ejes $x, y, z$, cuando estos ejes están orientados en una posición general, *para luego* tomar la derivada con respecto al tiempo de las magnitudes de estas componentes, esto es, $(\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz}$, o bien encontrando la derivada con respecto al tiempo de $\boldsymbol{\omega}$ sobre los ejes $X, Y, Z$, es decir, $\dot{\boldsymbol{\omega}}$, para determinar entonces las componentes $\dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z$. En la práctica, generalmente es más fácil calcular $\dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z$ después de encontrar $\dot{\boldsymbol{\omega}}$. Vea el ejemplo 21-5.

**Ejes $x, y, z$ con movimiento $\Omega \neq \omega$.** Para simplificar los cálculos de la derivada con respecto al tiempo de $\boldsymbol{\omega}$, a menudo es conveniente elegir los ejes $x, y, z$ con una velocidad angular $\Omega$ que sea diferente de la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del cuerpo. Esto es particularmente apropiado para el análisis de trompos rotatorios y giróscopos que son *simétricos* con respecto a sus ejes de giro.* Cuando es este el caso, los momentos y productos de inercia permanecen constantes durante el movimiento.

Las ecuaciones 21-22 son aplicables para un conjunto tal de ejes seleccionados. Cada una de estas dos ecuaciones vectoriales puede ser reducida a un conjunto de tres ecuaciones escalares que se derivan de manera similar a las ecuaciones 21-25,† esto es,

$$
\begin{aligned}
\Sigma M_x &= I_x\dot{\omega}_x - I_y\Omega_z\omega_y + I_z\Omega_y\omega_z \\
\Sigma M_y &= I_y\dot{\omega}_y - I_z\Omega_x\omega_z + I_x\Omega_z\omega_x \\
\Sigma M_z &= I_z\dot{\omega}_z - I_x\Omega_y\omega_x + I_y\Omega_x\omega_y
\end{aligned}
\qquad (21\text{–}26)
$$

Aquí $\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z$ representan las componentes $x, y, z$ de $\Omega$ medidas desde el marco de referencia inercial, y $\dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z$ deben ser determinadas con respecto a los ejes $x, y, z$ que tienen la rotación $\Omega$. Vea el ejemplo 21-6.

Cualquiera de estos conjuntos de ecuaciones de momento, ecuaciones 21-24, 21-25 o 21-26, representa una serie de tres ecuaciones diferenciales no lineales de primer orden. Estas ecuaciones están "acopladas" ya que las componentes de velocidad angular se encuentran presentes en todos los términos. El éxito en determinar la solución para un problema en particular depende, por tanto, de lo que sea desconocido en estas ecuaciones. Naturalmente que surgen dificultades cuando se intenta encontrar las componentes desconocidas de $\boldsymbol{\omega}$, dados los momentos externos como funciones del tiempo. Complicaciones adicionales pueden surgir si las ecuaciones de momento están acopladas a las tres ecuaciones escalares de movimiento traslacional, ecuaciones 21-19. Esto puede suceder

*En la sección 21.5 se presenta un análisis detallado de tales dispositivos.
†Vea el problema 21-41.

debido a la existencia de restricciones cinemáticas que relacionan la rotación del cuerpo con la traslación de su centro de masa, como en el caso de un aro que rueda sin deslizar. Los problemas que necesitan la solución simultánea de ecuaciones diferenciales requieren generalmente la aplicación de métodos numéricos con la ayuda de una computadora. Sin embargo, en muchos problemas de ingeniería se requiere determinar los momentos aplicados que actúan en el cuerpo dada información acerca del movimiento del cuerpo. Afortunadamente, muchos de estos tipos de problemas tienen soluciones directas y entonces no hay necesidad de recurrir a técnicas de computadora.

## PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

Los problemas que implican movimiento tridimensional de un cuerpo rígido pueden ser resueltos usando el siguiente procedimiento.

*Diagrama de cuerpo libre.*

- Dibuje un *diagrama de cuerpo libre* del cuerpo en el instante considerado y especifique el sistema coordenado $x, y, z$. El origen de este marco de referencia debe estar situado en el centro de masa $G$ del cuerpo, o en el punto $O$, considerado fijo en un marco de referencia inercial y ubicado en el cuerpo o sobre una extensión sin masa del cuerpo.
- Las fuerzas reactivas desconocidas se pueden mostrar con un sentido de dirección positivo.
- Dependiendo de la naturaleza del problema, decida qué tipo de movimiento rotatorio $\Omega$ debe tener el sistema coordenado $x, y, z$, esto es, $\Omega = \mathbf{0}$, $\Omega = \boldsymbol{\omega}$, o $\Omega \neq \boldsymbol{\omega}$. Al elegir, debe recordarse que las ecuaciones de momento se simplifican cuando los ejes se mueven de tal manera que representan ejes principales de inercia para el cuerpo en todo momento.
- Calcule los momentos y productos de inercia necesarios para el cuerpo relativos a los ejes $x, y, z$.

*Cinemática.*

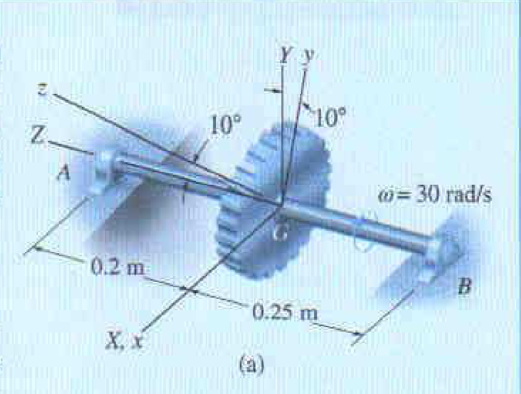
- Determine las componentes $x, y, z$ de la velocidad angular del cuerpo y calcule las derivadas con respecto al tiempo de $\boldsymbol{\omega}$.
- Observe que si $\Omega = \boldsymbol{\omega}$, entonces $\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz}$, y podemos encontrar las componentes de $\boldsymbol{\omega}$ a lo largo de los ejes $x, y, z$ cuando los ejes están orientados en una posición general, y luego tomar la derivada con respecto al tiempo de las magnitudes de estas componentes, $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{xyz}$; o bien podemos encontrar la derivada con respecto al tiempo de $\boldsymbol{\omega}$ sobre los ejes $X, Y, Z$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}$, y luego determinar las componentes $\dot{\omega}_x, \dot{\omega}_y, \dot{\omega}_z$.

*Ecuaciones de movimiento.*

- Aplique las dos ecuaciones vectoriales 21-18 y 21-22, o las seis ecuaciones de componentes escalares apropiadas para los ejes coordenados $x, y, z$ elegidos para el problema.

## EJEMPLO 21.4

El engrane mostrado en la figura 21-12*a* tiene masa de 10 kg y está montado a un ángulo de 10° con una flecha rotatoria de masa insignificante. Si $I_z = 0.1\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$, $I_x = I_y = 0.05\ \text{kg}\cdot\text{m}^2$, y la flecha está rotando con velocidad angular constante de $\omega = 30$ rad/s, determine las reacciones que las chumaceras de soporte *A* y *B* ejercen sobre la flecha en el instante mostrado.



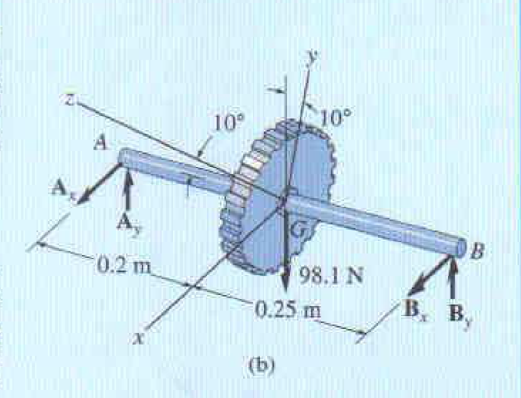
(a)

### Solución

*Diagrama de cuerpo libre.* Figura 21-12*b*. El origen del sistema coordenado *x*, *y*, *z* está situado en el centro de masa *G* del engrane, que es también un punto fijo. Los ejes están fijos en el engrane y giran con él, ya que estos ejes siempre representarán los ejes principales de inercia del engrane. Por consiguiente $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$.

*Cinemática.* Como se muestra en la figura 21-12*c*, la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del engrane es constante en magnitud y siempre está dirigida a lo largo del eje de la flecha *AB*. Como este vector se mide desde el marco de referencia inercial *X*, *Y*, *Z*, para cualquier posición de los ejes *x*, *y*, *z*,

$$\omega_x = 0 \qquad \omega_y = -30 \text{ sen } 10^\circ \qquad \omega_z = 30 \cos 10^\circ$$



(b)

Estas componentes permanecen constantes para cualquier orientación general de los ejes *x*, *y*, *z*, por lo que $\dot{\omega}_x = \dot{\omega}_y = \dot{\omega}_z = 0$. Observe también que como $\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$, entonces $\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz}$ y podemos encontrar estas derivadas con respecto al tiempo relativas a los ejes *X*, *Y*, *Z*. Con respecto a esto $\boldsymbol{\omega}$ tiene una magnitud y dirección (+*Z*) constantes y entonces $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{0}$, por lo que $\dot{\omega}_x = \dot{\omega}_y = \dot{\omega}_z = 0$. Además, como *G* es un punto fijo, $(a_G)_x = (a_G)_y = (a_G)_z = 0$.

*Ecuaciones de movimiento.* Aplicando las ecuaciones 21-25 ($\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{\omega}$) se obtiene

$$\Sigma M_x = I_x\dot{\omega}_x - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z$$

$$-(A_Y)(0.2) + (B_Y)(0.25) = 0 - (0.05 - 0.1)(-30 \text{ sen } 10^\circ)(30 \cos 10^\circ)$$

$$-0.2A_Y + 0.25B_Y = -7.70 \qquad (1)$$

$$\Sigma M_y = I_y\dot{\omega}_y - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x$$

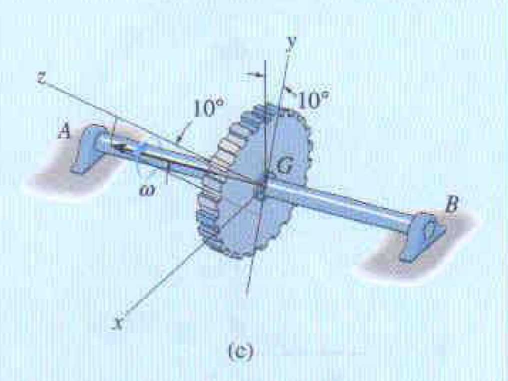
$$A_X(0.2)\cos 10^\circ - B_X(0.25)\cos 10^\circ = 0 + 0$$

$$A_X = 1.25B_X \qquad (2)$$

$$\Sigma M_z = I_z\dot{\omega}_z - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y$$

$$A_X(0.2) \text{ sen } 10^\circ - B_X(0.25) \text{ sen } 10^\circ = 0 + 0$$

$$A_X = 1.25B_X$$



(c)

Fig. 21-12

Aplicando las ecuaciones 21-19, tenemos

$$\Sigma F_X = m(a_G)_X; \qquad A_X + B_X = 0 \qquad (3)$$

$$\Sigma F_Y = m(a_G)_Y; \qquad A_Y + B_Y - 98.1 = 0 \qquad (4)$$

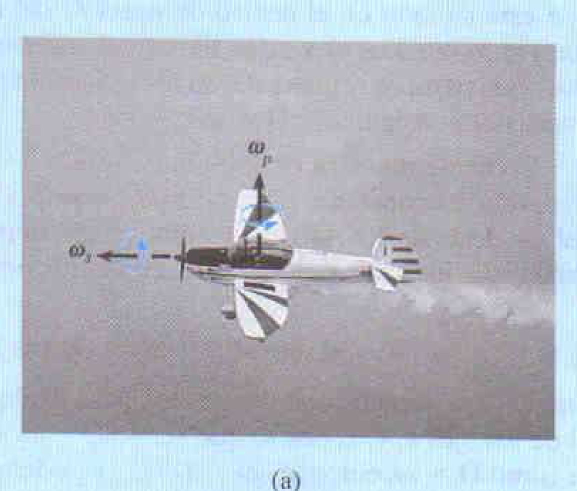
$$\Sigma F_Z = m(a_G)_Z; \qquad 0 = 0$$

Resolviendo simultáneamente las ecuaciones de la 1 a la 4 resulta en

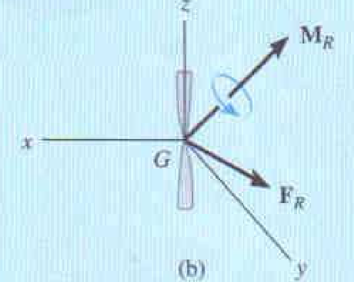
$A_X = B_X = 0 \qquad A_Y = 71.6\text{ N} \qquad B_Y = 26.5\text{ N}$ *Resp.*

## EJEMPLO 21.5

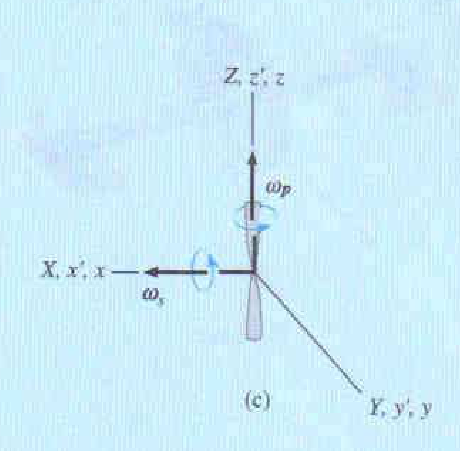
El avión mostrado en la figura 21-13*a* está efectuando una vuelta *horizontal* a razón de $\omega_p$. Durante este movimiento, la hélice del avión está girando a razón de $\omega_s$. Si la hélice tiene dos aspas, determine los momentos que el eje de la hélice ejerce sobre la hélice en el instante en que las aspas están en posición vertical. Por simplicidad, suponga que las aspas son barras uniformes esbeltas con momento de inercia $I$ con respecto a un eje perpendicular a las aspas y que pasa por su centro s, y con cero momento de inercia con respecto a un eje longitudinal.



(a)



(b)



(c)

Fig. 21-13

### Solución

***Diagrama de cuerpo libre.*** Figura 21-13*b*. El efecto de la flecha conectora sobre la hélice es indicado por las resultantes $\mathbf{F}_R$ y $\mathbf{M}_R$. (Se supone que el peso de la hélice es insignificante.) Los ejes $x, y, z$ se tomarán fijos a la hélice, ya que esos ejes siempre representan los ejes principales de inercia para la hélice. Así, $\Omega = \boldsymbol{\omega}$. Los momentos de inercia $I_x$ e $I_y$ son iguales ($I_x = I_y = I$) e $I_z = 0$.

***Cinemática.*** La velocidad angular de la hélice observada desde los ejes $X, Y, Z$, que coinciden con los ejes $x, y, z$, figura 21-13*c*, es $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_s + \boldsymbol{\omega}_p = \omega_s\mathbf{i} + \omega_p\mathbf{k}$, de manera que las componentes $x, y, z$ de $\boldsymbol{\omega}$ son

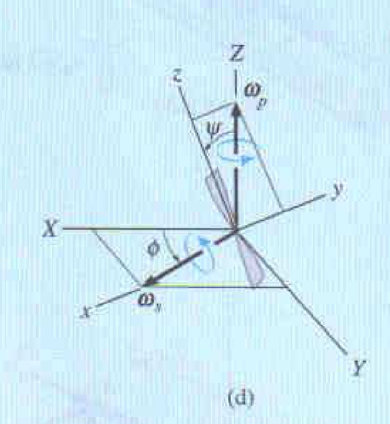
$$\omega_x = \omega_s \qquad \omega_y = 0 \qquad \omega_z = \omega_p$$

Como $\Omega = \boldsymbol{\omega}$, entonces $\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz}$. La derivada con respecto al tiempo de $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ puede ser determinada con respecto a los ejes fijos $X, Y, Z$. Para hacer esto, debe usarse la ecuación 20-6 ya que $\boldsymbol{\omega}$ está cambiando de dirección con respecto a $X, Y, Z$. Como $\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega}_s + \boldsymbol{\omega}_p$, entonces $\dot{\boldsymbol{\omega}} = \dot{\boldsymbol{\omega}}_s + \dot{\boldsymbol{\omega}}_p$. La razón de cambio con respecto al tiempo de cada una de estas componentes relativa a los ejes $X, Y, Z$ se puede obtener usando un tercer sistema coordenado $x', y', z'$, el cual tenga velocidad angular $\Omega' = \boldsymbol{\omega}_p$ y sea coincidente con los ejes $X, Y, Z$ en el instante mostrado. Entonces,

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\omega}} &= (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega} \\ &= (\dot{\boldsymbol{\omega}}_s)_{x'y'z'} + (\dot{\boldsymbol{\omega}}_p)_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_p \times (\boldsymbol{\omega}_s + \boldsymbol{\omega}_p) \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{0} + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_s + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega}_p \\ &= \mathbf{0} + \mathbf{0} + \omega_p\mathbf{k} \times \omega_s\mathbf{i} + \mathbf{0} = \omega_p\omega_s\mathbf{j}\end{aligned}$$

Como los ejes $X, Y, Z$ coinciden con los ejes $x, y, z$ en el instante mostrado, las componentes de $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ a lo largo de $x$ y $z$ son, por tanto,

$$\dot{\omega}_x = 0 \qquad \dot{\omega}_y = \omega_p\omega_s \qquad \dot{\omega}_z = 0$$



(d)

Estos mismos resultados pueden determinarse también por cálculo directo de $(\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz}$; sin embargo, ello implica algo más de trabajo. Para hacerlo así, será necesario ver la hélice (o los ejes $x, y, z$) en alguna *posición general* como la mostrada en la figura 21-13*d*. Aquí el plano ha girado un ángulo $\phi$ y la hélice ha girado un ángulo $\psi$ con respecto al plano. Observe que $\boldsymbol{\omega}_p$ está dirigida siempre a lo largo del eje fijo $Z$ y $\boldsymbol{\omega}_s$ sigue al eje $x$. Entonces, las componentes generales de $\boldsymbol{\omega}$ son

$$\omega_x = \omega_s \qquad \omega_y = \omega_p \operatorname{sen}\psi \qquad \omega_z = \omega_p\cos\psi$$

Como $\omega_s$ y $\omega_p$ son constantes, las derivadas con respecto al tiempo de estas componentes se convierten en

$$\dot{\omega}_x = 0 \qquad \dot{\omega}_y = \omega_p\cos\psi\,\dot{\psi} \qquad \dot{\omega}_z = -\omega_p\operatorname{sen}\psi\,\dot{\psi}$$

Pero $\phi = \psi = 0°$ y $\dot{\psi} = \omega_s$ en el instante considerado. Entonces,

$$\begin{aligned}&\omega_x = \omega_s \qquad &&\omega_y = 0 \qquad &&\omega_z = \omega_p \\ &\dot{\omega}_x = 0 &&\dot{\omega}_y = \omega_p\omega_s &&\dot{\omega}_z = 0\end{aligned}$$

que son los mismos resultados obtenidos previamente.

*Ecuaciones de movimiento.* Usando las ecuaciones 21-25, tenemos

$$\Sigma M_x = I_x\dot{\omega}_x - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z = I(0) - (I - 0)(0)\omega_p$$

$$M_x = 0 \qquad \textit{Resp.}$$

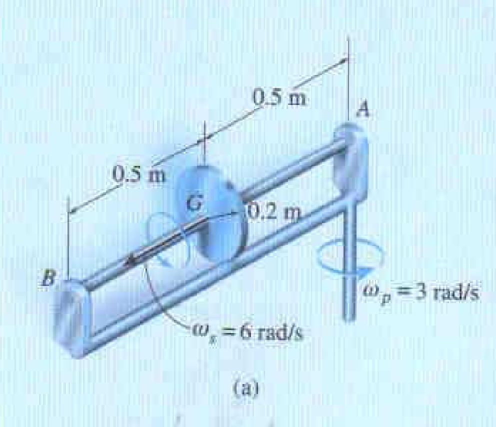
$$\Sigma M_y = I_y\dot{\omega}_y - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x = I(\omega_p\omega_s) - (0 - I)\omega_p\omega_s$$

$$M_y = 2I\omega_p\omega_s \qquad \textit{Resp.}$$

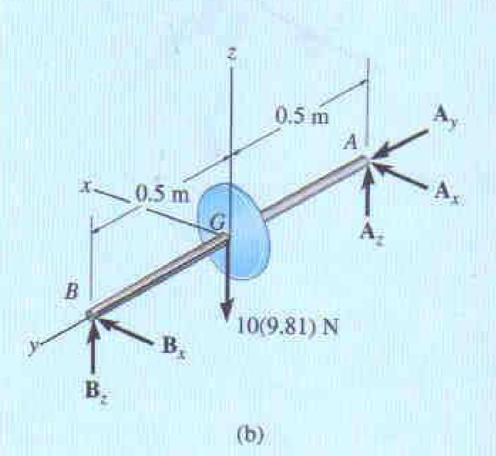
$$\Sigma M_z = I_z\dot{\omega}_z - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y = 0(0) - (I - I)\omega_s(0)$$

$$M_z = 0 \qquad \textit{Resp.}$$

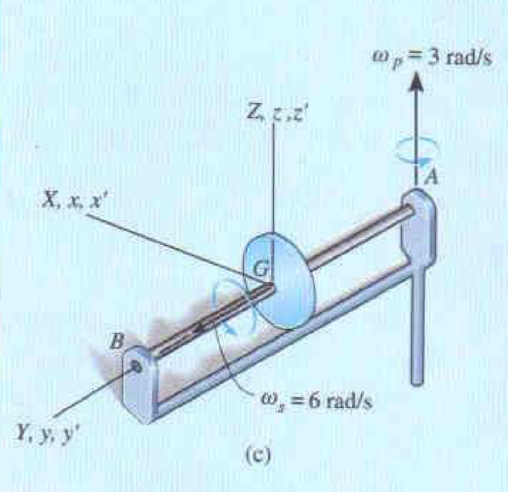
## EJEMPLO 21.6




(a)




(b)




(c)

**Fig. 21-14**

El volante (o disco delgado) de 10 kg mostrado en la figura 21-14*a* gira alrededor de la flecha con velocidad angular constante $\omega_s = 6$ rad/s. Al mismo tiempo, la flecha precesa con respecto a la chumacera ubicada en $A$ con velocidad angular $\omega_p = 3$ rad/s. Si $A$ es una chumacera de empuje y $B$ es una chumacera simple, determine las componentes de fuerza de reacción en cada uno de estos soportes debido al movimiento.

### Solución I

***Diagrama de cuerpo libre.*** Figura 21-14*b*. El origen del sistema coordenado $x, y, z$ está situado en el centro de masa $G$ del volante. Aquí consideraremos que estas coordenadas tienen velocidad angular $\Omega = \boldsymbol{\omega}_p = \{3\mathbf{k}\}$ rad/s. Aunque la rueda gira con respecto a estos ejes, los momentos de inercia *permanecen constantes*,* esto es,

$$I_x = I_z = \tfrac{1}{4}(10 \text{ kg})(0.2 \text{ m})^2 = 0.1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$
$$I_y = \tfrac{1}{2}(10 \text{ kg})(0.2 \text{ m})^2 = 0.2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

***Cinemática.*** A partir del marco de referencia inercial $X\,Y\,Z$ coincidente, figura 21-14*c*, el volante tiene velocidad angular $\boldsymbol{\omega} = \{6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\}$ rad/s, de manera que

$$\omega_x = 0, \quad \omega_y = 6 \text{ rad/s}, \quad \omega_z = 3 \text{ rad/s}$$

La derivada con respecto al tiempo de $\boldsymbol{\omega}$ debe ser determinada con relación a los ejes $x, y, z$. En este caso, ambas $\boldsymbol{\omega}_p$ y $\boldsymbol{\omega}_s$ no cambian y entonces

$$\dot{\omega}_x = 0, \quad \dot{\omega}_y = 0, \quad \dot{\omega}_z = 0$$

***Ecuaciones de movimiento.*** Aplicando las ecuaciones 21-26 ($\Omega \neq \boldsymbol{\omega}$) resulta

$$\Sigma M_x = I_x\dot{\omega}_x - I_y\Omega_z\omega_y + I_z\Omega_y\omega_z$$
$$-A_z(0.5) + B_z(0.5) = 0 - (0.2)(3)(6) + 0 = -3.6$$
$$\Sigma M_y = I_y\dot{\omega}_y - I_z\Omega_x\omega_z + I_x\Omega_z\omega_x$$
$$0 = 0 - 0 + 0$$
$$\Sigma M_z = I_z\dot{\omega}_z - I_x\Omega_y\omega_x + I_y\Omega_x\omega_y$$
$$A_x(0.5) - B_x(0.5) = 0 - 0 + 0$$

Aplicando las ecuaciones 21-19, tenemos

$$\Sigma F_X = m(a_G)_X; \qquad A_x + B_x = 0$$
$$\Sigma F_Y = m(a_G)_Y; \qquad A_y = -10(0.5)(3)^2$$
$$\Sigma F_Z = m(a_G)_Z; \qquad A_z + B_z - 10(9.81) = 0$$

Resolviendo estas ecuaciones, obtenemos

$$A_x = 0 \qquad A_y = -45.0 \text{ N} \qquad A_z = 52.6 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$
$$B_x = 0 \qquad B_z = 45.4 \text{ N} \qquad \textit{Resp.}$$

Observe que si la precesión $\boldsymbol{\omega}_p$ no hubiese ocurrido, las reacciones en $A$ y $B$ habrían sido igual a 49.05 N. Sin embargo, en este caso la diferencia en las reacciones es causada por el "momento giroscópico", creado siempre que un cuerpo girando precesa con respecto a otro eje. Estudiaremos este efecto en la próxima sección.

*Esto no sería cierto para la hélice en el ejemplo 21.5.

**Solución II**

Este ejemplo también puede ser resuelto usando las ecuaciones de movimiento de Euler, ecuaciones 21-25. En este caso $\Omega = \boldsymbol{\omega} = \{6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\}$ rad/s, y la derivada con respecto al tiempo $(\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz}$ puede obtenerse convenientemente con respecto a los ejes fijos $X, Y, Z$ ya que $\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{xyz}$. Este cálculo puede efectuarse seleccionando ejes $x', y', z'$ que tengan velocidad angular $\Omega' = \boldsymbol{\omega}_p$, figura 21-14c, de manera que

$$\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\dot{\boldsymbol{\omega}})_{x'y'z'} + \boldsymbol{\omega}_p \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{0} + 3\mathbf{k} \times (6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = \{-18\mathbf{i}\} \text{ rad/s}^2$$

$$\dot{\omega}_x = -18 \text{ rad/s} \quad \dot{\omega}_y = 0 \quad \dot{\omega}_z = 0$$

Las ecuaciones de momento se convierten en

$$\Sigma M_x = I_x\dot{\omega}_x - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z$$
$$-A_z(0.5) + B_z(0.5) = 0.1(-18) - (0.2 - 0.1)(6)(3) = -3.6$$
$$\Sigma M_y = I_y\dot{\omega}_y - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x$$
$$0 = 0 - 0$$
$$\Sigma M_z = I_z\dot{\omega}_z - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y$$
$$A_x(0.5) - B_x(0.5) = 0 - 0$$

La solución procede entonces como antes.

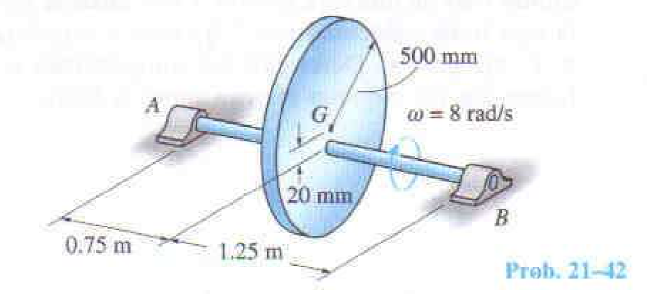
# PROBLEMAS

**21-39.** Derive la forma escalar de la ecuación rotatoria del movimiento a lo largo del eje $x$ cuando $\Omega \neq \boldsymbol{\omega}$ y los momentos y productos de inercia del cuerpo *no son constantes* con respecto al tiempo.

***21-40.** Derive la forma escalar de la ecuación rotatoria del movimiento a lo largo del eje $x$ cuando $\Omega \neq \boldsymbol{\omega}$ y los momentos y productos de inercia del cuerpo son *constantes* con respecto al tiempo.

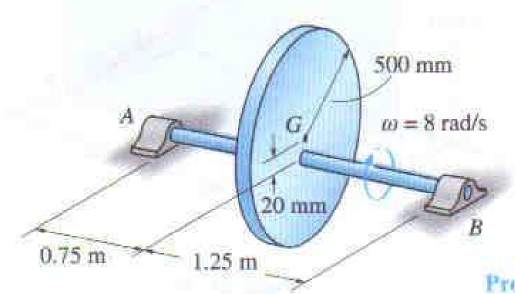
**21-41.** Derive las ecuaciones del movimiento de Euler para $\Omega \neq \boldsymbol{\omega}$, esto es, las ecuaciones 21-26.

**21-42.** El volante (disco) de 40 kg está montado 20 mm desfasado de su centro verdadero en $G$. Si la flecha se encuentra girando con rapidez constante $\omega = 8$ rad/s, determine las reacciones máximas ejercidas sobre las chumaceras instaladas en $A$ y $B$.



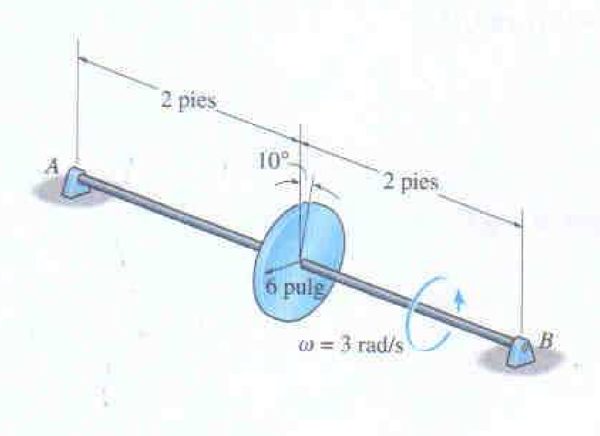

Prob. 21-42

**21-43.** El volante (disco) de 40 kg está montado 20 mm desfasado de su centro verdadero en $G$. Si la flecha se encuentra girando con rapidez constante $\omega = 8$ rad/s, determine las reacciones mínimas ejercidas sobre las chumaceras instaladas en $A$ y $B$ durante el movimiento.



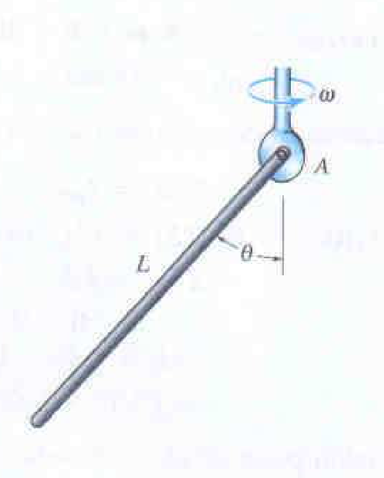

Prob. 21-43

*21-44. El disco de 20 lb está montado sobre la flecha horizontal $AB$ de manera que su plano forma un ángulo de 10° con la vertical. Si la flecha gira con velocidad angular de 3 rad/s, determine las reacciones verticales desarrolladas en las chumaceras cuando el disco está en la posición mostrada.



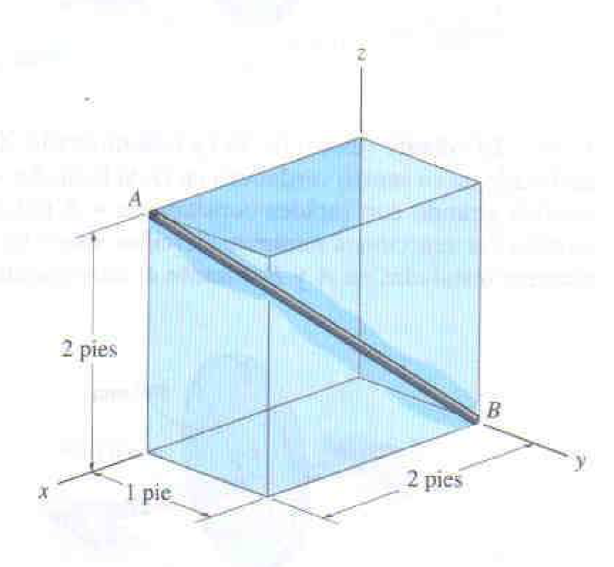

Prob. 21–44

21-46. El péndulo cónico consta de una barra de masa $m$ y longitud $L$ que se encuentra soportada mediante un pasador en su extremo $A$. Si el pasador está sometido a una rotación $\boldsymbol{\omega}$, determine el ángulo $\theta$ que la barra forma con la vertical cuando gira. Determine también las componentes de reacción en el pasador.



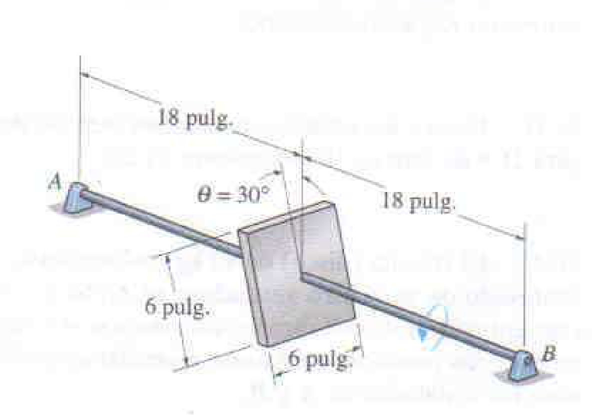

Prob. 21–46

21-45. La barra de 4 lb descansa a lo largo de las esquinas lisas de una caja abierta. En el instante mostrado, la caja tiene velocidad $\mathbf{v} = \{3\mathbf{j}\}$ pies/s y aceleración $\mathbf{a} = \{-6\mathbf{j}\}$ pies/s$^2$. Determine las componentes $x$, $y$, $z$ de fuerza que las esquinas ejercen sobre la barra.



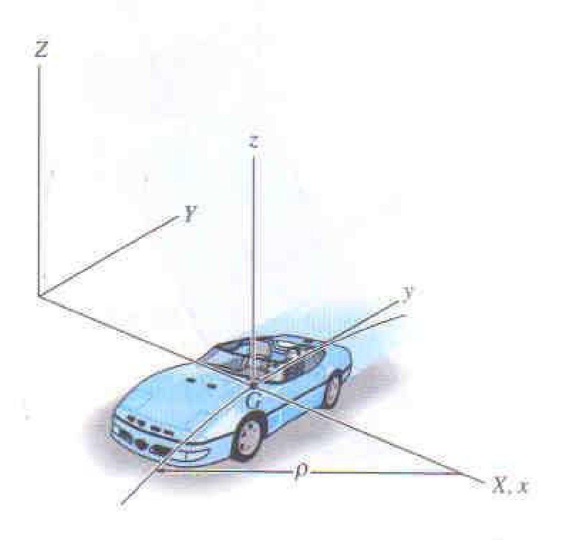

Prob. 21–45

21-47. La placa de 20 lb está montada sobre la flecha $AB$ de modo que el plano de la placa forma un ángulo $\theta = 30°$ con la vertical. Si la flecha está girando en la dirección mostrada con velocidad angular de 25 rad/s, determine las reacciones verticales en las chumaceras de apoyo $A$ y $B$ cuando la placa está en la posición mostrada.



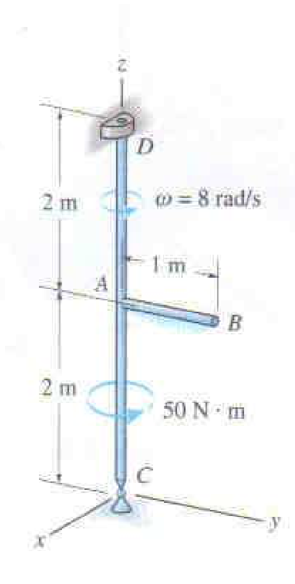

Prob. 21–47

*21-48. El auto está viajando alrededor del camino curvo de radio $\rho$ de manera que su centro de masa tiene rapidez constante $v_G$. Escriba las ecuaciones de movimiento rotatorio con respecto a los ejes $x, y, z$. Suponga que los seis momentos y productos de inercia del auto con respecto a estos ejes son conocidos.



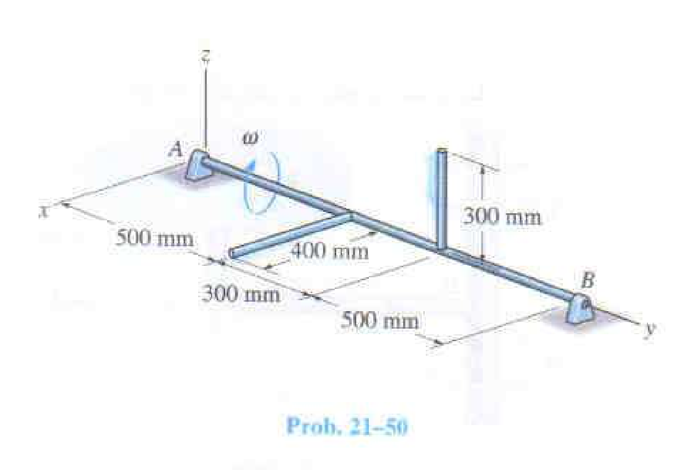

Prob. 21–48

21-49. El conjunto de barras está soportado mediante una junta esférica colocada en $C$ y una chumacera en $D$, que genera sólo reacciones de fuerza $x$ y $y$. Las barras tienen masa de 0.75 kg/m. Determine la aceleracion angular de las barras y las componentes de reacción en los soportes en el instante $\omega = 8$ rad/s como se muestra.



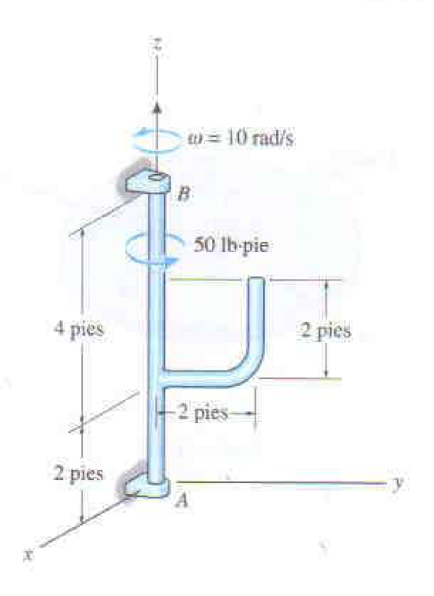

Prob. 21–49

21-50. El conjunto de barras está soportado por chumaceras instaladas en $A$ y $B$, las cuales desarrollan sólo reacciones de fuerza $x$ y $y$ sobre la flecha. Si la flecha $AB$ gira en la dirección mostrada a $\boldsymbol{\omega} = \{-5\mathbf{j}\}$ rad/s, determine las reacciones en las chumaceras cuando el conjunto está en la posición mostrada. Calcule también la aceleración angular de la flecha. La masa de cada barra es de 1.5 kg/m.




Prob. 21–50

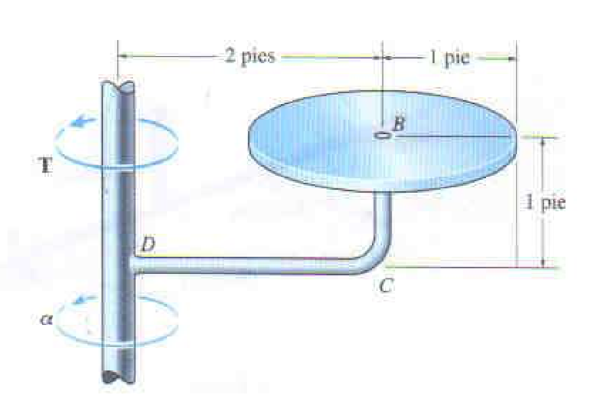
21-51. El conjunto de barras tiene un peso de 5 lb/pie. Está soportado en el punto $B$ mediante una chumacera de apoyo lisa, la cual desarrolla reacciones de fuerza en $x$, $y$, y en $A$ por una chumacera de empuje, que desarrolla reacciones de fuerza en $x, y, z$. Si se aplica un par de 50 lb · pie a lo largo de la barra $AB$, determine las componentes de reacción en los apoyos si el conjunto tiene una velocidad angular $\omega = 10$ rad/s en el instante mostrado.




Prob. 21–51

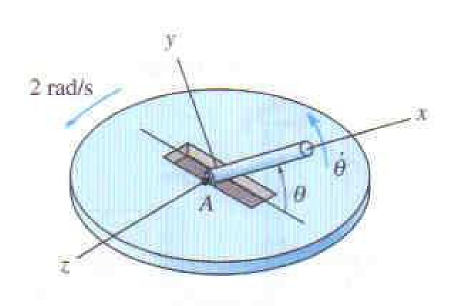
*21-52. El disco de 25 lb está *fijo* a la barra $BCD$ que tiene masa insignificante. Determine el par $T$ que debe aplicarse a la flecha vertical para que tenga aceleración angular $\alpha = 6$ rad/s$^2$. La flecha puede girar libremente en sus apoyos.

21-53. Resuelva el problema 21-52 suponiendo que la barra $BCD$ tiene un peso de 2 lb/pie.



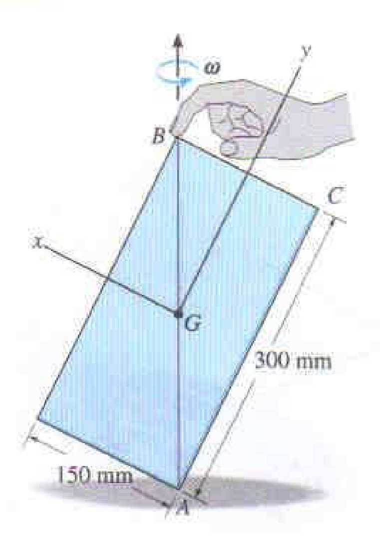

Probs. 21–52/53

21-54. La *barra delgada* tiene masa de 0.8 kg y longitud total de 150 mm. Está girando con respecto a su punto medio a una razón constante $\dot{\theta} = 6$ rad/s, mientras que la mesa a la que el punto $A$ de su eje está unida gira a 2 rad/s. Determine las componentes de momento $x$, $y$, $z$ que ejerce el eje sobre la barra cuando la barra está en cualquier posición $\theta$.



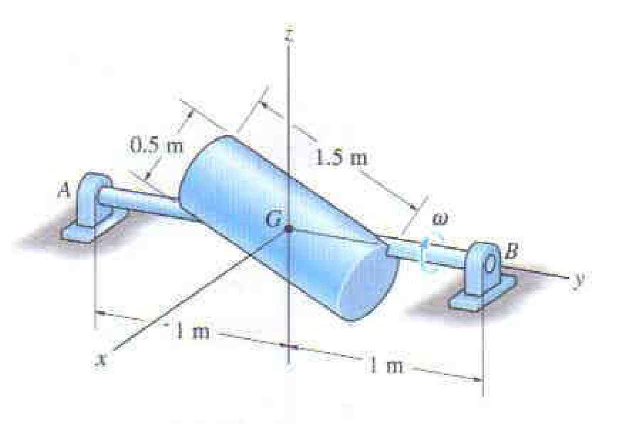

Prob. 21–54

21-55. Una placa delgada uniforme con masa de 0.4 kg está girando a velocidad angular constante $\boldsymbol{\omega}$ con respecto a su diagonal $AB$. Si la persona que sostiene la esquina de la placa en el punto $B$ quita su dedo, la placa caerá hacia abajo sobre su lado $AC$. Determine el momento $M$ de par necesario que al aplicarlo a la placa impedirá que esto suceda.



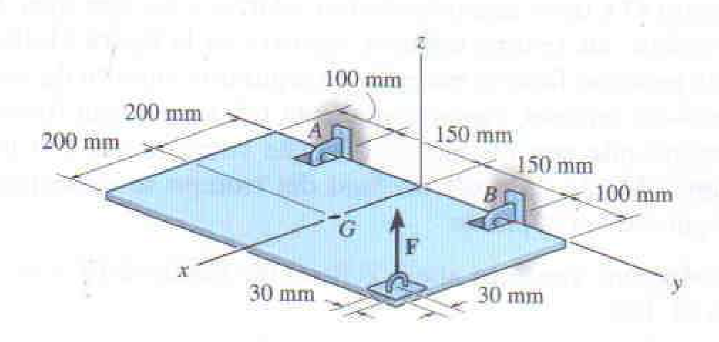

Prob. 21–55

*21-56. El cilindro tiene masa de 30 kg y está montado sobre un eje sostenido mediante chumaceras instaladas en $A$ y $B$. Si el eje está girando a $\boldsymbol{\omega} = \{-40\mathbf{j}\}$ rad/s, determine las componentes verticales de fuerza que actúan sobre las chumaceras en este instante.



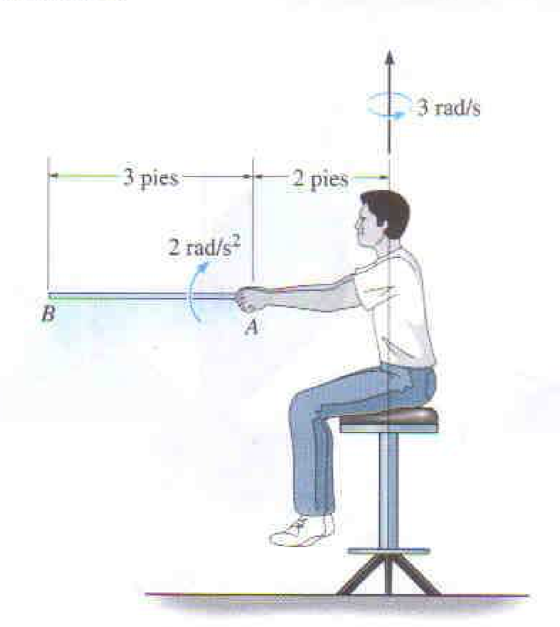

Prob. 21–56

**21-57.** La compuerta uniforme, con masa de 15 kg y centro de masa en $G$, está soportada en el plano horizontal mediante chumaceras instaladas en $A$ y $B$. Si una fuerza vertical $F = 300$ N es aplicada a la compuerta como se muestra, determine las componentes de reacción en las chumaceras y la aceleración angular de la compuerta. La chumacera colocada en $A$ resiste una componente de fuerza en la dirección $y$, mientras que la chumacera en $B$ no puede hacerlo. Para el cálculo, suponga que la compuerta es una placa delgada y desprecie el tamaño de cada chumacera. La compuerta está originalmente en reposo.



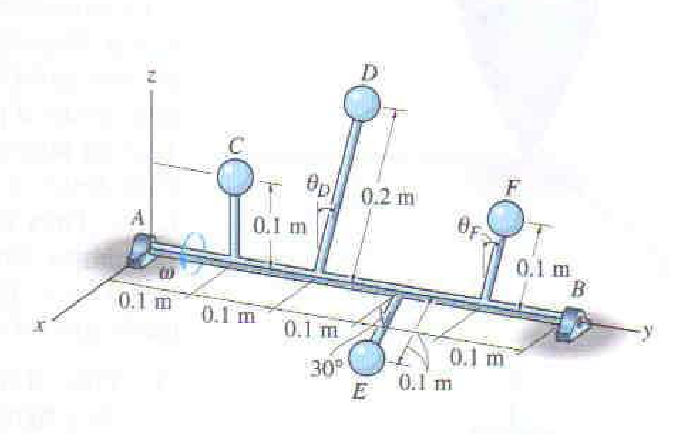

Prob. 21-57

**21-58.** El hombre está sentado en una silla giratoria que se encuentra girando con velocidad angular constante de 3 rad/s. Él sostiene horizontalmente la barra $AB$ uniforme de 5 lb; repentinamente, le imprime una aceleración angular de 2 rad/s$^2$, medida con respecto a él, como se muestra. Determine las componentes requeridas de fuerza y momento en la tenaza $A$ necesarias para hacer esto. Establezca ejes en el centro de masa $G$ de la barra, con $+z$ hacia arriba y $+y$ dirigido a lo largo del eje de la barra hacia $A$.



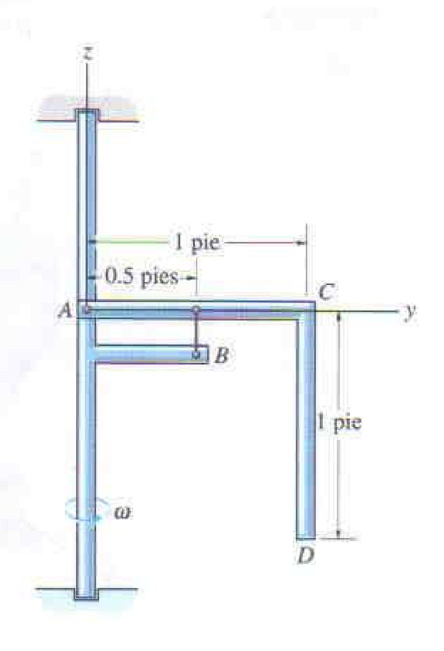

Prob. 21-58

**21-59.** Cuatro esferas están conectadas a la flecha $AB$. Si $m_C = 1$ kg y $m_E = 2$ kg, determine la masa de $D$ y $F$ y los ángulos de las barras, $\theta_D$ y $\theta_F$, de manera que la flecha esté balanceada dinámicamente, es decir, que las chumaceras instaladas en $A$ y $B$ ejerzan sólo reacciones verticales sobre la flecha cuando ésta gira. Desprecie la masa de las barras.



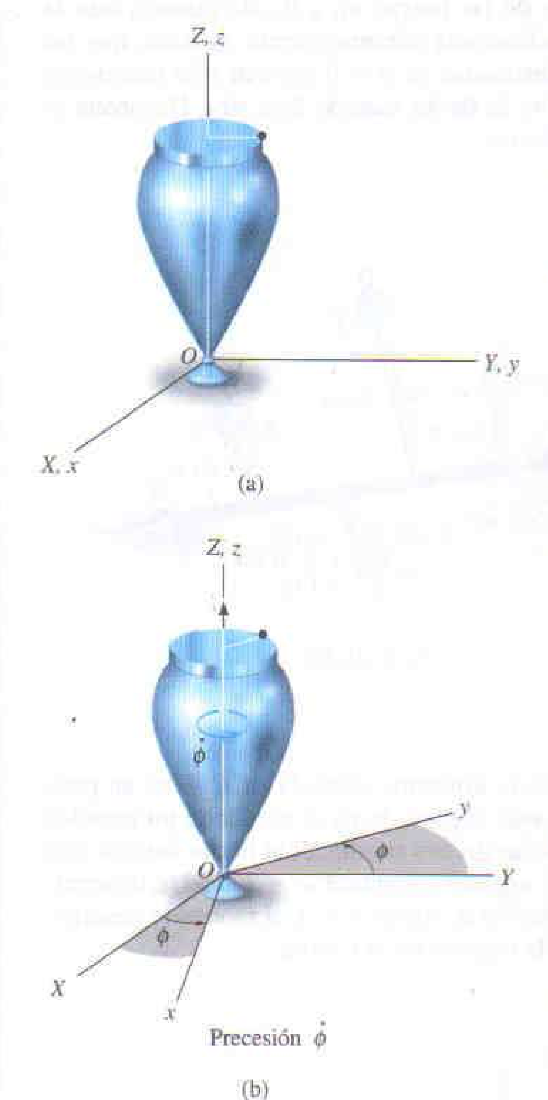

Prob. 21-59

***21-60.** La barra uniforme doblada $ACD$ tiene un peso de 5 lb/pie y está soportada en $A$ mediante un pasador y en $B$ por medio de una cuerda. Si la flecha vertical gira con velocidad angular constante $\omega = 20$ rad/s, determine las componentes de fuerza $x, y, z$, el momento desarrollado en $A$, y la tensión en la cuerda.




Prob. 21-60

# *21.5 Movimiento giroscópico




En esta sección serán desarrolladas las ecuaciones que definen el movimiento de un cuerpo (trompo) que es simétrico con respecto a un eje y se mueve alrededor de un punto fijo que se encuentra sobre el eje. Estas ecuaciones serán aplicadas entonces al estudio del movimiento de un dispositivo particularmente interesante: el giróscopo.

El movimiento del cuerpo será analizado usando los *ángulos de Euler* $\phi, \theta, \psi$. Para ilustrar cómo estos ángulos definen la posición de un cuerpo, nos referimos al trompo mostrado en la figura 21-15*a*. El trompo está unido al punto $O$ y tiene una orientación relativa a los ejes fijos $X$, $Y$, $Z$ en algún instante de tiempo como se muestra en la figura 21-15*d*. Para definir esta posición final se necesita un segundo conjunto de ejes $x$, $y$, $z$. Para fines del análisis, suponga que esta referencia está fija en el trompo. Comenzando con los ejes $X$, $Y$, $Z$ en coincidencia con los ejes $x$, $y$, $z$, Figura 21-15*a*, la posición final del trompo se determina mediante los siguientes tres pasos:

1. Gire el trompo con respecto al eje $Z$ (o $z$) un ángulo $\phi$ ($0 \leq \phi < 2\pi$), figura 21-15*b*.
2. Gire el trompo con respecto al eje $x$ un ángulo $\theta$ ($0 \leq \theta \leq \pi$), figura 21-15*c*.
3. Gire el trompo con respecto al eje $z$ un ángulo $\psi$ ($0 \leq \psi < 2\pi$) para obtener la posición final, figura 20-15*d*.

La secuencia de estos tres ángulos, $\phi$, $\theta$, y luego $\psi$, debe mantenerse, ya que las rotaciones finitas *no son vectores* (vea la Fig. 20-1). Aunque este es el caso, las rotaciones diferenciales $d\boldsymbol{\phi}$, $d\boldsymbol{\theta}$ y $d\boldsymbol{\psi}$ sí son vectores, y entonces la velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ del trompo puede ser expresada en términos de las derivadas con respecto al tiempo de los ángulos de Euler. Las componentes de velocidad angular $\dot{\phi}$, $\dot{\theta}$, y $\dot{\psi}$ son conocidas como *precesión*, *nutación* y *giro*, respectivamente.

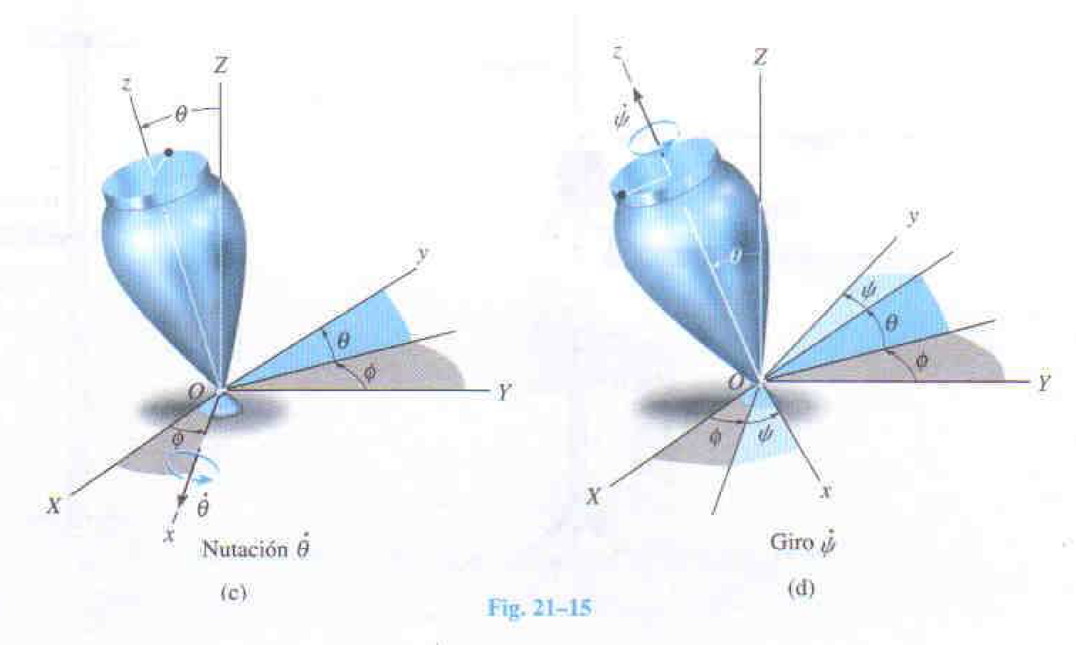



Fig. 21-15

Sus direcciones positivas se muestran en la figura 21-16. Se observa que estos vectores no son todos perpendiculares entre sí; sin embargo, la $\boldsymbol{\omega}$ del trompo aún puede expresarse en términos de estas tres componentes.

En nuestro caso, el cuerpo (trompo) es simétrico con respecto al eje $z$ o eje de giro. Si examinamos al trompo orientado de manera que en el instante considerado el ángulo de giro sea $\psi = 0$ y los ejes $x$, $y$, $z$ *sigan el movimiento del cuerpo sólo en nutación y precesión*, esto es, $\Omega = \boldsymbol{\omega}_p + \boldsymbol{\omega}_n$, entonces la nutación y el giro están dirigidos siempre a lo largo de los ejes $x$ y $z$, respectivamente, figura 21-16. Por consiguiente, la velocidad angular del cuerpo es especificada sólo en términos del ángulo de Euler $\theta$, es decir,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \omega_x\mathbf{i} + \omega_y\mathbf{j} + \omega_z\mathbf{k}\\ &= \dot{\theta}\mathbf{i} + (\dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta)\mathbf{j} + (\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})\mathbf{k}\end{aligned} \qquad (21\text{–}27)$$

Como el movimiento de los ejes no es afectado por la componente de giro,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Omega} &= \Omega_x\mathbf{i} + \Omega_y\mathbf{j} + \Omega_z\mathbf{k}\\ &= \dot{\theta}\mathbf{i} + (\dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta)\mathbf{j} + (\dot{\phi}\cos\theta)\mathbf{k}\end{aligned} \qquad (21\text{–}28)$$

Los ejes $x$, $y$, $z$ mostrados en la figura 21-16 representan *ejes principales de inercia* del cuerpo para *cualquier* giro del cuerpo con respecto a estos ejes. Por tanto, los momentos de inercia son constantes y serán representados como $I_{xx} = I_{yy} = I$ e $I_{zz} = I_z$. Ya que $\Omega \neq \boldsymbol{\omega}$, las ecuaciones 21-26 se usan para establecer las ecuaciones rotatorias del movimiento. Sustituyendo en estas ecuaciones las respectivas componentes de la velocidad angular definidas por las ecuaciones 21-27 y 21-28, sus correspondientes derivadas con respecto al tiempo, y las componentes de momento de inercia resulta

$$\begin{aligned}\Sigma M_x &= I(\ddot{\theta} - \dot{\phi}^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta) + I_z\dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})\\ \Sigma M_y &= I(\ddot{\phi}\,\text{sen}\,\theta + 2\dot{\phi}\dot{\theta}\cos\theta) - I_z\dot{\theta}(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})\\ \Sigma M_z &= I_z(\ddot{\psi} + \ddot{\phi}\cos\theta - \dot{\phi}\dot{\theta}\,\text{sen}\,\theta)\end{aligned} \qquad (21\text{–}29)$$

Cada suma de momentos se aplica sólo al punto fijo $O$ o al centro de masa $G$ del cuerpo. Como las ecuaciones representan un conjunto acoplado de ecuaciones diferenciales no lineales de segundo orden, en general no puede obtenerse una solución en forma cerrada. En vez de ello, los ángulos de Euler $\phi$, $\theta$, y $\psi$ pueden obtenerse gráficamente como funciones del tiempo usando análisis numérico y técnicas de computación.

Sin embargo, existe un caso especial para el cual la simplificación de las ecuaciones 21-29 es posible. Este caso, que comúnmente se denomina de *precesión permanente*, ocurre cuando el ángulo de nutación $\theta$, la precesión $\dot{\phi}$, y el giro $\dot{\psi}$ permanecen *constantes*. Las ecuaciones 21-29 se reducen entonces a la forma

$$\Sigma M_x = -I\dot{\phi}^2\,\text{sen}\,\theta\cos\theta + I_z\dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}) \qquad (21\text{–}30)$$

$$\begin{aligned}\Sigma M_y &= 0\\ \Sigma M_z &= 0\end{aligned}$$

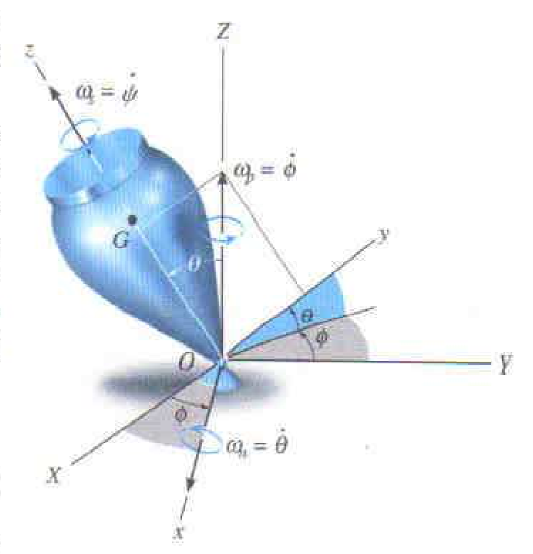



Fig. 21–16

La ecuación 21-30 puede ser simplificada aún más, observando que, a partir de la ecuación 21-27, $\omega_z = \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}$, entonces

$$\Sigma M_x = -I\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + I_z\dot{\phi}\operatorname{sen}\theta\omega_z$$

o bien

$$\Sigma M_x = \dot{\phi}\operatorname{sen}\theta(I_z\omega_z - I\dot{\phi}\cos\theta) \qquad (21\text{–}31)$$

Es interesante observar qué efectos tiene el giro $\dot{\psi}$ sobre el momento alrededor del eje $x$. Acerca de esto consideremos el rotor giratorio mostrado en la figura 21-17. Aquí $\theta = 90°$, en cuyo caso la ecuación 21-30 se reduce a la forma

$$\Sigma M_x = I_z\dot{\phi}\dot{\psi}$$

o bien

$$\Sigma M_x = I_z\Omega_y\omega_z \qquad (21\text{–}32)$$

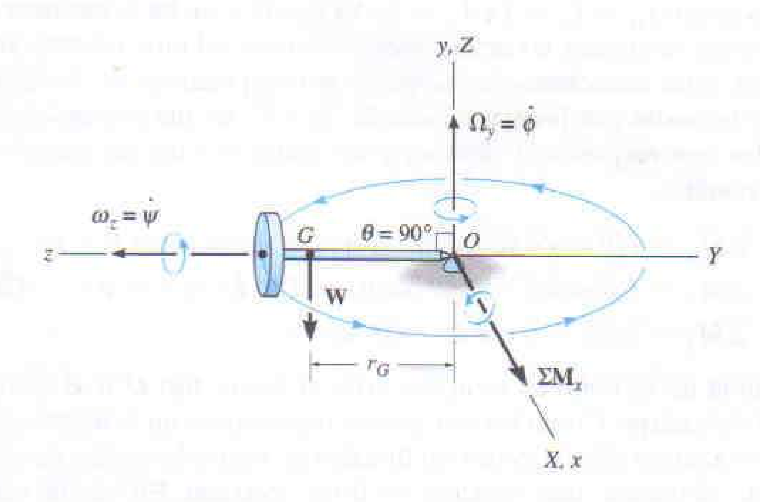



Fig. 21–17

A partir de la figura se observa que los vectores $\Sigma\mathbf{M}_x$, $\Omega_y$ y $\boldsymbol{\omega}_z$ actúan a lo largo de sus respectivos *ejes positivos*, y por tanto son mutuamente perpendiculares. De modo instintivo, ¡esperaríamos que el rotor cayese bajo la influencia de la gravedad! Sin embargo, este no es el caso en absoluto, siempre y cuando el producto $I_z\Omega_y\omega_z$ sea elegido correctamente para contrabalancear el momento $\Sigma M_x = Wr_G$ del peso del rotor con respecto a $O$. Este inusitado fenómeno del movimiento de un cuerpo rígido a menudo es llamado *efecto giroscópico*.

Tal vez una demostración más curiosa del efecto giroscópico se obtiene a partir del estudio de la acción de un *giróscopo*. Un giróscopo es un rotor que gira a una razón muy alta con respecto a su eje de simetría. Esta razón de giro es considerablemente mayor que su razón precesional de rotación sobre el eje vertical. Por consiguiente, para todo fin práctico, el momentum angular del giróscopo puede suponerse dirigido entre sus ejes de giro. Así, para el rotor mostrado en la figura 21-18, $\omega_z \gg \Omega_y$, y la magnitud del momentum angular con respecto al punto $O$, tal como es dado por las ecuaciones 21-11, se reduce a la forma $H_O = I_z\omega_z$. Como la magnitud y la dirección de $\mathbf{H}_O$ son constantes observadas desde $x$, $y$, $z$, la aplicación directa de la ecuación 21-22 nos da

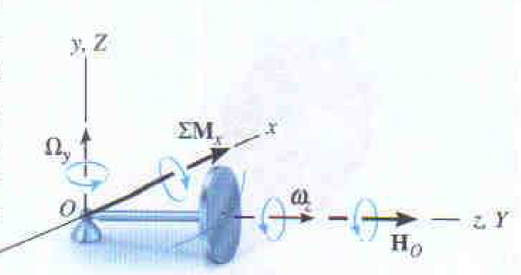



Fig. 21-18

$$\Sigma\mathbf{M}_x = \mathbf{\Omega}_y \times \mathbf{H}_O \qquad (21\text{–}33)$$

Usando la regla de la mano derecha aplicada al producto cruz, se observa que $\Omega_y$ siempre hace oscilar $\mathbf{H}_O$ (o $\boldsymbol{\omega}_z$) hacia el sentido de $\Sigma\mathbf{M}_x$. En efecto, el *cambio de dirección* del momentum angular del giróscopo, $d\mathbf{H}_O$, es equivalente al impulso angular causado por el peso del giróscopo con respecto a $O$, es decir, $d\mathbf{H}_O = \Sigma\mathbf{M}_x\, dt$, ecuación 21-20. Además, como $H_O = I_z\omega_z$ y $\Sigma M_x$, $\Omega_y$, y $H_O$ son mutuamente perpendiculares, la ecuación 21-33 se reduce a la ecuación 21-32.

Cuando un giróscopo se monta en una suspensión tipo cardán, figura 21-19, resulta *libre* de momentos externos aplicados a su base. Entonces, en teoría, su momentum angular $\mathbf{H}$ nunca precesará, sino que mantendrá su misma orientación fija a lo largo del eje de giro cuando la base es rotada. Este tipo de giróscopo se llama *giróscopo libre*, y es útil como brújula cuando su eje de giro es dirigido hacia el norte. En realidad, la suspensión tipo cardán nunca está completamente libre de fricción, por lo que un dispositivo de tal tipo es útil sólo para la navegación local de barcos y aviones. El efecto giroscópico es también útil para lograr la estabilización del movimiento de los barcos en el mar y de las trayectorias de cohetes y proyectiles. Además, este efecto es de considerable importancia en el diseño de flechas y chumaceras para rotores que están sometidas a precesiones forzadas.

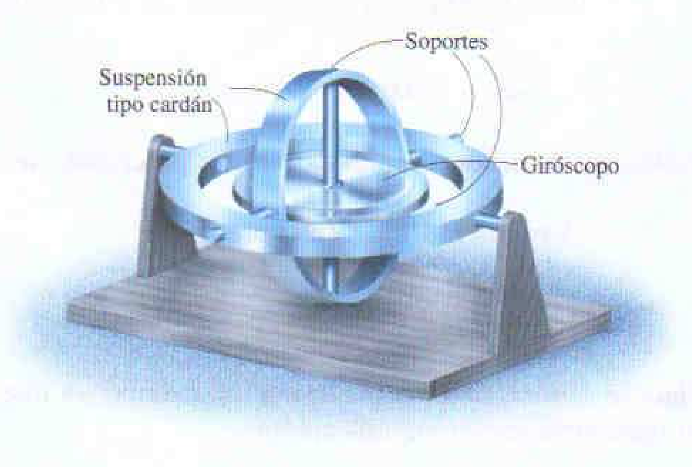
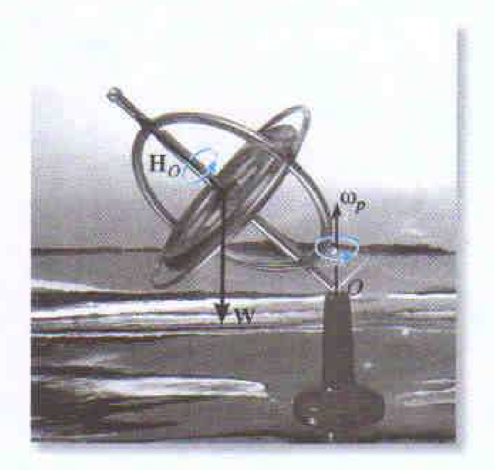


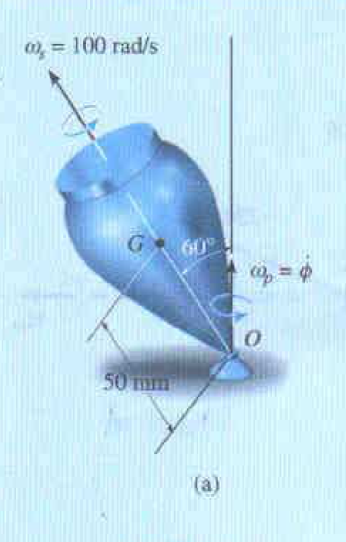

Fig. 21-19



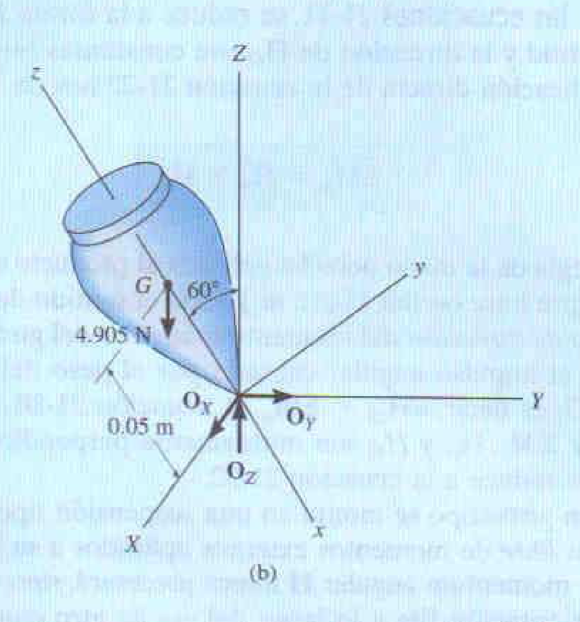

El giro del giróscopo dentro del marco de este giróscopo de juguete produce un momentum angular $\mathbf{H}_O$ que cambia de dirección conforme el marco precesa $\boldsymbol{\omega}_p$ sobre el eje vertical. El giróscopo no caerá ya que el momento de su peso $\mathbf{W}$ con respecto al soporte es balanceado por el cambio en la dirección de $\mathbf{H}_O$.

## EJEMPLO 21.7

El trompo mostrado en la figura 21-20*a* tiene masa de 0.5 kg y precesa con respecto al eje vertical a un ángulo constante $\theta = 60°$. Si el trompo gira con velocidad angular $\omega_s = 100$ rad/s, determine la velocidad de precesión $\boldsymbol{\omega}_p$. Suponga que los momentos de inercia axial y transversal del trompo son $0.45(10^{-3})$ kg · m² y $1.20(10^{-3})$ kg · m², respectivamente, medidos con respecto al punto fijo $O$.



(a)



(b)

Fig. 21–20

### Solución

La ecuación 21-30 se usará para buscar la solución ya que el movimiento es de *precesión permanente*. Como se muestra en el diagrama de cuerpo libre, figura 21-20*b*, los ejes coordenados son establecidos de la manera usual, esto es, con el eje $z$ positivo en la dirección del giro, el eje $Z$ positivo en la dirección de la precesión, y el eje $x$ positivo en la dirección del momento $\Sigma \mathbf{M}_x$ (refiérase a la figura 21-16). Entonces,

$$\Sigma M_x = -I\dot{\phi}^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta + I_z\dot{\phi}\operatorname{sen}\theta(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})$$

$$4.905\text{ N}(0.05\text{ m})\operatorname{sen}60° = -[1.20(10^{-3})\text{ kg}\cdot\text{m}^2\,\dot{\phi}^2]\operatorname{sen}60°\cos60°$$
$$+\,[0.45(10^{-3})\text{ kg}\cdot\text{m}^2]\,\dot{\phi}\operatorname{sen}60°(\dot{\phi}\cos60° + 100\text{ rad/s})$$

o bien

$$\dot{\phi}^2 - 120.0\dot{\phi} + 654.0 = 0 \qquad (1)$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática para la precesión obtenemos

$$\dot{\phi} = 114\text{ rad/s} \qquad \text{(alta precesión)}$$ *Resp.*

y

$$\dot{\phi} = 5.72\text{ rad/s} \qquad \text{(baja precesión)}$$ *Resp.*

En realidad, se observaría baja precesión del trompo, ya que la alta precesión requeriría mayor energía cinética.

## EJEMPLO 21.8

El disco de 1 kg mostrado en la figura 21-21*a* está girando con respecto a su eje a velocidad angular constante $\omega_D = 70$ rad/s. El bloque ubicado en *B* tiene masa de 2 kg, y ajustando su posición *s* es posible cambiar la precesión del disco sobre su pivote de soporte en *O*. Determine la posición *s* que permitirá al disco tener una velocidad de precesión constante $\omega_p = 0.5$ rad/s sobre el pivote. Desprecie el peso de la flecha.

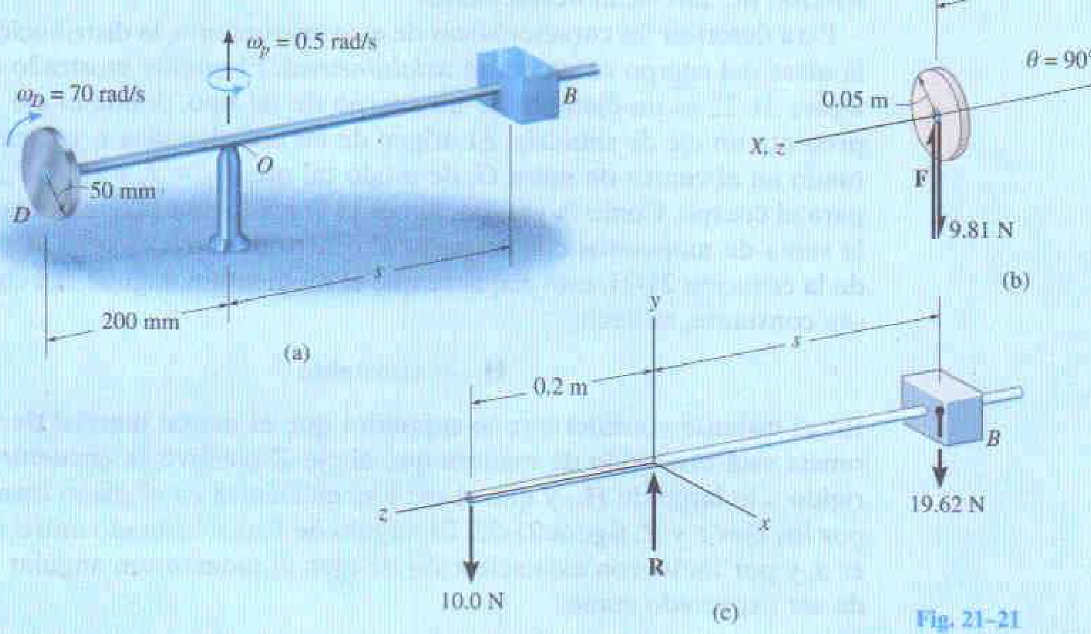



Fig. 21-21

### Solución

El diagrama de cuerpo libre del disco se muestra en la figura 21-21*b*, donde **F** representa la fuerza de reacción de la flecha sobre el disco. El origen de ambos sistemas coordenados *x*, *y*, *z* y *X*, *Y*, *Z* está situado en el punto *O*, el cual representa un *punto fijo* para el disco. (Aunque el punto *O* no se encuentra sobre el disco, imagine una extensión sin masa desde el disco hasta este punto.) En el sentido convencional, el eje *Z* se elige a lo largo del eje de precesión, y el eje *z* está a lo largo del eje de giro, por lo que $\theta = 90°$. Como la precesión es *permanente*, la ecuación 21-31 se puede usar para encontrar la solución. Esta ecuación se reduce a

$$\Sigma M_x = \dot{\phi} I_z \omega_z$$

la cual es la misma que la ecuación 21-32. Sustituyendo los datos requeridos se obtiene

$$9.81\text{ N}(0.2\text{ m}) - F(0.2\text{ m}) = 0.5\text{ rad/s}[\tfrac{1}{2}(1\text{ kg})(0.05\text{ m})^2](-70\text{ rad/s})$$
$$F = 10.0\text{ N}$$

Tal como se muestra en el diagrama de cuerpo libre de la flecha y el bloque *B*, figura 21-21*c*, la suma de momentos con respecto al eje *x* requiere

$$(19.62\text{ N})s = (10.0\text{ N})(0.2\text{ m})$$
$$= 0.102\text{ m} = 102\text{ mm} \qquad \textit{Resp.}$$

## *21.6 Movimiento libre de par

Cuando la única fuerza externa que actúa sobre un cuerpo es causada por la gravitación, al movimiento general del cuerpo se le denomina *movimiento libre de par*. Este tipo de movimiento es característico de planetas, satélites artificiales y proyectiles −siempre que los efectos de la fricción del aire sean despreciados.

Para describir las características de este movimiento, la distribución de la masa del cuerpo se supondrá *axialsimétrica*. El satélite mostrado en la figura 21-22 es un ejemplo de un cuerpo de tal tipo, donde el eje $z$ representa un eje de simetría. El origen de las coordenadas $x, y, z$ está situado en el centro de masa $G$, de modo tal que $I_{zz} = I_z$ e $I_{xx} = I_{yy} = I$ para el cuerpo. Como la gravitación es la única fuerza externa presente, la suma de momentos con respecto al centro de masa es cero. A partir de la ecuación 21-21, esto requiere que el momentum angular del cuerpo sea constante, es decir,

$$\mathbf{H}_G = \text{constante}$$

En el instante considerado, se supondrá que el marco inercial de referencia está orientado de manera que el eje $Z$ positivo se encuentra dirigido a lo largo de $\mathbf{H}_G$ y que el eje $y$ se encuentra en el plano formado por los ejes $z$ y $Z$, figura 21-22. El ángulo de Euler formado entre $Z$ y $z$ es $\theta$, y por tanto, con esta selección de ejes, el momentum angular puede ser expresado como

$$\mathbf{H}_G = H_G \operatorname{sen} \theta \mathbf{j} + H_G \cos \theta \mathbf{k}$$

Además, usando las ecuaciones 21-11, tenemos

$$\mathbf{H}_G = I\omega_x \mathbf{i} + I\omega_y \mathbf{j} + I_z\omega_z \mathbf{k}$$

donde $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ representan las componentes $x, y, z$ de la velocidad angular del cuerpo. Igualando las componentes respectivas **i, j,** y **k** de las dos ecuaciones anteriores resulta

$$\omega_x = 0 \qquad \omega_y = \frac{H_G \operatorname{sen} \theta}{I} \qquad \omega_z = \frac{H_G \cos \theta}{I_z} \tag{21–34}$$

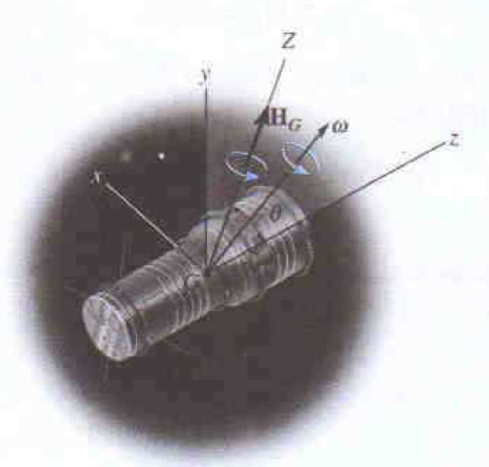



Fig. 21–22

o bien

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{H_G \operatorname{sen} \theta}{I}\mathbf{j} + \frac{H_G \cos \theta}{I_z}\mathbf{k} \qquad (21\text{–}35)$$

De manera similar, igualando las componentes respectivas **i, j, k** de la ecuación 21-27 con las de la ecuación 21-34, obtenemos

$$\dot{\theta} = 0$$

$$\dot{\phi} \operatorname{sen} \theta = \frac{H_G \operatorname{sen} \theta}{I}$$

$$\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi} = \frac{H_G \cos \theta}{I_z}$$

Resolviendo, obtenemos

$$\theta = \text{const}$$

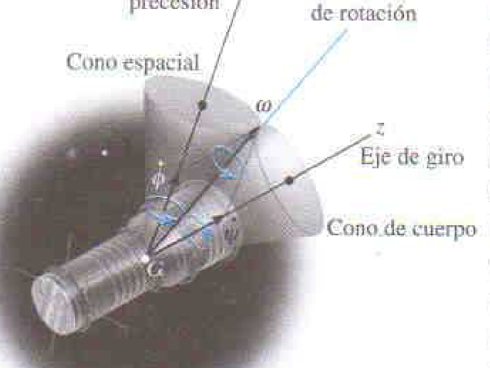
$$\dot{\phi} = \frac{H_G}{I}$$

$$\dot{\psi} = \frac{I - I_z}{I I_z} H_G \cos \theta \qquad (21\text{–}36)$$

Entonces, para el movimiento libre de torca de un cuerpo axialsimétrico, el ángulo $\theta$ formado entre el vector momentum angular y el giro del cuerpo permanece constante. Además, el momentum angular $\mathbf{H}_G$, la precesión $\dot{\phi}$, y el giro $\dot{\psi}$ para el cuerpo permanecen constantes en todo momento durante el movimiento. Eliminando $H_G$ de la segunda y la tercera de las ecuaciones 21-36 se obtiene la siguiente relación entre el giro y la precesión:

$$\dot{\psi} = \frac{I - I_z}{I_z} \dot{\phi} \cos \theta \qquad (21\text{–}37)$$



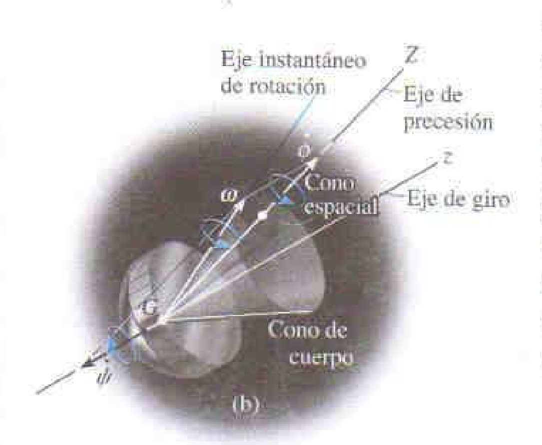
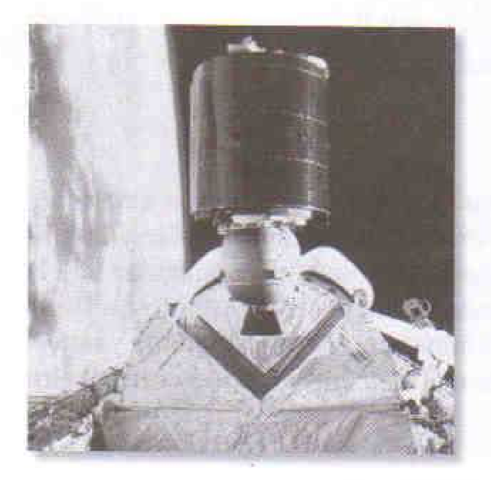
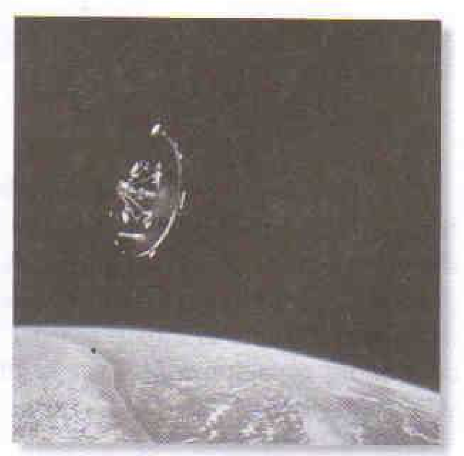




**Fig. 21–23**

Como se muestra en la figura 21-23*a*, el cuerpo precesa alrededor del eje *Z*, que está fijo en dirección, mientras gira con respecto al eje *z*. Estas dos componentes de movimiento angular pueden estudiarse usando un simple modelo de cono, presentado en la sección 20.1. El *cono espacial* que define la precesión está fijo frente a rotaciones, ya que la precesión tiene una dirección fija, mientras que el *cono de cuerpo* rota alrededor de la superficie externa del cono espacial sin deslizar. Con base en esto, debe intentarse imaginar el movimiento. El ángulo interior de cada cono se elige de manera tal que la velocidad angular resultante del cuerpo esté dirigida a lo largo de la línea de contacto de los dos conos. Esta línea de contacto representa el eje instantáneo de rotación para el cono de cuerpo, y por consiguiente la velocidad angular del cono de cuerpo y la del cuerpo deben estar dirigidas a lo largo de esta línea. Como el giro es una función de los momentos de inercia $I$ e $I_z$ del cuerpo, ecuación 21-36, el modelo de cono mostrado en la figura 21-23*a* es satisfactorio para describir el movimiento, siempre que $I > I_z$. El movimiento libre de torca que cumple estos requisitos se llama *precesión regular*. Si $I < I_z$, el giro es negativo y la precesión positiva. Este movimiento es representado por el movimiento del satélite que aparece en la figura 21-23*b* ($I < I_z$). El modelo de cono puede ser usado nuevamente para representar el movimiento; sin embargo, para preservar la adición vectorial correcta de giro y precesión y obtener la velocidad $\boldsymbol{\omega}$, la superficie interior del cono de cuerpo debe rodar sobre la superficie exterior del cono espacial (fijo). A este movimiento se le llama *precesión retrógrada*.





A los satélites se les imparte a menudo un giro antes de ser lanzados. Si su momentum angular no es colineal con el eje de giro los satélites exhibirán precesión. En la fotografía izquierda ocurrirá precesión regular ya que $I > I_z$, y en la fotografía derecha ocurrirá precesión retrógrada ya que $I < I_z$.

## EJEMPLO 21.9

El movimiento de un balón es observado usando un proyector de movimiento lento. En la película, se ve que el giro del balón está dirigido a 30° de la horizontal, como se muestra en la figura 21-24*a*. Además, el balón precesa con respecto al eje vertical a razón de $\dot{\phi} = 3$ rad/s. Si la razón de los momentos de inercia axial a transversal del balón es de $\frac{1}{3}$, medidos con respecto al centro de masa, determine la magnitud del giro del balón y su velocidad angular. Desprecie el efecto de la resistencia del aire.

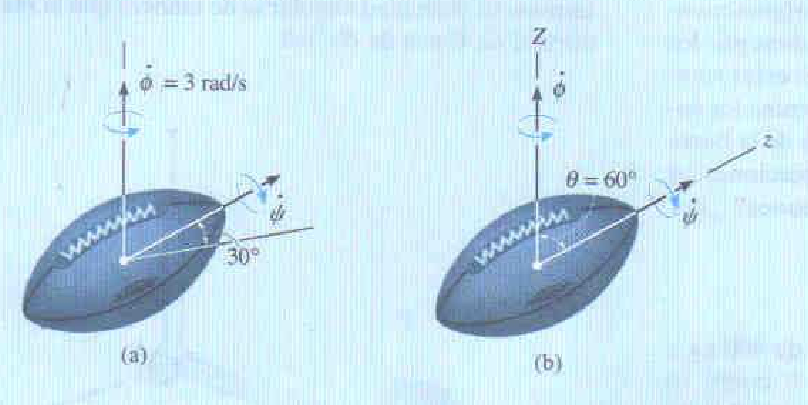



Fig. 21-24

### Solución

Como el peso del balón es la única fuerza que actúa, el movimiento se considera libre de torca. En el sentido convencional, si el eje $z$ es establecido a lo largo del eje de giro y el eje $Z$ a lo largo del eje de precesión, como se muestra en la figura 21-24*b*, entonces el ángulo $\theta = 60°$. Aplicando la ecuación 21-37, el giro es

$$\dot{\psi} = \frac{I - I_z}{I_z}\dot{\phi}\cos\theta = \frac{I - \frac{1}{3}I}{\frac{1}{3}I}(3)\cos 60°$$
$$= 3 \text{ rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$

Usando las ecuaciones 21-34, donde $H_G = \dot{\phi}I$ (Ec. 21-36), tenemos

$$\omega_x = 0$$
$$\omega_y = \frac{H_G \operatorname{sen}\theta}{I} = \frac{3I \operatorname{sen} 60°}{I} = 2.60 \text{ rad/s}$$
$$\omega_z = \frac{H_G \cos\theta}{I_z} = \frac{3I\cos 60°}{\frac{1}{3}I} = 4.50 \text{ rad/s}$$

Entonces,

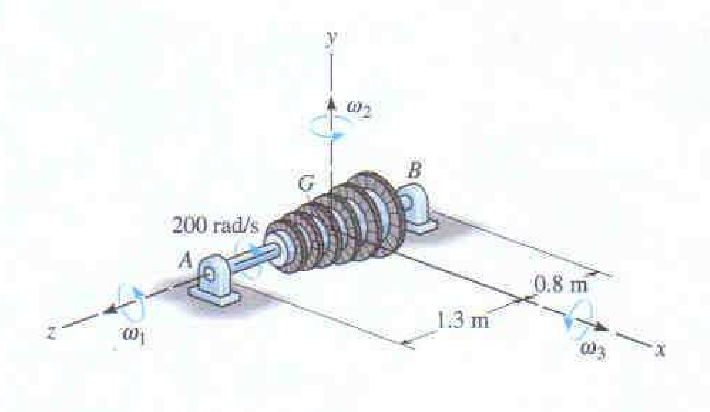
$$\omega = \sqrt{(\omega_x)^2 + (\omega_y)^2 + (\omega_z)^2}$$
$$= \sqrt{(0)^2 + (2.60)^2 + (4.50)^2}$$
$$= 5.20 \text{ rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$

# PROBLEMAS

**21-61.** Demuestre que la velocidad angular de un cuerpo, en términos de los ángulos de Euler $\phi$, $\theta$ y $\psi$, puede ser expresada como $\omega = (\dot{\phi} \text{ sen } \theta \text{ sen } \psi + \dot{\theta} \cos \psi)\mathbf{i} + (\dot{\phi} \text{ sen } \theta \cos \psi - \dot{\theta} \text{ sen } \psi)\mathbf{j} + (\dot{\phi} \cos \theta + \dot{\psi})\mathbf{k}$, donde **i**, **j** y **k** están dirigidos a lo largo de los ejes $x$, $y$, $z$ como se muestra en la figura 21-15$d$.

**21-62.** A una barra delgada, que coincide originalmente con el eje $Z$, se le dan tres rotaciones definidas por los ángulos de Euler $\phi = 30°$, $\theta = 45°$ y $\psi = 60°$. Si estas rotaciones son impartidas en el orden dado, determine los ángulos coordenados de dirección $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ del eje de la barra con respecto a los ejes $X$, $Y$, y $Z$. ¿Son esas direcciones las mismas para cualquier orden de las rotaciones? ¿Por qué?

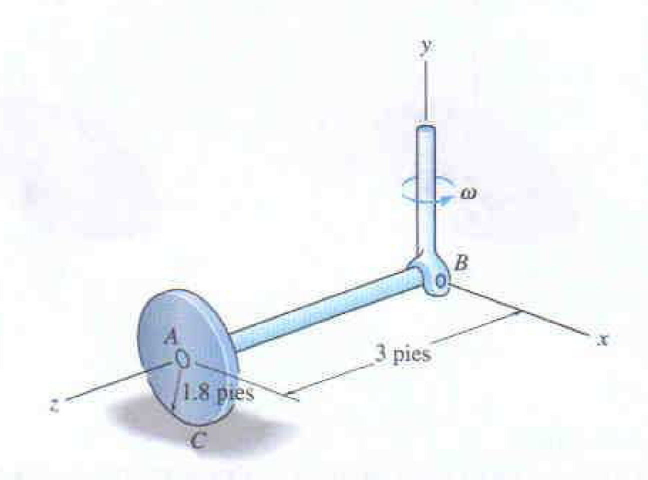
**21-63.** La turbina de un barco tiene masa de 400 kg y está montada sobre las chumaceras $A$ y $B$ como se muestra. Su centro de masa está en $G$, sus radios de giro son $k_z = 0.3$ m, y $k_x = k_y = 0.5$ m. Si la turbina está girando a 200 rad/s, determine las reacciones verticales en las chumaceras cuando el barco experimenta cada uno de los siguientes movimientos: (a) balanceo, $\omega_1 = 0.2$ rad/s, (b) rotación, $\omega_2 = 0.8$ rad/s, (c) cabeceo, $\omega_3 = 1.4$ rad/s.




Prob. 21-63

***21-64.** La rueda de 30 lb gira sin deslizar. Si tiene un radio de giro $k_{AB} = 1.2$ pies con respecto a su eje $AB$, y la flecha impulsora vertical está girando a 8 rad/s, determine la reacción normal que la rueda ejerce sobre el suelo en el punto $C$.

**21-65.** La rueda de 30 lb gira sin deslizar. Si tiene un radio de giro $k_{AB} = 1.2$ pies con respecto a su eje $AB$, determine su velocidad angular $\boldsymbol{\omega}$ de manera que la reacción normal en $C$ sea de 60 lb.0

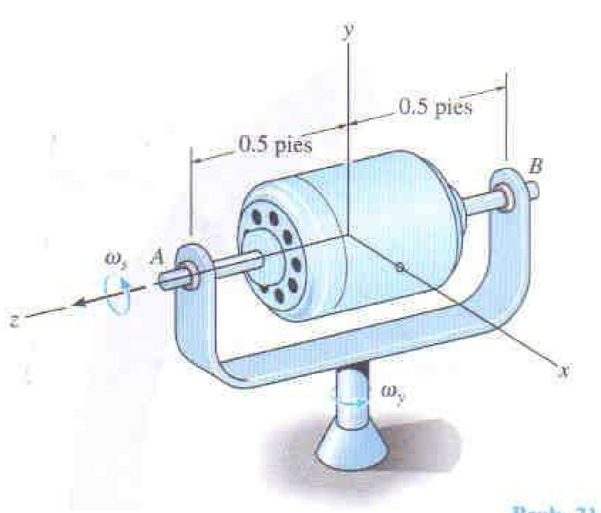



Probs. 21-64/65

**21-66.** El disco de 20 kg está girando con respecto a su centro a $\omega_s = 20$ rad/s mientras el eje de soporte rota a $\omega_y = 6$ rad/s. Determine el momento giroscópico causado por las reacciones de fuerza que el pasador $A$ ejerce sobre el disco debido al movimiento.

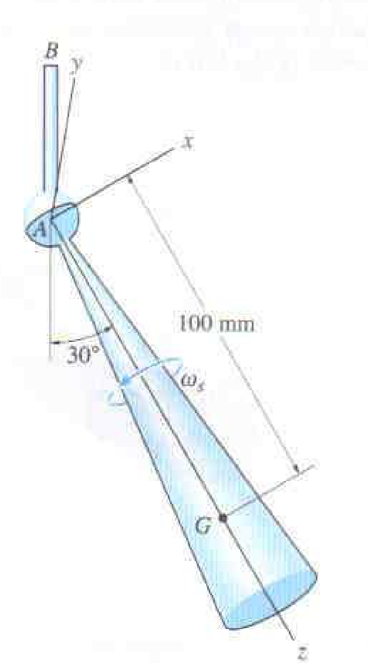
Prob. 21-66

**21-67.** El motor pesa 50 lb y tiene radio de giro de 0.2 pies con respecto al eje $z$. La flecha del motor está soportada por chumaceras instaladas en $A$ y $B$, y gira a una razón constante de $w_s = \{100\mathbf{k}\}$ rad/s, mientras el marco tiene velocidad angular de $\boldsymbol{\omega}_y = \{2\mathbf{j}\}$ rad/s. Determine el momento que las fuerzas de apoyo en $A$ y $B$ ejercen sobre la flecha debido a este movimiento.



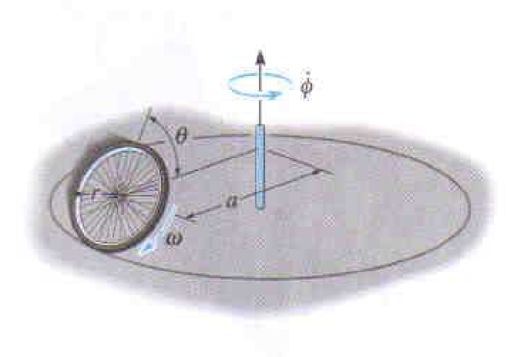

Prob. 21–67

***21-68.** El trompo cónico tiene masa de 0.8 kg, y sus momentos de inercia son $I_x = I_y = 3.5(10^{-3})$ kg · m² e $I_z = 0.8(10^{-3})$ kg · m². Si el trompo gira libremente en la junta esférica $A$ con velocidad de $\omega_s = 750$ rad/s, calcule su precesión con respecto al eje de la flecha $AB$.




Prob. 21–68

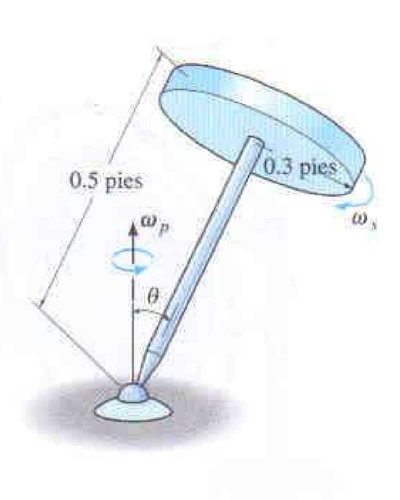
**21-69.** Una rueda de masa $m$ y radio $r$ rueda con giro constante $\boldsymbol{\omega}$ sobre una trayectoria circular que tiene un radio $a$. Si el ángulo de inclinación es $\theta$, determine la razón de precesión. Trate la rueda como un anillo delgado. No se presenta deslizamiento.




Prob. 21–69

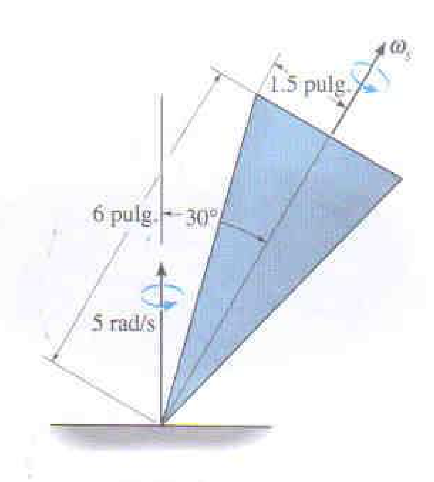
**21-70.** El trompo consta de un disco delgado que tiene un peso de 8 lb y radio de 0.3 pies. La barra tiene masa despreciable y longitud de 0.5 pies. Si el trompo está girando a velocidad angular $\omega_s = 300$ rad/s, determine la velocidad angular precesional de estado permanente $\omega_p$ de la barra cuando $\theta = 40°$.

**21-71.** Resuelva el problema 21-70 cuando $\theta = 90°$.



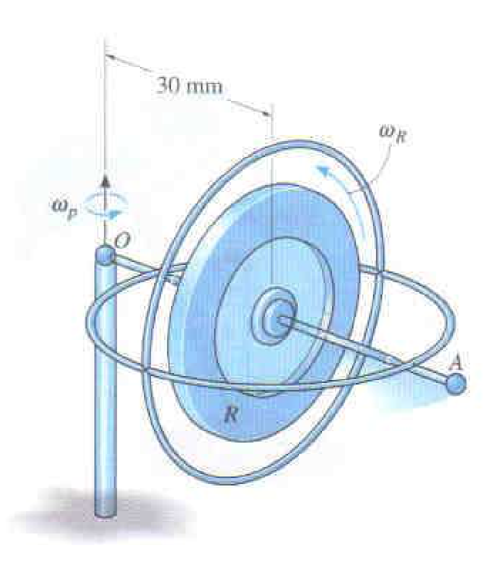

Probs. 21–70/71

*21-72. El trompo tiene masa de 3 lb y puede ser considerado como un cono sólido. Si se observa que precesa con respecto al eje vertical a una razón constante de 5 rad/s, determine su giro.



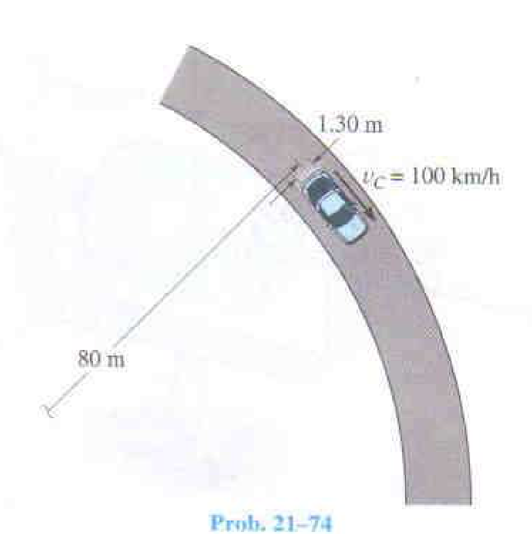

Prob. 21–72

21-73. El giróscopo de juguete consta de un rotor $R$ que está unido al marco de masa insignificante. Si se observa que el marco precesa con respecto al punto pivote $O$ a $\omega_p = 2$ rad/s, determine la velocidad angular $\omega_R$ del rotor. La varilla $OA$ se mueve en el plano horizontal. El rotor tiene masa de 200 g y radio de giro $k_{OA} = 20$ mm con respecto a $OA$.



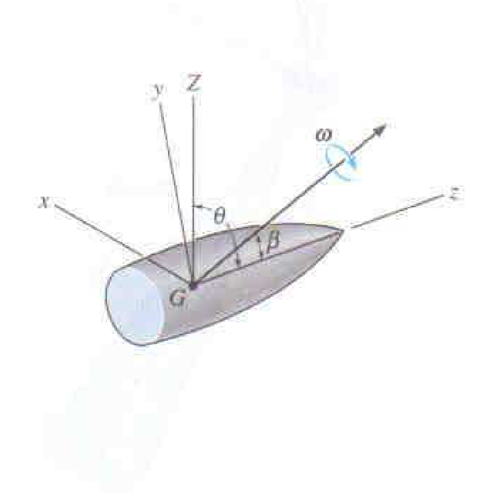

Prob. 21–73

21-74. El carro está viajando a $v_C = 100$ km/h alrededor de la curva horizontal con radio de 80 m. Si cada rueda tiene masa de 16 kg, radio de giro $k_G = 300$ mm con respecto a su eje de giro, y radio de 400 mm, determine la diferencia entre las fuerzas normales de las ruedas posteriores causada por el efecto giroscópico. La distancia entre las ruedas es de 1.30 m.



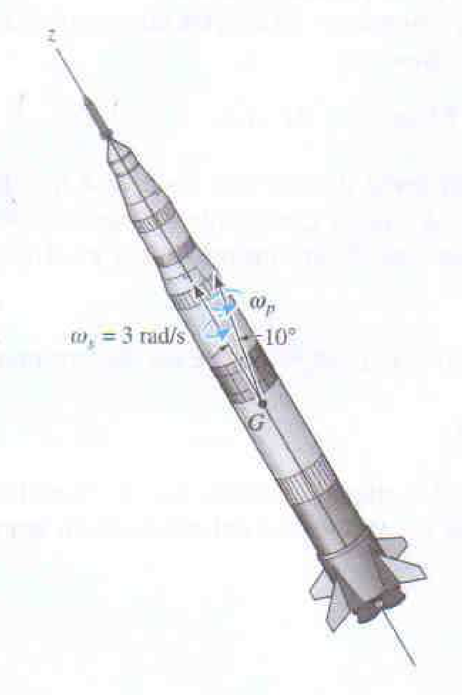

Prob. 21–74

21-75. El proyectil mostrado está sometido a un movimiento libre de torca. Los momentos de inercia transversal y axial son $I$ e $I_z$, respectivamente. Si $\theta$ representa el ángulo entre el eje $Z$ de precesión y el eje de simetría $z$, y $\beta$ es el ángulo entre la velocidad angular $\omega$ y el eje $z$, demuestre que $\beta$ y $\theta$ están relacionados por la ecuación $\tan\theta = (I/I_z)\tan\beta$.



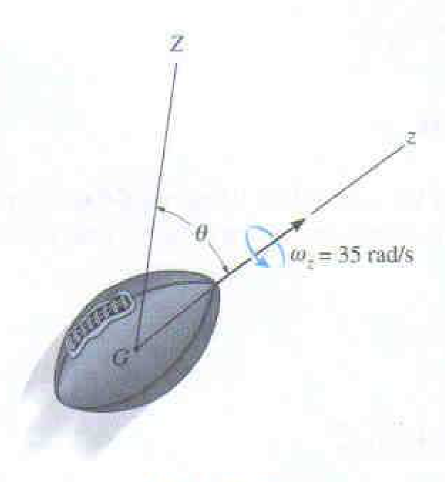

Prob. 21–75

*21-76. Mientras el cohete está en vuelo libre tiene un giro de 3 rad/s y precesa con respecto a un eje medido a 10° del eje de giro. Si la razón de los momentos de inercia axial a transversal del cohete es de 1/15, calculados con respecto a ejes que pasan por el centro de masa $G$, determine el ángulo que la velocidad angular resultante forma con el eje de giro. Construya los conos de cuerpo y espacial usados para describir el movimiento. ¿La precesión es regular o retrógrada?



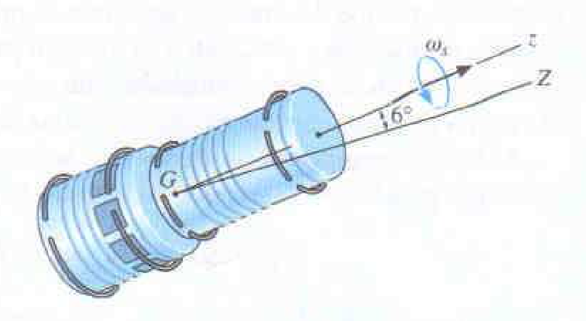

Prob. 21–76

21-77. La pelota de 0.2 kg es lanzada con un giro $\omega_z$ = 35 rad/s. Si el ángulo $\theta$ medido es de 60°, determine la precesión con respecto al eje $Z$.



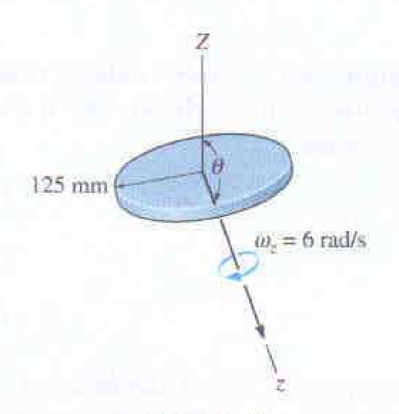

Prob. 21–77

21-78. La cápsula espacial tiene masa de 3.2 Mg, y radios de giro con respecto a sus ejes axial y transversal que pasan por el centro de masa $G$ de $k_z$ = 0.90 m y $k_t$ = 1.85 m, respectivamente. Si la cápsula está girando a $\omega_s$ = 0.8 rev/s, determine su momentum angular. Se presenta precesión con respecto al eje $Z$.



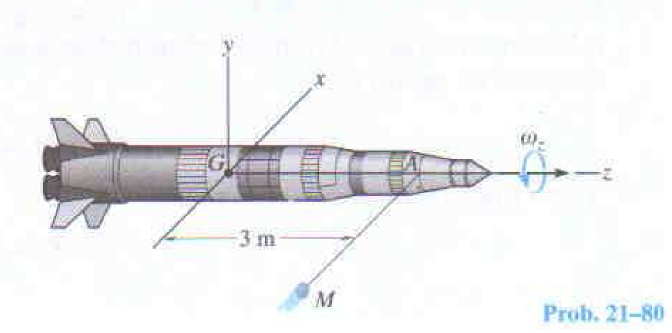

Prob. 21–78

21-79. El disco de 4 kg es lanzado con un giro $\omega_z$ = 6 rad/s. Si el ángulo $\theta$ es medido igual a 160°, determine la precisión con respecto al eje $Z$.




Prob. 21–79

*21-80. El cohete tiene masa de 4 Mg y radios de giro $k_z$ = 0.85 m y $k_y$ = 2.3 m. Inicialmente está girando con respecto al eje $z$ a $\omega_z$ = 0.05 rad/s cuando un meteorito $M$ lo golpea en $A$ y genera un impulso $\mathbf{I}$ = {300**i**} N · s. Determine el eje de precesión después del impacto.




Prob. 21–80

## REPASO DEL CAPÍTULO

- *Momentos y productos de inercia.* Un cuerpo tiene seis componentes de inercia para cualesquiera ejes dados $x$, $y$, $z$. Tres de estos componentes son momentos de inercia con respecto a cada uno de los ejes, $I_x$, $I_y$, $I_z$, y tres son productos de inercia, cada uno definido por dos planos ortogonales, $I_{xy}$, $I_{yz}$, $I_{xz}$. Si uno o dos de los planos son planos de simetría, entonces el producto de inercia con respecto a estos planos será cero.

  Los momentos y productos de inercia pueden ser determinados por integración directa o usando valores tabulados. Si estas cantidades van a ser determinadas con respecto a ejes o planos que no pasan por el centro de masa, entonces deben usarse los teoremas de los ejes o planos paralelos.

  Si las seis componentes de inercia son conocidas, entonces el momento de inercia con respecto a cualquier eje puede ser determinado usando la ecuación de transformación

$$I_{Oa} = I_{xx}u_x^2 + I_{yy}u_y^2 + I_{zz}u_z^2 - 2I_{xy}u_xu_y - 2I_{yz}u_yu_z - 2I_{zx}u_zu_x$$

- *Momentos principales de inercia.* En cualquier punto sobre o fuera del cuerpo, los ejes $x$, $y$, $z$ pueden ser orientados de manera que los productos de inercia sean igual a cero. Los momentos de inercia resultantes son llamados momentos principales de inercia, uno de los cuales será un máximo y el otro un momento de inercia mínimo para el cuerpo.

- *Principio de impulso y momentum.* El momentum angular para un cuerpo puede ser determinado con respecto a cualquier punto $A$ usando la ecuación

$$\mathbf{H}_A = \boldsymbol{\rho}_{G/A} \times m\mathbf{v}_G + \mathbf{H}_G$$

Si el momentum angular debe ser determinado usando ejes principales de inercia, con el origen situado en el centro de masa del cuerpo o en un punto fijo, entonces las componentes del momentum angular se convierten en

$$H_x = I_{xx}\omega_x - I_{xy}\omega_y - I_{xz}\omega_z$$

$$H_y = -I_{yx}\omega_x + I_{yy}\omega_y - I_{yz}\omega_z$$

$$H_z = -I_{zx}\omega_x - I_{zy}\omega_y + I_{zz}\omega_z$$

Una vez que el momentum lineal y el momentum angular para el cuerpo han sido formulados, entonces el principio del impulso y el momentum pueden ser usados para resolver problemas que implican fuerza, velocidad y tiempo. Estas ecuaciones son

$$m(\mathbf{v}_G)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F}\,dt = m(\mathbf{v}_G)_2$$

$$(\mathbf{H}_O)_1 + \Sigma\int_{t_1}^{t_2} \mathbf{M}_O\,dt = (\mathbf{H}_O)_2$$

- *Principio del trabajo y la energía.* La energía cinética para un cuerpo es usualmente determinada con relación a un punto fijo o al centro de masa del cuerpo. Si los ejes son ejes principales de inercia, entonces para un punto fijo,

$$T = \tfrac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \tfrac{1}{2}I_y\omega_y^2 + \tfrac{1}{2}I_z\omega_z^2$$

Y con relación al centro de masa,

$$T = \tfrac{1}{2}mv_G^2 + \tfrac{1}{2}I_x\omega_x^2 + \tfrac{1}{2}I_y\omega_y^2 + \tfrac{1}{2}I_z\omega_z^2$$

Estas formulaciones pueden ser usadas con el principio del trabajo y la energía para resolver problemas que implican fuerza, velocidad y desplazamiento. Esta ecuación es

$$T_1 + \Sigma U_{1-2} = T_2$$

- *Ecuaciones de movimiento.* Hay tres ecuaciones escalares de movimiento traslacional para un cuerpo rígido que se mueve en tres dimensiones. Son

$$\Sigma F_x = m(a_G)_x$$
$$\Sigma F_y = m(a_G)_y$$
$$\Sigma F_z = m(a_G)_z$$

Las tres ecuaciones escalares de movimiento rotatorio dependen de la ubicación de la referencia $x, y, z$. A menudo, estos ejes están orientados de manera que son ejes principales de inercia. Si los ejes están fijos en el cuerpo y se mueven con la rotación $\boldsymbol{\omega}$ del mismo, entonces las ecuaciones se llaman ecuaciones de movimiento de Euler. Son

$$\Sigma M_x = I_x\dot{\omega}_x - (I_y - I_z)\omega_y\omega_z$$
$$\Sigma M_y = I_y\dot{\omega}_y - (I_z - I_x)\omega_z\omega_x$$
$$\Sigma M_z = I_z\dot{\omega}_z - (I_x - I_y)\omega_x\omega_y$$

Si los ejes tienen una rotación $\Omega \neq \omega$, entonces las ecuaciones son

$$\Sigma M_x = I_x\dot{\omega}_x - I_y\Omega_z\omega_y + I_z\Omega_y\omega_z$$
$$\Sigma M_y = I_y\dot{\omega}_y - I_z\Omega_x\omega_z + I_x\Omega_z\omega_x$$
$$\Sigma M_z = I_z\dot{\omega}_z - I_x\Omega_y\omega_x + I_y\Omega_x\omega_y$$

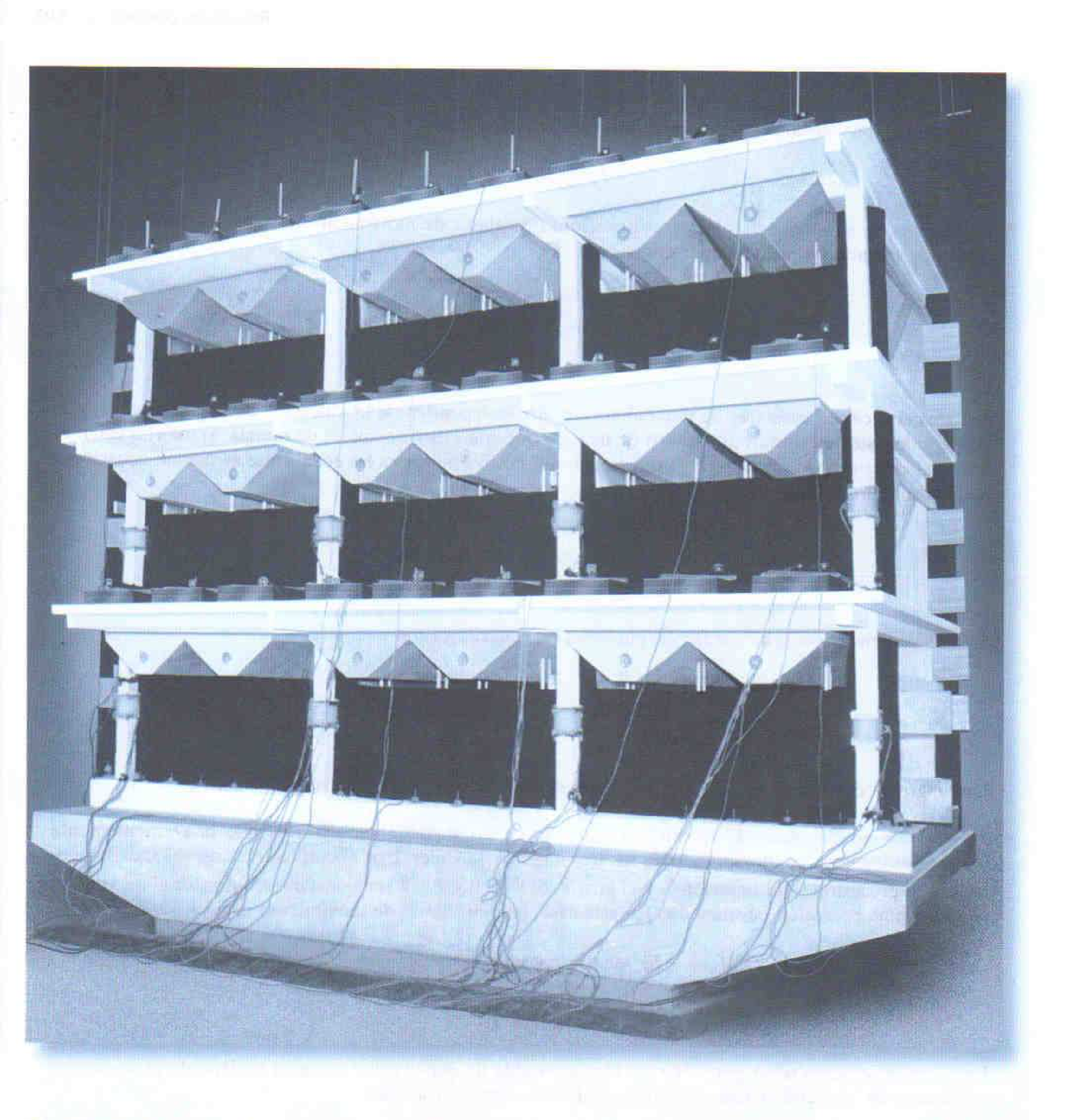
Un diagrama de cuerpo libre debe acompañar siempre la aplicación de estas ecuaciones.

- *Movimiento giroscópico.* El movimiento angular de un giróscopo se describe más convenientemente usando los cambios en movimiento de los tres ángulos de Euler. Estas componentes de velocidad angular son la precesión $\dot{\phi}$, la nutación $\dot{\theta}$, y el giro $\dot{\psi}$. Si $\dot{\psi} = 0$ y $\dot{\phi}$ y $\dot{\theta}$ son constantes, entonces al movimiento se le llama precesión permanente. En este caso, las ecuaciones de movimiento rotatorio son

$$\Sigma M_x = -I\dot{\phi}^2 \text{sen}\,\theta\cos\theta + I_z\dot{\phi}\,\text{sen}\,\theta(\dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi})$$
$$\Sigma M_y = 0$$
$$\Sigma M_z = 0$$

Esto es el giro de un rotor giroscópico y el responsable de que el rotor no caiga haciéndolo precesar con respecto a un eje vertical. Este fenómeno se llama efecto giroscópico.

- *Movimiento libre de torca.* Un cuerpo que está sometido sólo a una fuerza gravitatoria no tendrá momentos con respecto a su centro de masa, por lo que el movimiento se describe como libre de torca. El momentum angular para el cuerpo permanecerá constante. Esto causa que el cuerpo tenga un giro y una precesión. El comportamiento depende del tamaño del momento de inercia de un cuerpo simétrico sobre el eje de giro $I_z$ contra el momento de inercia sobre un eje perpendicular $I$. Si $I > I_z$, entonces ocurre precesión regular. Si $I < I_z$, al movimiento se le llama de precesión retrógrada.



El análisis de vibraciones juega un papel importante en el estudio del comportamiento de estructuras sometidas a sismos.

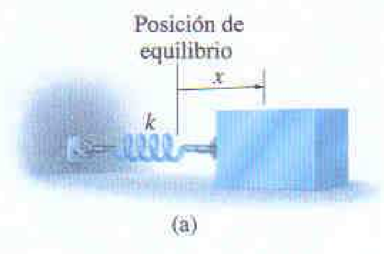
# CAPÍTULO 22 Vibraciones

## OBJETIVOS DEL CAPÍTULO

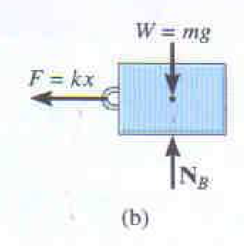
- Analizar la vibración no amortiguada de un grado de libertad de un cuerpo rígido usando la ecuación de movimiento y métodos de energía.
- Estudiar el análisis de vibraciones forzadas no amortiguadas y de vibraciones forzadas con amortiguamiento viscoso.
- Introducir el concepto de las analogías de circuito eléctrico para estudiar el movimiento vibratorio.

## *22.1 Vibración libre sin amortiguamiento

Una *vibración* es el movimiento periódico de un cuerpo o de un sistema de cuerpos conectados desplazados desde una posición de equilibrio. En general, hay dos tipos de vibración: libre y forzada. La *vibración libre* ocurre cuando el movimiento es mantenido por fuerzas restauradoras gravitatorias o elásticas, como el movimiento oscilatorio de un péndulo o la vibración de una barra elástica. La *vibración forzada* proviene de una fuerza externa periódica o intermitente aplicada al sistema. Ambos tipos de vibración pueden ser amortiguada o no amortiguada. Las vibraciones *no amortiguadas* pueden continuar indefinidamente debido a que los efectos de la fricción son despreciados en el análisis. De hecho, ya que tanto las fuerzas de fricción externas como las internas están presentes, el movimiento de todos los cuerpos en vibración es en realidad *amortiguado*.




(a)




(b)

Fig. 22-1

El tipo más simple de movimiento vibratorio es la vibración libre no amortiguada, la cual se representa mediante el modelo mostrado en la figura 22-1*a*. El bloque tiene masa $m$ y está unido a un resorte con rigidez $k$. El movimiento vibratorio ocurre cuando el bloque es liberado desde una posición desplazada $x$ de manera que el resorte tire de él. El bloque alcanzará una velocidad tal que no estará en equilibrio cuando $x = 0$, y si la superficie de soporte es lisa, la oscilación continuará indefinidamente.

La trayectoria de movimiento dependiente del tiempo del bloque puede ser determinada aplicando la ecuación de movimiento al bloque cuando esté en la posición desplazada. El diagrama de cuerpo libre se muestra en la figura 22-1*b*. La fuerza elástica restauradora $F = kx$ está dirigida siempre hacia la posición de equilibrio, mientras que la aceleración **a** se supone actuando en la dirección del *desplazamiento positivo*. Observando que $a = d^2x/dt^2 = \ddot{x}$, tenemos

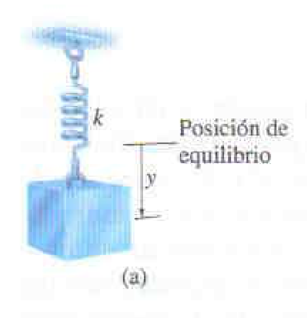
$$\overset{+}{\rightarrow} \Sigma F_x = ma_x; \qquad -kx = m\ddot{x}$$

Advierta que la aceleración es proporcional al desplazamiento del bloque. El movimiento descrito de esta manera se denomina *movimiento armónico simple*. Reordenando los términos en una "forma estándar" obtenemos

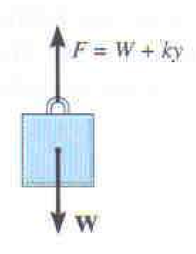
$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \qquad (22\text{–}1)$$

La constante $\omega_n$ es llamada *frecuencia circular* o *frecuencia natural*, expresada en rad/s, y en este caso

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (22\text{–}2)$$




(a)




(b)

Fig. 22-2

La ecuación 22-1 también puede obtenerse considerando que el bloque está suspendido y midiendo el desplazamiento $y$ desde la *posición de equilibrio* del bloque, figura 22-2*a*. Cuando el bloque está en equilibrio, el resorte ejerce una fuerza hacia arriba de $F = W = mg$ sobre el bloque. Por consiguiente, cuando el bloque es desplazado una distancia $y$ hacia abajo desde esta posición, la magnitud de la fuerza en el resorte es $F = W + ky$, figura 22-2*b*. Aplicando la ecuación de movimiento resulta

$$+\downarrow \Sigma F_y = ma_y; \qquad -W - ky + W = m\ddot{y}$$

o bien

$$\ddot{y} + \omega_n^2 y = 0$$

que es de la misma forma que la ecuación 22-1, donde $\omega_n$ está definida por la ecuación 22-2.

La ecuación 22-1 es una ecuación diferencial, lineal, homogénea, de segundo orden, con coeficientes constantes. Se puede mostrar, usando los métodos de las ecuaciones diferenciales, que la solución general es

$$x = A \operatorname{sen} \omega_n t + B \cos \omega_n t \tag{22–3}$$

donde $A$ y $B$ representan dos constantes de integración. La velocidad y la aceleración del bloque son determinadas tomando derivadas sucesivas con respecto al tiempo, lo que resulta en

$$v = \dot{x} = A^{\omega}{}_n \cos \omega_n t - B^{\omega}{}_n \operatorname{sen} \omega_n t \tag{22–4}$$

$$a = \ddot{x} = -A\omega_n^2 \operatorname{sen} \omega_n t - B\omega_n^2 \cos \omega_n t \tag{22–5}$$

Cuando las ecuaciones 22-3 y 22-5 son sustituidas en la ecuación 22-1, la ecuación diferencial está efectivamente satisfecha, mostrando que la ecuación 22-3 es la solución de la ecuación 22-1.

Las constantes de integración $A$ y $B$ en la ecuación 22-3, generalmente son determinadas a partir de las condiciones iniciales del problema. Por ejemplo, suponga que el bloque en la figura 22-1*a* ha sido desplazado una distancia $x_1$ hacia la derecha desde su posición de equilibrio y se le ha dado una velocidad inicial $\mathbf{v}_1$ (positiva) dirigida hacia la derecha. Sustituyendo $x = x_1$ en $t = 0$ en la ecuación 22-3 se obtiene $B = x_1$. Como $v = v_1$ en $t = 0$, usando la ecuación 22-4 obtenemos $A = v_1/\omega_n$. Si estos valores son sustituidos en la ecuación 22-3, la ecuación que describe el movimiento es

$$x = \frac{v_1}{\omega_n} \operatorname{sen} \omega_n t + x_1 \cos \omega_n t \tag{22–6}$$

La ecuación 22-3 también puede ser expresada en términos de un movimiento senoidal simple. Sea

$$A = C \cos \phi \tag{22–7}$$

y

$$B = C \operatorname{sen} \phi \tag{22–8}$$

donde $C$ y $\phi$ son nuevas constantes por determinar en vez de $A$ y $B$. Sustituyendo en la ecuación 22-3 resulta

$$x = C \cos \phi \operatorname{sen} \omega_n t + C \operatorname{sen} \phi \cos \omega_n t$$

Como $\operatorname{sen}(\theta + \phi) = \operatorname{sen} \theta \cos \phi + \cos \theta \operatorname{sen} \phi$, entonces

$$x = C \operatorname{sen}(\omega_n t + \phi) \tag{22–9}$$

Si esta ecuación es graficada sobre un eje $x$ contra un eje $\omega_n t$, se obtiene la gráfica mostrada en la figura 22-3. El desplazamiento máximo del

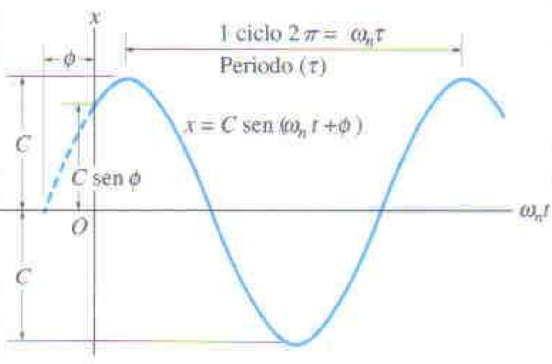



Fig. 22-3

bloque desde su posición de equilibrio es definido como la *amplitud* de la vibración. A partir de la figura, o de la ecuación 22-9, la amplitud es $C$. El ángulo $\phi$ se llama *ángulo de fase* ya que representa la cantidad que la curva es desplazada desde el origen cuando $t = 0$. Las constantes $C$ y $\phi$ están relacionadas con $A$ y $B$ mediante las ecuaciones 22-7 y 22-8. Elevando al cuadrado y sumando estas dos ecuaciones, la amplitud se convierte en

$$C = \sqrt{A^2 + B^2} \tag{22-10}$$

Si la ecuación 22-8 es dividida entre la ecuación 22-7, el ángulo de fase es

$$\phi = \tan^{-1}\frac{B}{A} \tag{22-11}$$

Observe que la curva seno, ecuación 22-9, completa un *ciclo* en el tiempo $t = \tau$ cuando $\omega_n\tau = 2\pi$, o

$$\boxed{\tau = \frac{2\pi}{\omega_n}} \tag{22-12}$$

Este intervalo de tiempo se llama *periodo*, figura 22-3. Usando la ecuación 22-2, el periodo puede ser representado también como

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \tag{22-13}$$

La *frecuencia* $f$ es definida como el número de ciclos completados por unidad de tiempo, y es el recíproco del periodo:

$$\boxed{f = \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_n}{2\pi}} \tag{22-14}$$

o bien

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \tag{22-15}$$

La frecuencia es expresada en ciclos/s. Esta razón de unidades se llama *hertz* (Hz), donde 1 Hz = 1 ciclo/s = $2\pi$ rad/s.

Cuando un cuerpo, o un sistema de cuerpos conectados, experimenta un desplazamiento inicial desde su posición de equilibrio y es liberado, vibrará con la *frecuencia natural*, $\omega_n$. Si el cuerpo tiene un solo grado de libertad, esto es, si únicamente requiere de una coordenada para especificar completamente la posición del sistema en cualquier momento, entonces el movimiento vibratorio del cuerpo tendrá las mismas características que el movimiento armónico simple del bloque y el resorte que acabamos de presentar. En consecuencia, el movimiento del cuerpo es descrito por una ecuación diferencial de la misma "forma estándar" que la ecuación 22-1, esto es,

$$\boxed{\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0} \tag{22-16}$$

Por tanto, si la frecuencia natural $\omega_n$ del cuerpo se conoce, el periodo de vibración $\tau$, la frecuencia natural $f$, y otras características vibratorias del cuerpo pueden ser establecidas usando las ecuaciones de la 22-3 a la 22-15.

## PUNTOS IMPORTANTES

- Una vibración libre ocurre cuando el movimiento es mantenido por fuerzas restauradoras gravitatorias o elásticas.
- La amplitud es el desplazamiento máximo del cuerpo.
- El periodo es el tiempo requerido para completar un ciclo.
- La frecuencia es el número de ciclos efectuados por unidad de tiempo, donde 1 Hz = 1 ciclo/s.
- Sólo una coordenada de posición es necesaria para describir la ubicación de un sistema con un grado de libertad.

## PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

Como en el caso del bloque y el resorte, la frecuencia natural $\omega_n$ de un cuerpo rígido o sistema de cuerpos rígidos conectados con un solo grado de libertad, puede ser determinada usando el siguiente procedimiento:

*Diagrama de cuerpo libre.*

- Dibuje el diagrama de cuerpo libre del cuerpo cuando éste es desplazado una *pequeña cantidad* desde su posición de equilibrio.
- Ubique el cuerpo con respecto a su posición de equilibrio usando una *coordenada inercial* $q$ apropiada. La aceleración del centro de masa $\mathbf{a}_G$ del cuerpo o la aceleración angular $\boldsymbol{\alpha}$ del cuerpo deben tener un sentido en la *dirección positiva* de la coordenada de posición.
- Si la ecuación de movimiento rotacional $\Sigma M_P = \Sigma(\mathcal{M}_k)_P$ se va a usar, puede ser conveniente trazar también el diagrama cinético ya que ahí se toman en cuenta gráficamente las componentes $m(\mathbf{a}_G)_x$, $m(\mathbf{a}_G)_y$, e $I_G\boldsymbol{\alpha}$, y por eso resulta útil para visualizar los términos necesarios en la suma de momentos $\Sigma(\mathcal{M}_k)_P$.

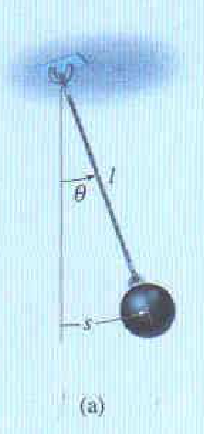
*Ecuación de movimiento.*

- Aplique la ecuación de movimiento para relacionar las fuerzas o los momentos de par *restauradores* elásticos o gravitatorios que actúan sobre el cuerpo al movimiento acelerado del cuerpo.

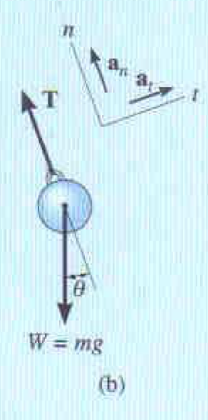
*Cinemática.*

- Con ayuda de la cinemática, exprese el movimiento acelerado del cuerpo en términos de la segunda derivada con respecto al tiempo de la coordenada de posición, $\ddot{q}$.
- Sustituya el resultado en la ecuación de movimiento y determine $\omega_n$ reordenando los términos de manera que la ecuación resultante sea de la "forma estándar", $\ddot{q} + \omega_n^2 q = 0$.

## EJEMPLO 22.1




(a)




(b)

Fig. 22–4

Determine el periodo de vibración para el péndulo simple mostrado en la figura 22-4*a*. La partícula tiene masa $m$ y está unida a una cuerda de longitud $l$. Desprecie el tamaño de la partícula.

### Solución

***Diagrama de cuerpo libre.*** El movimiento del sistema será relacionado con la coordenada de posición ($q =$) $\theta$, figura 22-4*b*. Cuando la partícula es desplazada un ángulo $\theta$, la *fuerza restauradora* que actúa sobre ella es generada por la componente del peso $mg$ sen $\theta$. Además, $\mathbf{a}_t$ actúa en la dirección de la $s$ (o $\theta$) *creciente*.

***Ecuación de movimiento.*** Aplicando la ecuación del movimiento en la *dirección tangencial*, ya que implica a la fuerza restauradora, obtenemos

$$+\nearrow\Sigma F_t = ma_t; \qquad -mg \operatorname{sen}\theta = ma_t \tag{1}$$

***Cinemática.*** $a_t = d^2s/dt^2 = \ddot{s}$. Además, $s$ puede ser relacionada con $\theta$ mediante la ecuación $s = l\theta$, de manera que $a_t = l\ddot{\theta}$. Por consiguiente, la ecuación 1 se reduce a

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\operatorname{sen}\theta = 0 \tag{2}$$

La solución de esta ecuación implica el uso de una integral elíptica. Sin embargo, para *desplazamientos pequeños*, sen $\theta \approx \theta$, en cuyo caso

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{3}$$

Comparando esta ecuación con la 22-16 ($\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$), se observa que $\omega_n = \sqrt{g/l}$. A partir de la ecuación 22-12, el periodo requerido para que la partícula efectúe una oscilación completa es, por tanto,

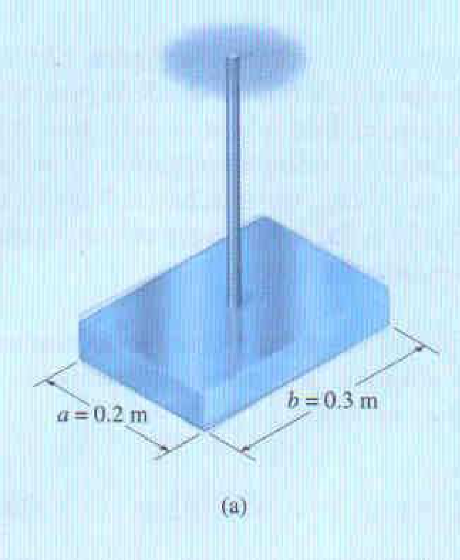
$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \qquad \textit{Res.}$$

Este interesante resultado, originalmente descubierto por Galileo Galilei a través de experimentos, indica que el periodo depende sólo de la longitud de la cuerda y no de la masa de la partícula del péndulo ni del ángulo $\theta$.

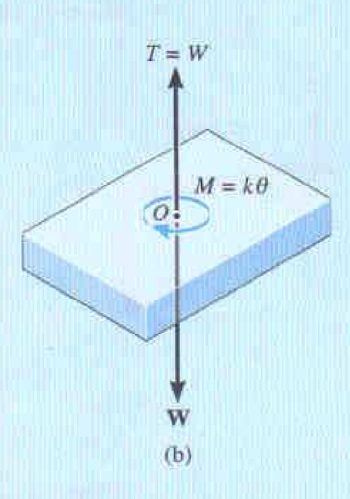
La solución de la ecuación 3 es dada por la ecuación 22-3, donde $\omega_n = \sqrt{g/l}$ y $\theta$ es sustituida por $x$. Como en el bloque y el resorte, las constantes $A$ y $B$ en este problema pueden ser determinadas si, por ejemplo, conocemos el desplazamiento y la velocidad de la partícula en un instante dado.

## EJEMPLO 22.2

La placa rectangular de 10 kg mostrada en la figura 22-5*a* está suspendida en su centro de una barra que tiene rigidez torsional $k = 1.5$ N · m/rad. Determine el periodo natural de vibración de la placa cuando se da un pequeño desplazamiento angular $\theta$ en el plano de la placa.




(a)




(b)

Fig. 22-5

### Solución

***Diagrama de cuerpo libre.*** Figura 22-5*b*. Como la placa es desplazada en su propio plano, el momento torsional *restaurador* creado por la barra es $M = k\theta$. Este momento actúa en la dirección opuesta al desplazamiento angular $\theta$. La aceleración angular $\ddot{\theta}$ actúa en dirección de la $\theta$ *positiva*

***Ecuación de movimiento.***

$$\Sigma M_O = I_O\alpha; \qquad -k\theta = I_O\ddot{\theta}$$

o bien

$$\ddot{\theta} + \frac{k}{I_O}\theta = 0$$

Como esta ecuación está en la "forma estándar", la frecuencia natural es $\omega_n = \sqrt{k/I_O}$.

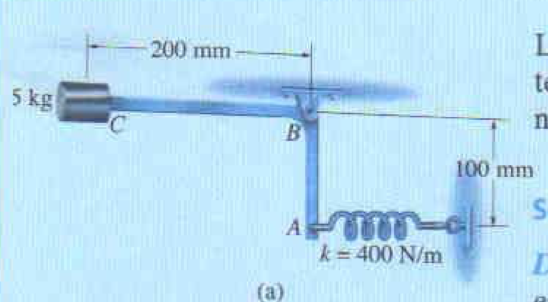
A partir de la tabla proporcionada en la cubierta interna posterior de este libro, el momento de inercia de la placa sobre un eje coincidente con la barra es $I_O = \frac{1}{12}m(a^2 + b^2)$. Por consiguiente,

$$I_O = \frac{1}{12}(10\text{ kg})[(0.2\text{ m})^2 + (0.3\text{ m})^2] = 0.108\text{ kg}\cdot\text{m}^2$$

El periodo natural de vibración es, por tanto,

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{I_O}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{0.108}{1.5}} = 1.69\text{ s} \qquad \textit{Resp.}$$

## EJEMPLO 22.3

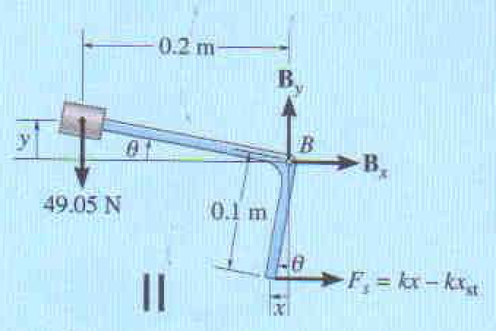


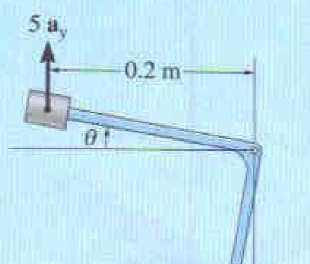
(a)

La barra doblada que muestra la figura 22-6*a* tiene masa insignificante y soporta un collarín de 5 kg en su extremo. Determine el periodo natural de vibración del sistema.

### Solución

***Diagramas de cuerpo libre y cinético.*** Figura 22-6*b*. Aquí la barra es desplazada una pequeña cantidad $\theta$ desde la posición de equilibrio. Como el resorte está sometido a una compresión inicial de $x_{st}$ por equilibrio, entonces, cuando el desplazamiento $x > x_{st}$, el resorte ejerce una fuerza de $F_s = kx - kx_{st}$ sobre la barra. Para obtener la "forma estándar", ecuación 22-16, $5\mathbf{a}_y$ actúa *hacia arriba*, lo que es consistente con un desplazamiento $\theta$ positivo.




***Ecuación de movimiento.*** Los momentos serán sumados con respecto al punto $B$ para eliminar la reacción desconocida en este punto. Como la cantidad $\theta$ es pequeña,

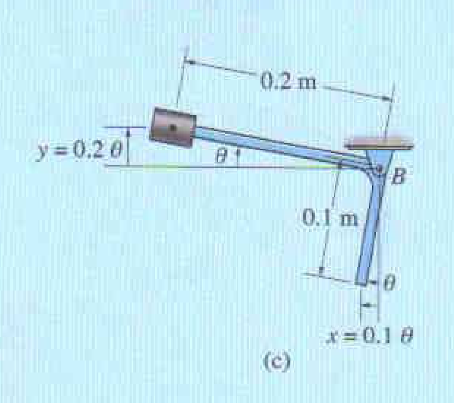
$$\circlearrowleft + \Sigma M_B = \Sigma(\mathcal{M}_k)_B;$$

$$kx(0.1 \text{ m}) - kx_{st}(0.1 \text{ m}) + 49.05 \text{ N}(0.2 \text{ m}) = -(5 \text{ kg})a_y(0.2 \text{ m})$$

El segundo término del lado izquierdo, $-kx_{st}(0.1 \text{ m})$, representa el momento generado por la fuerza del resorte que es necesario para mantener el collarín en *equilibrio*, esto es, en $x = 0$. Como este momento es igual y opuesto al momento 49.05(0.2) generado por el peso del collarín, estos dos términos se cancelan en la ecuación anterior, de manera que

$$kx(0.1) = -5a_y(0.2) \tag{1}$$

***Cinemática.*** Las posiciones del resorte y el collarín pueden relacionarse con el ángulo $\theta$, figura 22-6*c*. Como $\theta$ es pequeña, $x = (0.1 \text{ m})\theta$ y $y = (0.2 \text{ m})\theta$. Por tanto, $a_y = \ddot{y} = 0.2\ddot{\theta}$. Sustituyendo en la ecuación 1 obtenemos



(c)

Fig. 22-6

$$400(0.1\theta)0.1 = -5(0.2\ddot{\theta})0.2$$

Reescribiendo esta ecuación en la "forma estándar" resulta

$$\ddot{\theta} + 20\theta = 0$$

Comparada con $\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$ (Ec. 22-16), tenemos

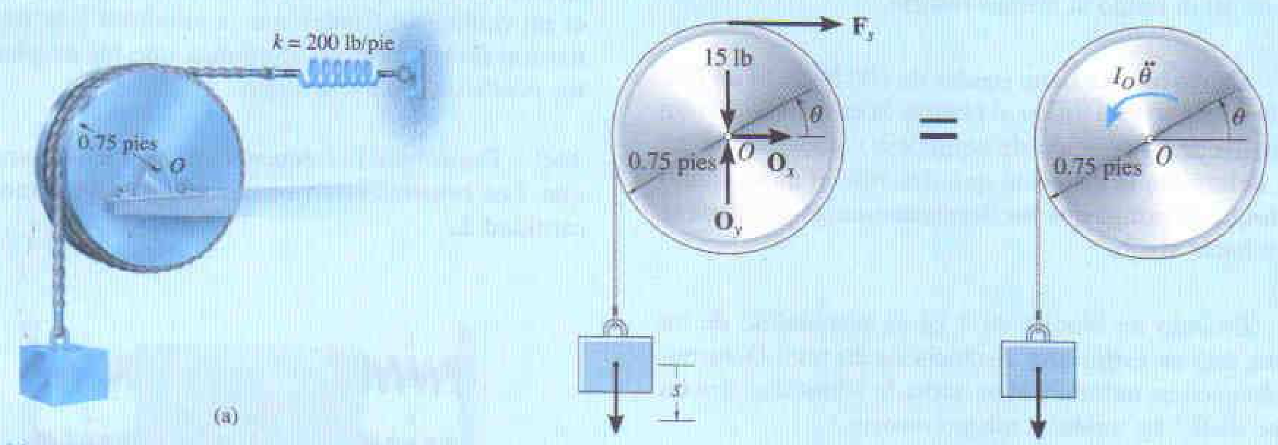
$$\omega_n^2 = 20 \qquad \omega_n = 4.47 \text{ rad/s}$$

El periodo natural de vibración es, por tanto,

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{4.47} = 1.40 \text{ s} \qquad \textit{Resp.}$$

**EJEMPLO 22.4**

Un bloque de 10 lb está suspendido de una cuerda que pasa sobre un disco de 15 lb como se muestra en la figura 22-7*a*. El resorte tiene rigidez $k = 200$ lb/pie. Determine el periodo natural de vibración para el sistema.




## Solución

***Diagramas de cuerpo libre y cinético.*** Figura 22-7*b*. El *sistema* consta del disco, que experimenta una rotación definida por el ángulo $\theta$, y del bloque, el cual se traslada una cantidad $s$. El vector $I_O\ddot{\theta}$ actúa en la dirección *positiva* de $\theta$, y en consecuencia $m_B\mathbf{a}_s$ actúa hacia abajo en la dirección *positiva* de $s$.

***Ecuación de movimiento.*** Sumando momentos con respecto al punto $O$ para eliminar las reacciones $\mathbf{O}_x$ y $\mathbf{O}_y$, y observando que $I_O = \frac{1}{2}mr^2$, obtenemos

$$\circlearrowright + \Sigma M_O = \Sigma(\mathcal{M}_k)_O;$$
$$10 \text{ lb}(0.75 \text{ pies}) - F_s(0.75 \text{ pies})$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{15 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}\right)(0.75 \text{ pies})^2\ddot{\theta} + \left(\frac{10 \text{ lb}}{32.2 \text{ pies/s}^2}\right)a_s(0.75 \text{ pies}) \quad (1)$$

***Cinemática.*** Como se muestra en el diagrama cinemático de la figura 22-7*c*, un pequeño desplazamiento positivo $\theta$ del disco causa que el bloque descienda una cantidad $s = 0.75\theta$; por consiguiente, $a_s = \ddot{s} = 0.75\ddot{\theta}$. Cuando $\theta = 0°$, la fuerza requerida en el resorte para *equilibrio* del disco es de 10 lb, actuando hacia la derecha. Para la posición $\theta$, la fuerza en el resorte es $F_s = (200 \text{ lb/pie})(0.75\theta \text{ pies}) + 10$ lb. Sustituyendo estos resultados en la ecuación 1 y simplificando resulta

$$\ddot{\theta} + 368\theta = 0$$

Por consiguiente,

$$\omega_n^2 = 368 \qquad \omega_n = 19.2 \text{ rad/s}$$

Por tanto, el periodo natural de vibración es

$$T = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{19.2} = 0.328 \text{ s} \qquad \textit{Resp.}$$

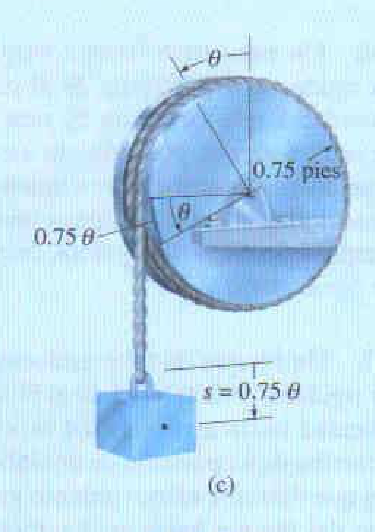



**Fig. 22-7**

## PROBLEMAS

**22-1.** Cuando un peso de 20 lb está suspendido de cierto resorte, éste se estira una distancia de 4 pulg. Determine la frecuencia natural y el periodo de vibración para un peso de 10 lb unido al mismo resorte.

**22-2.** Cierto resorte tiene rigidez de 600 N/m. Si un bloque de 4 kg que está unido al resorte es empujado 50 mm por arriba de su posición de equilibrio y liberado del reposo, determine la ecuación que describe el movimiento del bloque. Suponga que los desplazamientos positivos se miden hacia abajo.

**22-3.** Cuando un bloque de 3 kg es suspendido de un resorte, éste se estira una distancia de 60 mm. Determine la frecuencia natural y el periodo de vibración para un bloque de 0.2 kg unido al mismo resorte.

***22-4.** Un bloque de 8 kg está suspendido de un resorte que tiene rigidez $k = 80$ N/m. Si al bloque se le imprime una velocidad hacia arriba de 0.4 m/s cuando está a 90 mm por arriba de su posición de equilibrio, determine la ecuación que describe el movimiento y el máximo desplazamiento del bloque hacia arriba medido desde la posición de equilibrio. Suponga que los desplazamientos positivos son medidos hacia abajo.

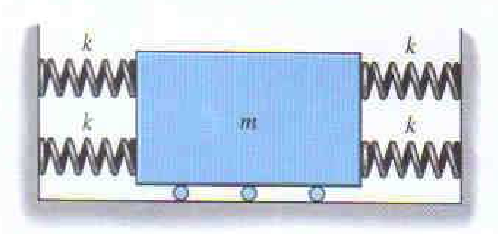
**22-5.** Un peso de 2 lb está suspendido de un resorte con rigidez $k = 2$ lb/pulg. Si el peso es empujado 1 pulg hacia arriba desde su posición de equilibrio y luego es liberado del reposo, determine la ecuación que describe el movimiento. ¿Cuál es la amplitud y la frecuencia natural de la vibración?

**22-6.** Un peso de 6 lb está suspendido de un resorte con rigidez $k = 3$ lb/pulg. Si al peso se le imprime una velocidad hacia arriba de 20 pies/s cuando está 2 pulg por arriba de su posición de equilibrio, determine la ecuación que describe el movimiento y el máximo desplazamiento hacia arriba del peso, medido desde la posición de equilibrio. Suponga que los desplazamientos positivos son hacia abajo.

**22-7.** Un bloque de 6 kg está suspendido de un resorte con rigidez $k = 200$ N/m. Si al bloque se le imprime una velocidad hacia arriba de 0.4 m/s cuando está a 75 mm por arriba de su posición de equilibrio, determine la ecuación que describe el movimiento y el desplazamiento máximo del bloque hacia arriba, medido desde la posición de equilibrio. Suponga que los desplazamientos positivos son hacia abajo.

***22-8.** Un bloque de 3 kg está suspendido de un resorte con rigidez $k = 200$ N/m. Si el bloque es empujado 50 mm hacia arriba desde su posición de equilibrio y luego es liberado del reposo, determine la ecuación que describe el movimiento. ¿Cuáles son la amplitud y la frecuencia natural de la vibración? Suponga que los desplazamientos positivos son hacia abajo.

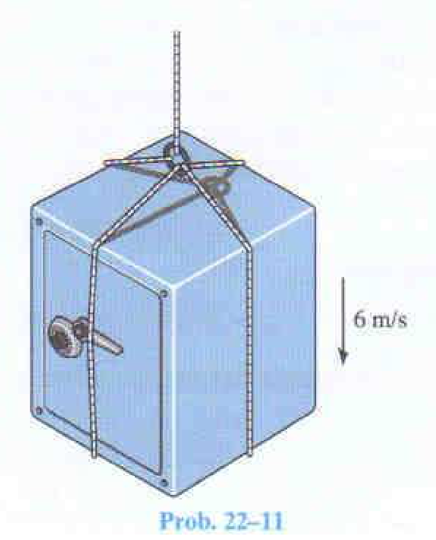
**22-9.** Determine la frecuencia de vibración para el bloque. Los resortes están comprimidos originalmente una cantidad $\Delta$.




Prob. 22–9

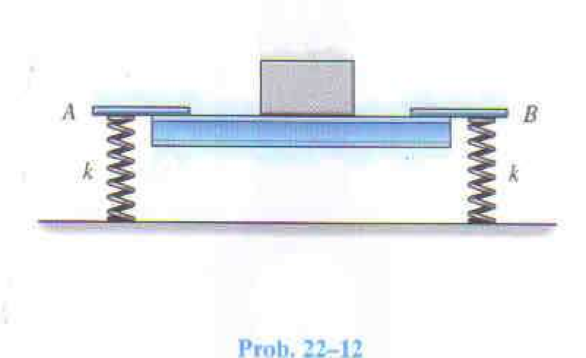
**22-10.** Cierto péndulo tiene una cuerda de 0.4 m de longitud y se le imprime una velocidad tangencial de 0.2 m/s hacia la vertical desde una posición $\theta = 0.3$ rad. Determine la ecuación que describe el movimiento angular.

**22-11.** Un cable se usa para suspender una caja fuerte de 800 lb. Si la caja desciende a 6 m/s cuando el motor que controla al cable se detiene repentinamente, determine la tensión máxima en el cable y la frecuencia de vibración de la caja. Desprecie la masa del cable y suponga que es elástico, de tal manera que se alarga 20 mm cuando está sometido a una tensión de 4 kN.



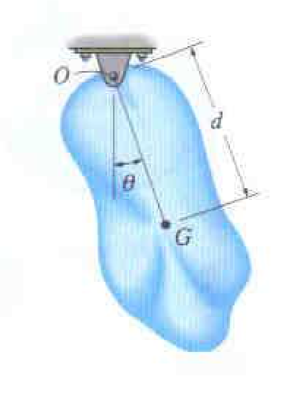

Prob. 22–11

*22-12. La viga uniforme está soportada en sus extremos mediante dos resortes $A$ y $B$, cada uno con la misma rigidez $k$. Cuando la viga no tiene carga, presenta un periodo de vibración vertical de 0.83 s. Si se coloca una masa de 50 kg en su centro, el periodo de vibración vertical es de 1.52 s. Calcule la rigidez de cada resorte y la masa de la viga.



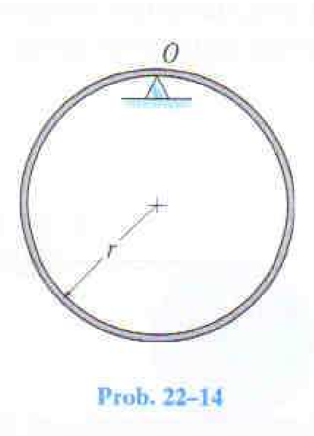

Prob. 22–12

22-13. El cuerpo de forma arbitraria tiene masa $m$, centro de masa en $G$, y radio de giro con respecto a $G$ de $k_G$. Si es desplazado un pequeño ángulo $\theta$ desde su posición de equilibrio y liberado, determine el periodo natural de vibración.



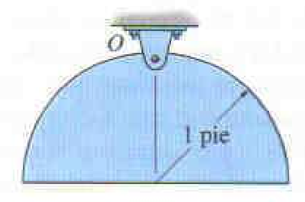

Prob. 22–13

22-14. El aro delgado de masa $m$ está soportado en u borde de cuchillo. Determine el periodo natural de vibra ción para pequeñas amplitudes de oscilación.



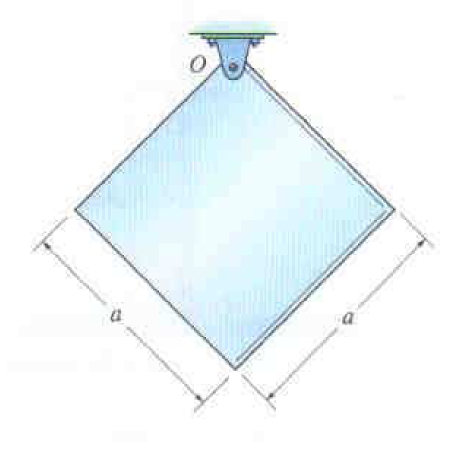

Prob. 22–14

22-15. El disco semicircular pesa 20 lb. Determine el pe riodo natural de vibración si es desplazado una pequeñ cantidad y luego liberado.



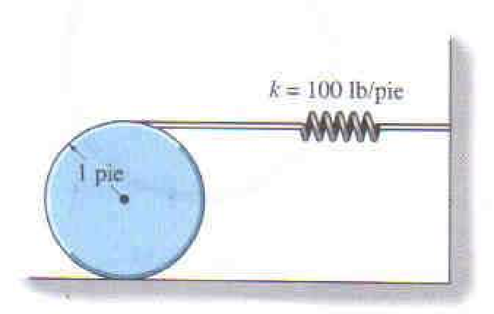

Prob. 22–15

*22-16. La placa cuadrada tiene masa $m$ y está suspen dida en su esquina por el pasador $O$. Determine el peri do natural de vibración si la placa es desplazada una pe queña cantidad y luego liberada.



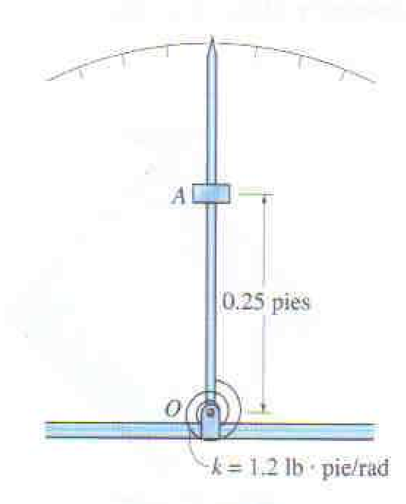

Prob. 22–16

**22-17.** El disco tiene un peso de 10 lb y rueda sin deslizar sobre la superficie horizontal cuando oscila con respecto a su posición de equilibrio. Si el disco es desplazado haciéndolo rodar 0.4 rad en sentido contrario al de las manecillas del reloj, determine la ecuación que describe su movimiento oscilatorio al ser soltado.

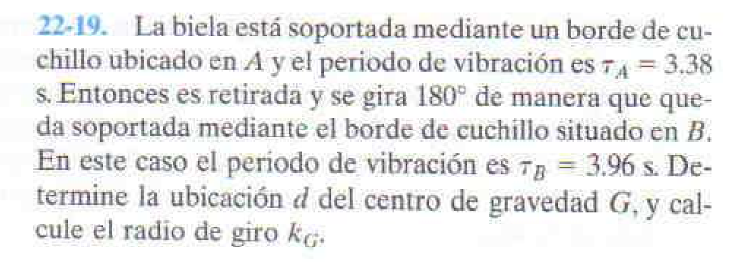



**Prob. 22–17**

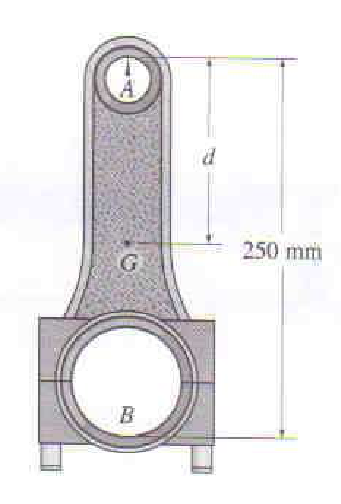
**22-18.** El apuntador de un metrónomo soporta un deslizador $A$ de 0.4 lb, el cual se ubica a una distancia fija del pivote $O$ del apuntador. Cuando el apuntador es desplazado, un resorte torsional que se localiza en $O$ ejerce una par restauradora, sobre el apuntador, de magnitud $M = (1.2\theta)$ lb · pie, donde $\theta$ representa el ángulo de desplazamiento desde la vertical medido en radianes. Determine el periodo natural de vibración cuando el apuntador está desplazado una pequeña cantidad $\theta$ y es liberado. Desprecie la masa del apuntador.




**Prob. 22–18**

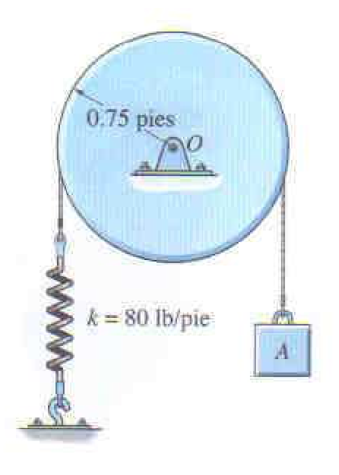


**22-19.** La biela está soportada mediante un borde de cuchillo ubicado en $A$ y el periodo de vibración es $\tau_A = 3.38$ s. Entonces es retirada y se gira 180° de manera que queda soportada mediante el borde de cuchillo situado en $B$. En este caso el periodo de vibración es $\tau_B = 3.96$ s. Determine la ubicación $d$ del centro de gravedad $G$, y calcule el radio de giro $k_G$.



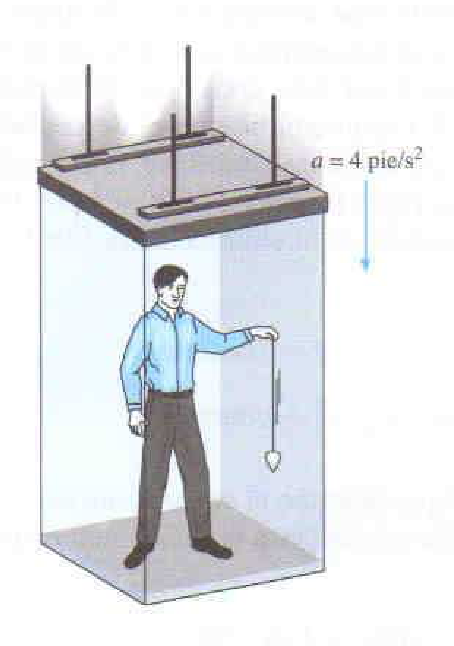

**Prob. 22–19**

***22-20.** El disco pesa 15 lb, está soportado mediante un pasador que se localiza en su centro $O$, y sostiene el bloque $A$ que tiene un peso de 3 lb. Si la banda que pasa sobre el disco no desliza en su superficie de contacto, determine el periodo natural de vibración del sistema.



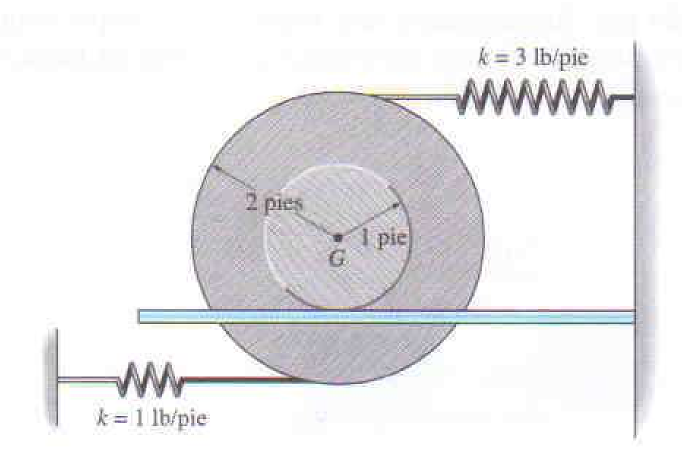

**Prob. 22–20**

**22-21.** Un hombre de pie en un elevador sostiene un péndulo que consta de una cuerda de 18 pulg y una partícula de 0.5 lb. Si el elevador está descendiendo con aceleración $a = 4$ pies/s², determine el periodo natural de vibración para pequeñas amplitudes de oscilación.



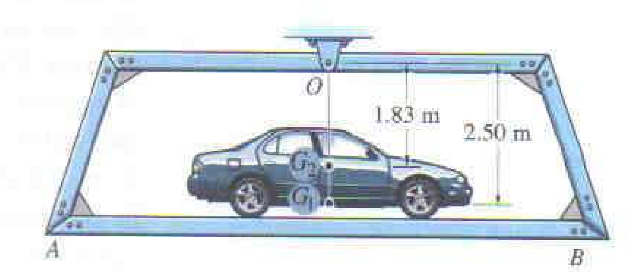

Prob. 22–21

**22-22.** El carrete de 50 lb está unido a dos resortes. Si es desplazado una pequeña cantidad y liberado, determine el periodo natural de vibración. El radio de giro del carrete es $k_G = 1.5$ pies. El carrete rueda sin deslizar.



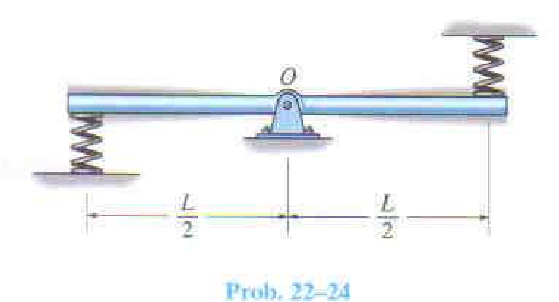

Prob. 22–22

**22-23.** La plataforma $AB$, cuando está vacía, tiene masa de 400 kg, centro de masa en $G_1$, y periodo natural de oscilación $\tau_1 = 2.38$ s. Si un carro, con masa de 1.2 Mg y centro de masa en $G_2$, es colocado sobre la plataforma, el periodo natural de oscilación se convierte en $\tau_2 = 3.16$ s. Determine el momento de inercia del carro con respecto a un eje que pasa por $G_2$.



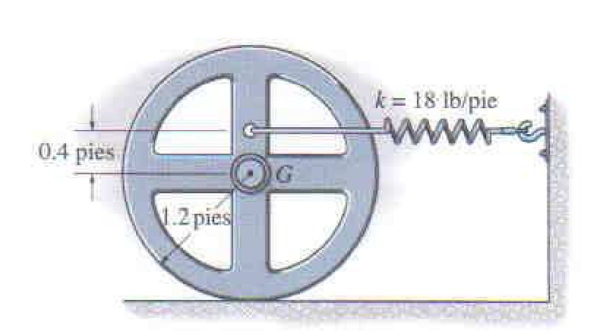

Prob. 22–23

***22-24.** La barra uniforme tiene masa $m$ y está soportada mediante el pasador $O$. Si a la barra se le imprime un pequeño desplazamiento y luego es liberada, determine el periodo natural de vibración. Los resortes no están estirados cuando la barra se encuentra en la posición mostrada.




Prob. 22–24

**22-25.** La rueda de 50 lb tiene un radio de giro con respecto a su centro de masa $G$ de $k_G = 0.7$ pies. Determine la frecuencia de vibración si la rueda es desplazada ligeramente desde su posición de equilibrio y liberada. Suponga que no hay deslizamiento.




Prob. 22–25

## *22.2 Métodos de energía

El movimiento armónico simple de un cuerpo, analizado en la sección anterior, es debido sólo a las fuerzas restauradoras gravitatorias y elásticas que actúan sobre el cuerpo. Como estos tipos de fuerzas son *conservativas*, también es posible usar la ecuación de la conservación de la energía para obtener la frecuencia natural o el periodo de vibración del cuerpo. Para mostrar cómo hacer esto, considere de nuevo el bloque y el resorte de la figura 22-8. Cuando el bloque es desplazado una cantidad arbitraria $x$ desde la posición de equilibrio, la energía cinética es $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{x}^2$ y la energía potencial es $V = \frac{1}{2}kx^2$. Por medio de la ecuación de la conservación de la energía, ecuación 14-21, es necesario que

$$T + V = \text{constante}$$

$$\frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \text{constante} \tag{22-17}$$

La ecuación diferencial que describe el *movimiento acelerado* del bloque se puede obtener *diferenciando* esta ecuación con respecto al tiempo; esto es,

$$m\dot{x}\ddot{x} + kx\dot{x} = 0$$

$$\dot{x}(m\ddot{x} + kx) = 0$$

Como la velocidad $\dot{x}$ no *siempre* es cero en un sistema vibratorio,

$$\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0 \qquad \omega_n = \sqrt{k/m}$$

la cual es la misma que la ecuación 22-1.

Si la ecuación de la energía se escribe para un *sistema de cuerpos conectados*, la frecuencia natural de la ecuación de movimiento puede determinarse también por diferenciación con respecto al tiempo. Aquí *no es necesario* desmembrar el sistema para tomar en cuenta las fuerzas reactivas y conectivas que no trabajan.




Fig. 22-8



La suspensión de un vagón de ferrocarril consta de un conjunto de resortes montados entre el bastidor del vagón y el tren de ruedas. Esto dará al vagón una frecuencia natural de vibración que puede ser determinada.

## PROCEDIMIENTO DE ANÁLISIS

La frecuencia circular o natural $\omega_n$ de un cuerpo, o de un sistema de cuerpos conectados, puede ser determinada aplicando la ecuación de la conservación de la energía mediante el siguiente procedimiento.

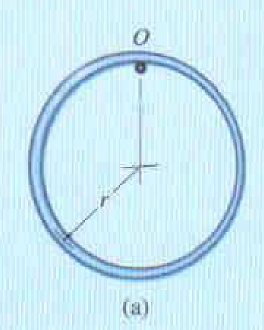
*Ecuación de energía.*

- Dibuje el cuerpo cuando está desplazado una *pequeña cantidad* desde su posición de equilibrio, y defina la ubicación del cuerpo desde su posición de equilibrio por medio de una coordenada $q$ de posición apropiada.
- Formule la ecuación de energía para el cuerpo, $T + V =$ constante, en términos de la coordenada de posición.
- En general, la energía cinética debe tomar en cuenta los movimientos traslacional y rotacional del cuerpo, $T = \frac{1}{2}mv_G^2 + \frac{1}{2}I_G\omega_n^2$, ecuación 18-2.
- La energía potencial es la suma de las energías potenciales gravitatoria y elástica del cuerpo, $V = V_g + V_e$, ecuación 18-16. En particular, $V_g$ debe medirse desde un datum para el cual $q = 0$ (posición de equilibrio).

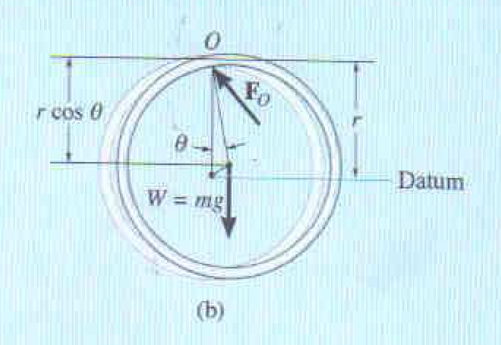
*Derivada con respecto al tiempo.*

- Tome la derivada con respecto al tiempo de la ecuación de la energía usando la regla de la cadena del cálculo y factorice los términos comunes. La ecuación diferencial resultante representa la ecuación de movimiento para el sistema. El valor de $\omega_n$ se obtiene después de reordenar los términos en la "forma estándar", $\ddot{q} + \omega_n^2 q = 0$.

## EJEMPLO 22.5




(a)




(b)

**Fig. 22-9**

El aro delgado que muestra la figura 22-9*a* está soportado mediante una espiga colocada en $O$. Determine el periodo natural de oscilación para pequeñas amplitudes de la oscilación. El aro tiene masa $m$.

### Solución

***Ecuación de energía.*** Un diagrama del aro cuando está desplazado una pequeña cantidad ($q =$) $\theta$ de la posición de equilibrio se muestra en la figura 22-9*b*. Usando la tabla proporcionada en la cubierta posterior interna de este libro y el teorema de los ejes paralelos para determinar $I_O$, podemos expresar la energía cinética como

$$T = \tfrac{1}{2}I_O\omega_n^2 = \tfrac{1}{2}[mr^2 + mr^2]\dot{\theta}^2 = mr^2\dot{\theta}^2$$

Si un datum horizontal se coloca a través del centro de gravedad del aro cuando $\theta = 0$, entonces el centro de gravedad se mueve hacia arriba $r(1 - \cos\theta)$ en la posición desplazada. Para *ángulos pequeños*, $\cos\theta$ puede ser reemplazado por los primeros dos términos de su desarrollo en serie, $\cos\theta = 1 - \theta^2/2 + \cdots$. Por tanto, la energía potencial es

$$V = mgr\left[1 - \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)\right] = mgr\frac{\theta^2}{2}$$

La energía total en el sistema es

$$T + V = mr^2\dot{\theta}^2 + mgr\frac{\theta^2}{2}$$

***Derivada con respecto al tiempo.***

$$mr^2 2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgr\theta\dot{\theta} = 0$$

$$mr\dot{\theta}(2r\ddot{\theta} + g\theta) = 0$$

Como $\dot{\theta}$ no siempre es igual a cero, a partir de los términos entre paréntesis,

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{2r}\theta = 0$$

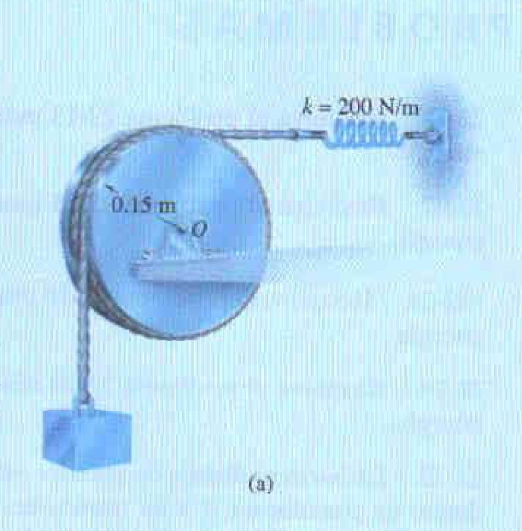
Por consiguiente,

$$\omega_n = \sqrt{\frac{g}{2r}}$$

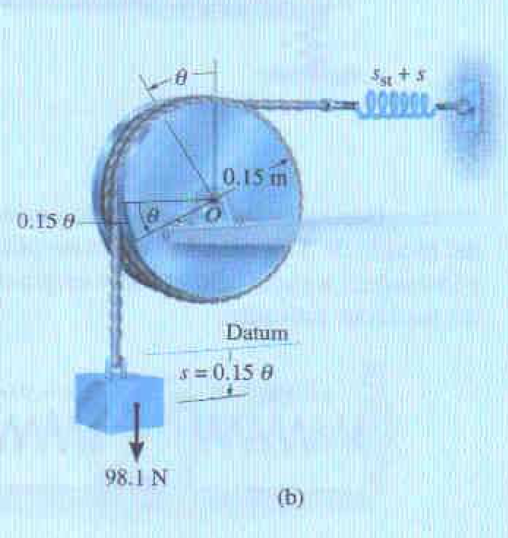
y entonces $$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} = 2\pi\sqrt{\frac{2r}{g}}$$ *Resp.*

## EJEMPLO 22.6

Un bloque de 10 kg está suspendido de una cuerda enrollada alrededor de un disco de 5-kg, como se muestra en la figura 22-10*a*. Si el resorte tiene rigidez $k = 200$ N/m, determine el periodo natural de vibración para el sistema.



(a)



(b)

Fig. 22–10

### Solución

***Ecuación de energía.*** Un diagrama del bloque y el disco cuando están desplazados las cantidades $s$ y $\theta$ desde la posición de equilibrio se muestra en la figura 22-10*b*. Como $s = (0.15 \text{ m})\theta$, la energía cinética del sistema es

$$T = \tfrac{1}{2}m_b v_b^2 + \tfrac{1}{2}I_O\omega_d^2$$
$$= \tfrac{1}{2}(10 \text{ kg})[(0.15 \text{ m})\dot{\theta}]^2 + \tfrac{1}{2}[\tfrac{1}{2}(5 \text{ kg})(0.15 \text{ m})^2](\dot{\theta})^2$$
$$= 0.141(\dot{\theta})^2$$

Si establecemos el datum en la posición de equilibrio del bloque, y observando que el resorte se estira $s_{st}$ por equilibrio, podemos escribir la energía potencial como

$$V = \tfrac{1}{2}k(s_{st} + s)^2 - Ws$$
$$= \tfrac{1}{2}(200 \text{ N/m})[s_{st} + (0.15 \text{ m})\theta]^2 - 98.1 \text{ N}[(0.15 \text{ m})\theta]$$

La energía total del sistema es, por tanto,

$$T + V = 0.141(\dot{\theta})^2 + 100(s_{st} + 0.15\theta)^2 - 14.72\theta$$

***Derivada con respecto al tiempo.***

$$0.281(\dot{\theta})\ddot{\theta} + 200(s_{st} + 0.15\theta)0.15\dot{\theta} - 14.72\dot{\theta} = 0$$

Como $s_{st} = 98.1/200 = 0.4905$ m, la ecuación anterior se reduce a la "forma estándar"

$$\ddot{\theta} + 16\theta = 0$$

de modo que

$$\omega_n = \sqrt{16} = 4 \text{ rad/s}$$

Entonces,

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega_n} = \frac{2\pi}{4} = 1.57 \text{ s} \qquad \textit{Resp.}$$

# PROBLEMAS

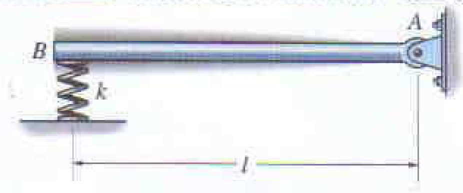
22-26. Resuelva el problema 22-13 usando métodos de energía.

22-27. Resuelva el problema 22-15 usando métodos de energía.

*22-28. Resuelva el problema 22-16 usando métodos de energía.

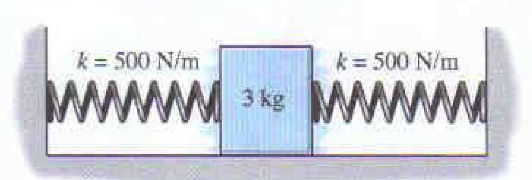
22-29. Resuelva el problema 22-20 usando métodos de energía.

22-30. La barra uniforme de masa $m$ está soportada mediante un pasador en $A$ y un resorte en $B$. Si el extremo $B$ recibe un pequeño desplazamiento hacia abajo y es liberado, determine el periodo natural de vibración.



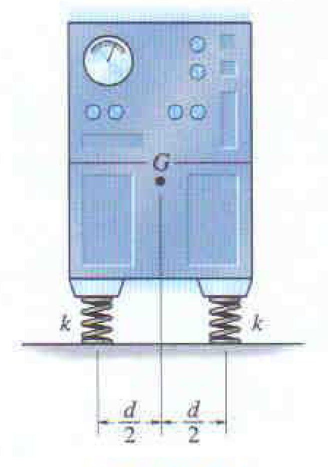

Prob. 22–30

22-31. Determine la ecuación diferencial del movimiento del bloque de 3 kg cuando éste es desplazado ligeramente y liberado. La superficie es lisa y originalmente los resortes no están estirados.



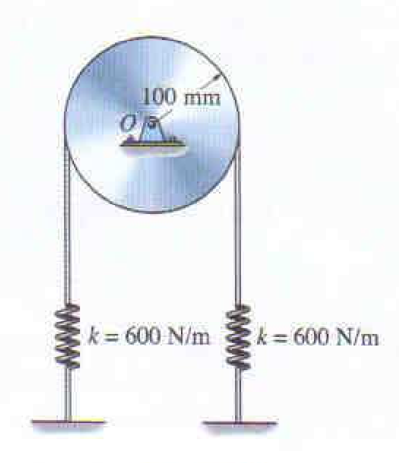

Prob. 22–31

*22-32. La máquina tiene masa $m$ y está soportada uniformemente por *cuatro* resortes, cada uno con rigidez $k$. Determine el periodo natural de vibración vertical.



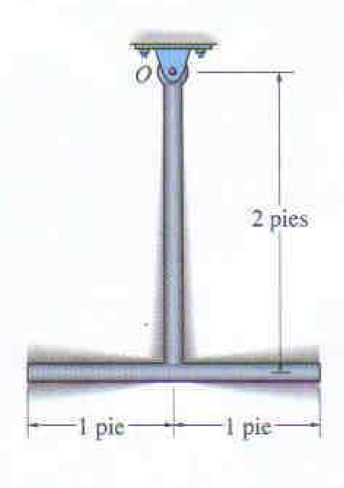

Prob. 22–32

22-33. El disco de 7 kg está soportado mediante un pasador conectado en su punto medio. Determine el periodo natural de vibración del disco si los resortes tienen suficiente tensión como para impedir que la cuerda resbale sobre el disco al oscilar éste. *Sugerencia*: Suponga que cada resorte está estirado inicialmente la longitud $\delta_0$. Este término se cancelará después de tomar la derivada con respecto al tiempo en la ecuación de energía.



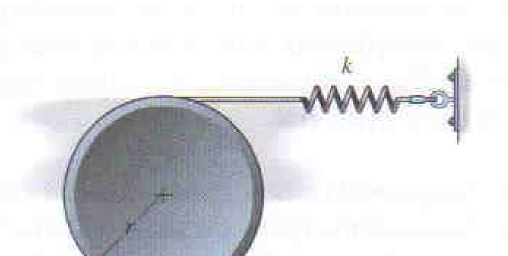

Prob. 22–33

22-34. Determine el periodo natural de vibración del péndulo. Considere las dos barras como esbeltas, cada una con peso de 8 lb/pie.



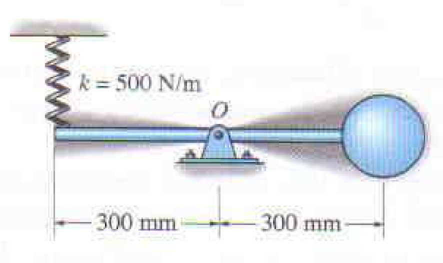

Prob. 22–34

**22-35.** Determine el periodo natural de vibración del disco que tiene masa $m$ y radio $r$. Suponga que el disco no desliza sobre la superficie de contacto cuando oscila.



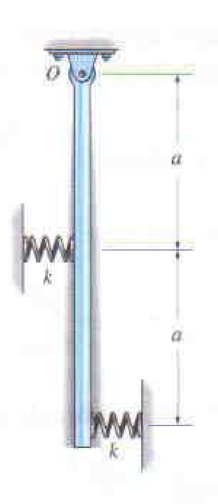

Prob. 22-35

*__22-36.__ Determine el periodo natural de vibración de la esfera de 3 kg. Desprecie la masa de la barra y el tamaño de la esfera.



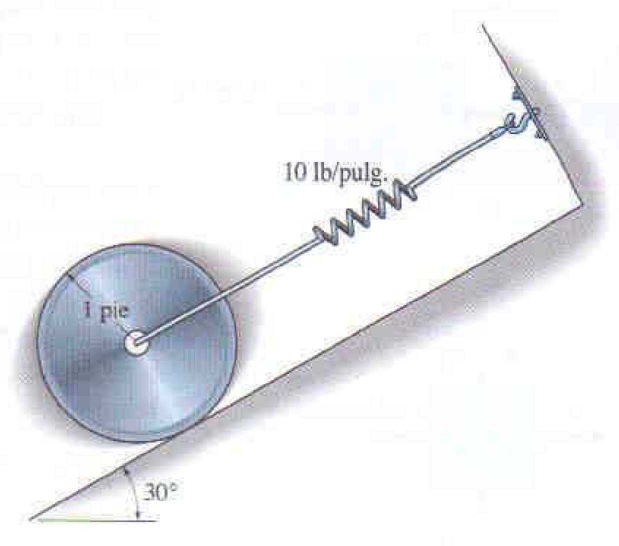

Prob. 22-36

**22-37.** La barra esbelta tiene masa $m$ y está articulada en su extremo $O$. Cuando se encuentra en posición vertical, los resortes no están estirados. Determine el periodo natural de vibración.



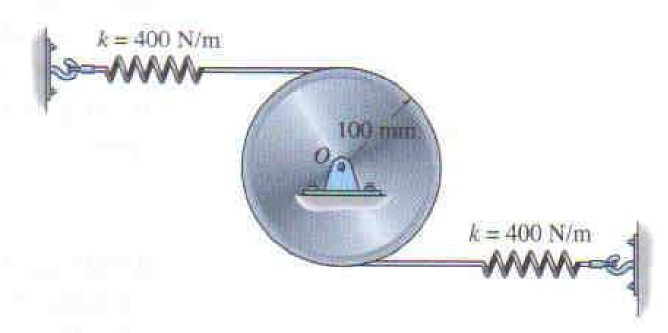

Prob. 22-37

**22-38.** Determine la frecuencia natural de vibración del disco de 20 lb. Suponga que el disco no desliza sobre la superficie inclinada.



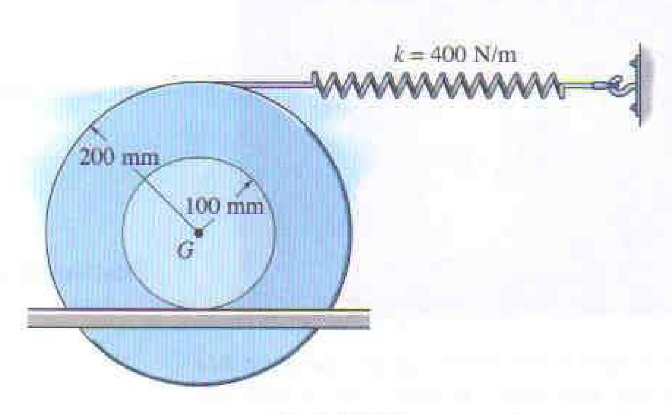

Prob. 22-38

**22-39.** Si el disco tiene masa de 8 kg, determine la frecuencia natural de vibración. Originalmente los resortes no están estirados.



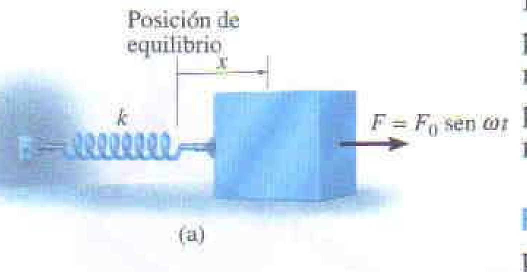

Prob. 22-39

*__22-40.__ Determine la ecuación diferencial del movimiento del carrete de 3 kg. Suponga que no desliza en la superficie de contacto cuando oscila. El radio de giro del carrete con respecto a su centro de masa es $k_G = 125$ mm.




Prob. 22-40

## *22.3 Vibración forzada sin amortiguamiento



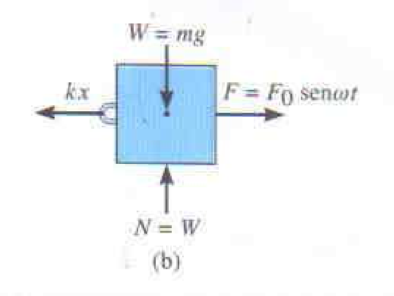




Fig. 22–11

La vibración forzada sin amortiguamiento es considerada uno de los tipos más importantes de movimiento vibratorio en los trabajos de ingeniería. Los principios que describen la naturaleza de este movimiento pueden ser usados para analizar las fuerzas que causan vibraciones en muchos tipos de máquinas y estructuras.

**Fuerza periódica.** El bloque y el resorte mostrados en la figura 22-11*a* proporcionan un modelo conveniente que representa las características vibratorias de un sistema sometido a una fuerza periódica $F = F_0$ sen $\omega_0 t$. Esta fuerza tiene una amplitud de $F_0$ y *frecuencia forzada* $\omega_0$. El diagrama de cuerpo libre para el bloque cuando está desplazado una distancia $x$ se muestra en la figura 22-11*b*. Aplicando la ecuación de movimiento resulta

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = ma_x; \qquad F_0 \operatorname{sen} \omega t - kx = m\ddot{x}$$

o bien

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\operatorname{sen} \omega_0 t \qquad (22\text{–}18)$$

Esta ecuación es una ecuación diferencial de segundo orden no homogénea. Su solución general consta de una solución complementaria, $x_c$, *más* una solución particular, $x_p$.

La *solución complementaria* es determinada haciendo el término del lado derecho de la ecuación 22-8 igual a cero y resolviendo la ecuación homogénea resultante, que es equivalente a la ecuación 22-1. La solución es definida mediante la ecuación 22-3, esto es,

$$x_c = A \operatorname{sen} \omega_n t + B \cos \omega_n t \qquad (22\text{–}19)$$

donde $\omega_n$ es la frecuencia natural, $\omega_n = \sqrt{k/m}$, ecuación 22-2.

Como el movimiento es periódico, la *solución particular* de la ecuación 22-18 puede ser determinada suponiendo una solución de la forma

$$x_p = C \operatorname{sen} \omega_0 t \qquad (22\text{–}20)$$

donde $C$ es una constante. Tomando la segunda derivada con respecto al tiempo y sustituyéndola en la ecuación 22-18 obtenemos

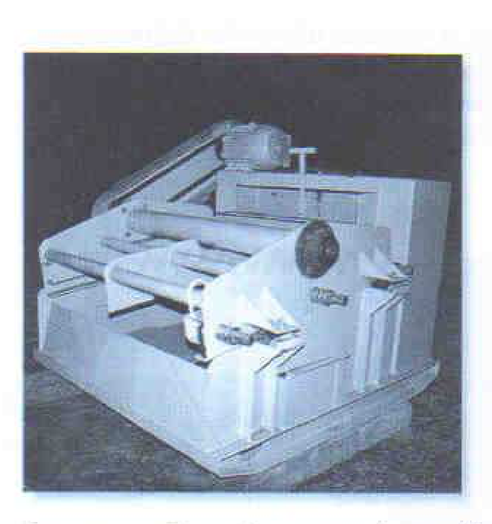
$$-C\omega^2 \operatorname{sen} \omega_0 t + \frac{k}{m}(C \operatorname{sen} \omega_0 t) = \frac{F_0}{m} \operatorname{sen} \omega_0 t$$

Factorizando sen $\omega t$ y despejando $C$ resulta

$$C = \frac{F_0/m}{(k/m) - \omega^2} = \frac{F_0/k}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \qquad (22\text{–}21)$$

Sustituyendo en la ecuación 22-20, obtenemos la solución particular

$$x_p = \frac{F_0/k}{1 - (\omega_0/\omega_n)^2} \operatorname{sen} \omega_0 t \qquad (22\text{–}22)$$



Las mesas vibratorias proporcionan vibraciones forzadas y se usan para separar materiales granulares.

(a) (b)

(c) (d)

Fig. 22–12

La *solución general* es, por tanto,

$$x = x_c + x_p = A \operatorname{sen} \omega_n + B \cos \omega_n + \frac{F_0/k}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \operatorname{sen} \omega t \qquad (22\text{–}23)$$

Aquí $x$ describe dos tipos de movimiento vibratorio del bloque. La *solución complementaria* $x_c$ define la *vibración libre*, que depende de la frecuencia circular $\omega_n = \sqrt{k/m}$ y de las constantes $A$ y $B$, figura 22-12*a*. Valores específicos de $A$ y $B$ se obtienen evaluando la ecuación 22-3 en un instante dado cuando el desplazamiento y la velocidad son conocidos. La *solución particular* $x_p$ describe la *vibración forzada* del bloque causada por la fuerza aplicada $F = F_0$ sen $\omega t$, figura 22-12*b*. La vibración resultante $x$ se muestra en la figura 22-2*c*. Como todos los sistemas vibratorios están sometidos a *fricción*, la vibración libre, $x_c$, desaparecerá con el tiempo. Por esta razón, a la vibración libre se le llama *transitoria*, y a la vibración forzada se le denomina de *estado estable* ya que es la única vibración que permanece, figura 22-12*d*.

A partir de la ecuación 22-1 se observa que la *amplitud* de una vibración forzada depende de la *razón de frecuencias* $\omega/\omega_n$. Si el *factor de amplificación* FA se define como la razón de la amplitud de la vibración de estado estable, $(x_p)_{\text{máx}}$, a la deflexión estática $F_0/k$ que sería producida por la amplitud de la fuerza periódica $F_0$, entonces, a partir de la ecuación 22-22,

$$\text{MF} = \frac{(x_p)_{\text{máx}}}{F_0/k} = \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \qquad (22\text{–}24)$$



El compactador de suelo opera median vibraciones forzadas desarrolladas por u motor interno. Es importante que la frecue cia forzada no sea cercana a la frecuenc natural de vibración, la cual es determinad cuando se apaga el motor; de otra maner ocurrirá resonancia y no se podrá control la máquina.

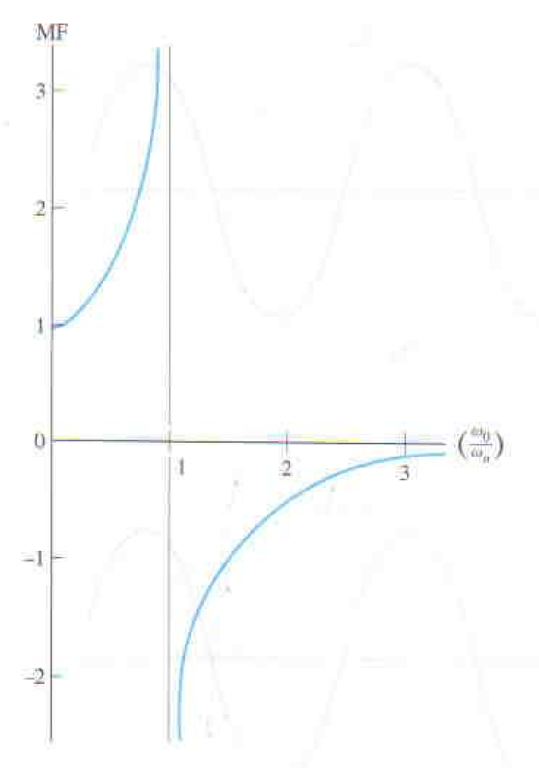



Fig. 22–13

Esta ecuación está graficada en la figura 22-13. Advierta que para $\omega_0 \approx 0$, el FA $\approx 1$. En este caso, debido a la muy baja frecuencia $\omega \ll \omega_n$, la magnitud de la fuerza **F** cambia lentamente y entonces la vibración del bloque estará en fase con la fuerza **F** aplicada. Si la fuerza o el desplazamiento son aplicados con una frecuencia cercana a la frecuencia natural del sistema, esto es, $\omega/\omega \approx 1$, la amplitud de vibración del bloque resulta extremadamente grande. Esto ocurre porque la fuerza **F** es aplicada al bloque de manera que siempre sigue el movimiento del bloque. Esta condición se llama *resonancia*, y en la práctica, las vibraciones en resonancia pueden causar esfuerzos enormes y una falla rápida de las partes.* Cuando la fuerza cíclica $F_0$ sen $\omega t$ es aplicada a altas frecuencias ($\omega > \omega_n$), el valor del FA resulta negativo, indicando que el movimiento del bloque está fuera de fase con la fuerza. Bajo estas condiciones, cuando el bloque se desplaza hacia la derecha, la fuerza actúa hacia la izquierda, y viceversa. Para frecuencias extremadamente altas ($\omega \gg \omega_n$), el bloque permanece casi estacionario, y por consiguiente el FA es aproximadamente igual a cero.

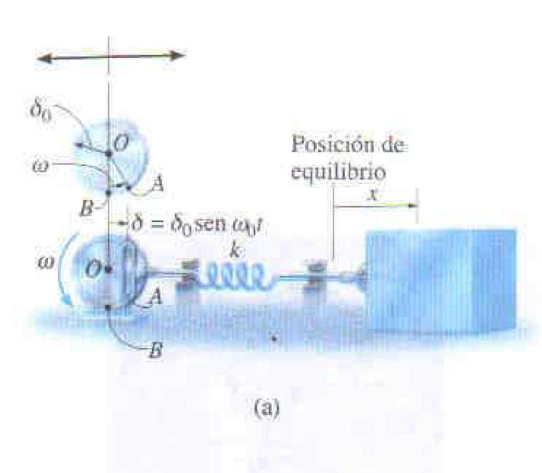
**Desplazamiento periódico del soporte.** Las vibraciones forzadas también pueden originarse a partir de la excitación periódica del soporte de un sistema. El modelo mostrado en la figura 22-14*a* representa la vibración periódica de un bloque que es causada por el movimiento armónico $\delta = \delta_0$ sen $\omega_0 t$ del soporte. En este caso, el diagrama de cuerpo libre para el bloque se muestra en la figura 22-14*b*. La coordenada $x$ es medida desde el punto de desplazamiento cero del soporte, esto es, cuando la línea radial $OA$ coincide con $OB$, figura 22-14*a*. Por tanto, el desplazamiento general del resorte es ($x - \delta_0$ sen $\omega t$). Aplicando la ecuación de movimiento resulta

$$\overset{+}{\rightarrow} F_x = ma_x; \qquad -k(x - \delta_0 \text{ sen } \omega t) = m\ddot{x}$$

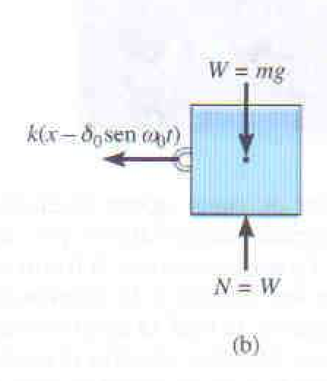
o bien

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{k\delta_0}{m} \text{ sen } \omega t \tag{22–25}$$

En comparación, esta ecuación es idéntica a la forma de la ecuación 22-18, *si $F_0$ es reemplazada* por $k\delta_0$. Cuando se efectúa esta sustitución en las soluciones definidas mediante las ecuaciones 22-21, 22-22 y 22-23, los resultados son apropiados para describir el movimiento del bloque cuando está sometido al desplazamiento $\delta = \delta_0$ sen $\omega t$ del soporte.




(a)




(b)

Fig. 22–14

*Un columpio tiene un periodo natural de vibración, como se determinó en el ejemplo 22.1. Si se empuja al columpio sólo cuando alcanza su punto más alto, despreciando la resistencia de la fricción o del viento, se producirá resonancia ya que las frecuencias natural y forzada serán iguales.

## EJEMPLO 22.7

El instrumento mostrado en la figura 22-15 está rígidamente unido a una plataforma $P$, que a su vez está soportada mediante *cuatro* resortes, cada uno con rigidez $k = 800$ N/m. Inicialmente la plataforma está en reposo cuando el piso es sometido a un desplazamiento $\delta = 10$ sen $(8t)$ mm, donde $t$ está en segundos. Si el instrumento está restringido a moverse verticalmente y la masa total de instrumento y plataforma es de 20 kg, determine el desplazamiento vertical $y$ de la plataforma en función del tiempo, medido desde la posición de equilibrio. ¿Qué vibración del piso se requiere para causar resonancia?

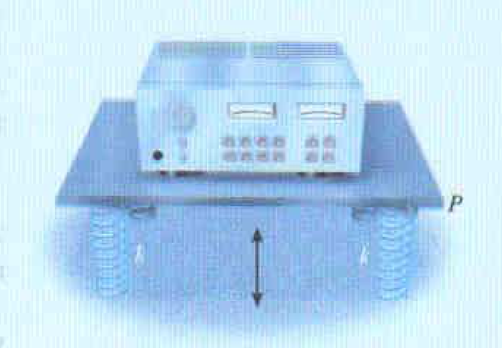



Fig. 22-15

### Solución

Como la vibración inducida es causada por el desplazamiento de los soportes, el movimiento es descrito mediante la ecuación 22-23, con $F_0$ reemplazada por $k\delta_0$, esto es,

$$y = A \text{ sen } \omega_n t + B \cos \omega_n t + \frac{\delta_0}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \text{ sen } \omega t \quad (1)$$

Aquí $\delta = \delta_0$ sen $\omega t = 10$ sen $(8t)$ mm, por lo que

$$\delta_0 = 10 \text{ mm} \qquad \omega_0 = 8 \text{ rad/s}$$

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{4(800 \text{ N/m})}{20 \text{ kg}}} = 12.6 \text{ rad/s}$$

A partir de la ecuación 22-22, con $k\delta_0$ reemplazando a $F_0$, la amplitud de la vibración causada por el desplazamiento del piso es

$$(y_{\omega_n})_{\text{máx}} = \frac{\delta_0}{1 - (\omega_0/\omega_n)^2} = \frac{10}{1 - [(8 \text{ rad/s})/(12.6 \text{ rad/s})]^2} = 16.7 \text{ mm} \quad (2)$$

Por consiguiente, la ecuación 1 y su derivada con respecto al tiempo son

$$y = A \text{ sen}(12.6t) + B \cos(12.6t) + 16.7 \text{ sen}(8t)$$
$$\dot{y} = A(12.6) \cos(12.6t) - B(12.6) \text{ sen}(12.6t) + 133.3 \cos(8t)$$

Las constantes $A$ y $B$ son evaluadas con estas ecuaciones. Como $y = 0$ y $\dot{y} = 0$ en $t = 0$, entonces

$$0 = 0 + B + 0 \qquad B = 0$$
$$0 = A(12.6) - 0 + 133.3 \qquad A = -10.5$$

El movimiento vibratorio es descrito, por tanto, mediante la ecuación

$$y = -10.5 \text{ sen}(12.6t) + 16.7 \text{ sen}(8t) \qquad \textit{Resp.}$$

La resonancia ocurrirá cuando la amplitud de la vibración causada por el desplazamiento del piso tienda a infinito. A partir de la ecuación 2, esto requiere

$$\omega = \omega_n = 12.6 \text{ rad/s} \qquad \textit{Resp.}$$

## *22.4 Vibración libre con amortiguamiento viscoso

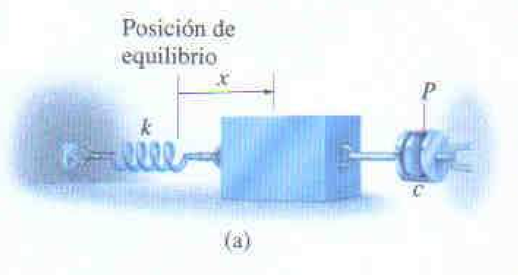
El análisis de vibraciones considerado hasta ahora no ha incluido los efectos de fricción o amortiguamiento en el sistema, y en consecuencia, las soluciones obtenidas son sólo aproximaciones del movimiento real. Como todas las vibraciones desaparecen con el tiempo, la presencia de fuerzas amortiguadoras debe incluirse en el análisis.

En muchos casos, el amortiguamiento es atribuido a la resistencia creada por la sustancia, digamos agua, aceite o aire, en que vibra el sistema. Si el cuerpo se mueve lentamente a través de la sustancia, la resistencia al movimiento es directamente proporcional a la rapidez del cuerpo. El tipo de fuerza desarrollada bajo esas condiciones se llama *fuerza de amortiguamiento viscoso*. La magnitud de esta fuerza es expresada por una ecuación de la forma

$$F = c\dot{x} \tag{22–26}$$

donde la constante $c$ se llama *coeficiente de amortiguamiento viscoso* y tiene unidades de N · s/m o lb · s/pie.

El movimiento vibratorio de un cuerpo o sistema con amortiguamiento viscoso puede ser caracterizado por el bloque y el resorte mostrados en la figura 22-16*a*. El efecto de amortiguamiento es proporcionado mediante el *amortiguador* conectado al bloque en su lado derecho. El amortiguamiento ocurre cuando el pistón $P$ se mueve a la derecha o a la izquierda dentro del cilindro cerrado. El cilindro contiene un fluido, y el movimiento del pistón se retarda ya que el fluido debe fluir alrededor o a través de un pequeño orificio localizado en el pistón. Se supone que el amortiguador tiene un coeficiente $c$ de amortiguamiento viscoso.



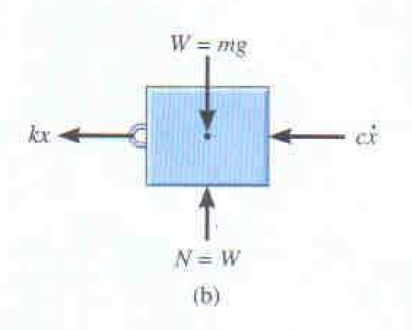
(a)

Si el bloque es desplazado una distancia $x$ desde su posición de equilibrio, el diagrama de cuerpo libre resultante se muestra en la figura 22-16*b*. Tanto la fuerza del resorte $kx$ como la fuerza de amortiguamiento $c\dot{x}$ se oponen al movimiento hacia delante del bloque, por lo que al aplicar la ecuación de movimiento resulta

$$\xrightarrow{+} \Sigma F_x = ma_x; \qquad -kx - c\dot{x} = m\ddot{x}$$

o bien

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = 0 \tag{22–27}$$



(b)

Fig. 22–16

Esta ecuación diferencial lineal homogénea de segundo orden tiene soluciones de la forma

$$x = e^{\lambda t}$$

donde $e$ es la base de los logaritmos naturales y $\lambda$ es una constante. El valor de $\lambda$ se puede obtener sustituyendo esta solución en la ecuación 22–27, lo cual resulta en

$$m\lambda^2 e^{\lambda t} + c\lambda e^{\lambda t} + ke^{\lambda t} = 0$$

o bien

$$e^{\lambda t}(m\lambda^2 + c\lambda + k) = 0$$

Como $e^{\lambda t}$ nunca es cero, es posible encontrar una solución siempre que

$$m\lambda^2 + c\lambda + k = 0$$

Por consiguiente, mediante la fórmula cuadrática, los dos valores de $\lambda$ son

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= -\frac{c}{2m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \\ \lambda_2 &= -\frac{c}{2m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m}}\end{aligned} \qquad (22\text{-}28)$$

La solución general de la ecuación 22-27 es, por tanto, una combinación lineal de funciones exponenciales que contienen estas dos raíces. Existen tres combinaciones posibles de $\lambda_1$ y $\lambda_2$ que deben ser consideradas. Sin embargo, antes de estudiarlas, definiremos primero el *coeficiente de amortiguamiento crítico* $c_c$ como el valor de $c$ que vuelve al radical presente en las ecuaciones 22-28 igual a cero; es decir,

$$\left(\frac{c_c}{2m}\right)^2 - \frac{k}{m} = 0$$

o bien

$$c_c = 2m\sqrt{\frac{k}{m}} = 2m\omega_n \qquad (22\text{-}29)$$

Aquí el valor de $\omega_n$ es la frecuencia natural $\omega_n = \sqrt{k/m}$, ecuación 22-2.

**Sistema sobreamortiguado.** Cuando $c > c_c$, ambas raíces $\lambda_1$ y $\lambda_2$ son reales. La solución general de la ecuación 22-27 puede escribirse como

$$x = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t} \qquad (22\text{-}30)$$

El movimiento correspondiente a esta solución *no es vibratorio*. El efecto del amortiguamiento es tan fuerte que cuando el bloque es desplazado y liberado, simplemente regresa a su posición original sin oscilar. El sistema se llama *sobreamortiguado*.

**Sistema amortiguado críticamente.** Si $c = c_c$, entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = -c_c/2m = -\omega_n$. Esta situación se conoce como *amortiguamiento crítico*, ya que representa una condición donde $c$ tiene el mínimo valor necesario para que el sistema no vibre. Usando los métodos de las ecuaciones diferenciales, se puede mostrar que la solución de la ecuación 22-27 para el amortiguamiento crítico es

$$x = (A + Bt)e^{-\omega_n t} \qquad (22\text{-}31)$$

**Sistema subamortiguado.** Muy a menudo $c < c_c$, en cuyo caso al sistema se le llama *subamortiguado*. En esta circunstancia, las raíces $\lambda_1$ y $\lambda_2$ son números complejos, y se puede mostrar que la solución general de la ecuación 22-27 puede escribirse como

$$x = D[e^{-(c/2m)t}\,\text{sen}(\omega_d t + \phi)] \qquad (22\text{–}32)$$

donde $D$ y $\phi$ son constantes generalmente determinadas a partir de las condiciones iniciales del problema. La constante $\omega_d$ se llama *frecuencia natural amortiguada* del sistema. Esta constante tiene un valor de

$$\omega_d = \sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{c}{2m}\right)^2} = \omega_n\sqrt{1 - \left(\frac{c}{c_c}\right)^2} \qquad (22\text{–}33)$$

donde la razón $c/c_c$ se llama *factor de amortiguamiento*.

La gráfica de la ecuación 22-32 se muestra en la figura 22-17. El límite inicial de movimiento, $D$, disminuye con cada ciclo de vibración, ya que el movimiento está confinado dentro de los límites de la curva exponencial. Usando la frecuencia natural amortiguada $\omega_d$, el periodo de vibración amortiguada puede escribirse como

$$\tau_d = \frac{2\pi}{\omega_d} \qquad (22\text{–}34)$$

Como $\omega_d < \omega_n$, ecuación 22-33, el periodo de vibración amortiguada, $\tau_d$, será mayor que el de la vibración libre, $\tau = 2\pi/\omega_n$.

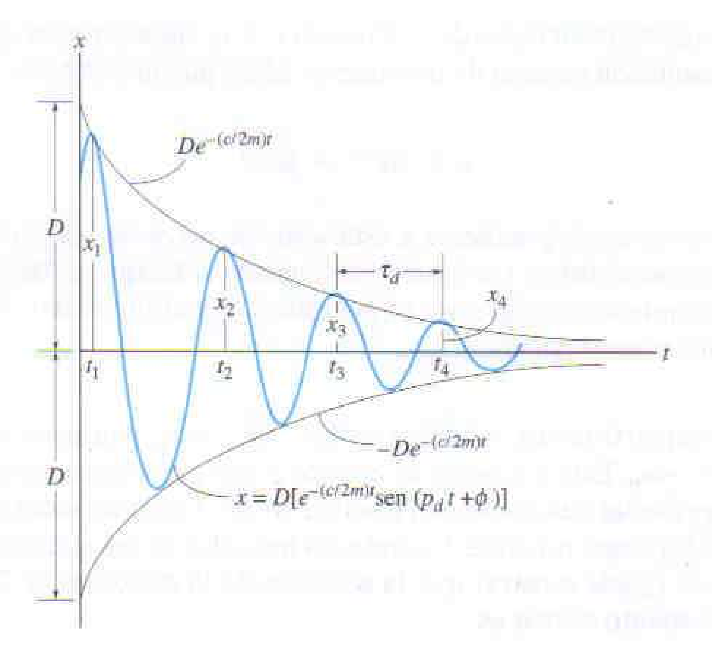



Fig. 22–17

# *22.5 Vibración forzada con amortiguamiento viscoso

El caso más general de movimiento vibratorio de un solo grado de libertad ocurre cuando el sistema incluye los efectos de movimiento forzado y amortiguamiento inducido. El análisis de este tipo particular de vibración es de valor práctico cuando se aplica a sistemas con características importantes de amortiguamiento.

Si un amortiguador es unido al bloque y al resorte mostrados en la figura 22-11*a*, la ecuación diferencial que describe el movimiento se convierte en

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = F_0 \operatorname{sen} \omega t \qquad (22\text{–}35)$$

Una ecuación similar puede ser escrita para un bloque y un resorte que tienen desplazamiento periódico en un soporte, figura 22-14*a*, la cual incluye los efectos de amortiguamiento. Sin embargo, en ese caso $F_0$ es reemplazada por $k\delta_0$. Como la ecuación 22-35 es no homogénea, la solución general es la suma de una solución complementaria, $x_c$, y una solución particular, $x_p$. La solución complementaria es determinada haciendo el lado derecho de la ecuación 22-35 igual a cero y resolviendo la ecuación homogénea, que es equivalente a la ecuación 22-27. La solución está, por tanto, dada por las ecuaciones 22-30, 22-31 o 22-32, dependiendo de los valores de $\lambda_1$ $\lambda_2$. Sin embargo, como todos los sistemas contienen fricción, esta solución desaparecerá con el tiempo. Sólo permanecerá la solución particular, la cual describe la *vibración de estado estable* del sistema. Como la función aplicada de forzamiento es armónica, el movimiento de estado estable será también armónico. En consecuencia, la solución particular tendrá la forma

$$x_p = A' \operatorname{sen} \omega t + B' \cos \omega t \qquad (22\text{–}36)$$

Las constantes $A'$ y $B'$ son determinadas tomando las derivadas con respecto al tiempo necesarias y sustituyéndolas en la ecuación 22-35, que después de simplificar toma la forma

$$(-A'm\omega^2 - cB'\omega + kA') \operatorname{sen} \omega t + (-B'm\omega^2 + cA'\omega + kB') \cos \omega t = F_0 \operatorname{sen} \omega t$$

Como esta ecuación es válida en todo momento, los coeficientes constantes de sen $\omega t$ y cos $\omega t$ pueden ser igualados; esto es,

$$-A'm\omega^2 - cB'\omega + kA' = F_0$$

$$-B'm\omega^2 + cA'\omega + kB' = 0$$

Despejando $A'$ y $B'$, observando que $\omega_n{}^2 = k/m$, resulta

$$A' = \frac{(F_0/m)(\omega_n{}^2 - \omega^2)}{(\omega_n{}^2 - \omega^2)^2 + (c\omega/m)^2}$$
$$B' = \frac{-F_0(c\omega/m^2)}{(\omega_n{}^2 - \omega^2)^2 + (c\omega/m)^2} \tag{22–37}$$

También es posible expresar la ecuación 22-36 en una forma similar a la de la ecuación 22-9,

$$x_p = C' \operatorname{sen}(\omega t - \phi') \tag{22–38}$$

en cuyo caso las constantes $C'$ y $\phi'$ son

$$C' = \frac{F_0/k}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2(c/c_c)(\omega/\omega_n)]^2}}$$
$$\phi' = \tan^{-1}\left[\frac{2(c/c_c)(\omega/\omega_n)}{1 - (\omega/\omega_n)^2}\right] \tag{22–39}$$

El ángulo $\phi'$ representa la diferencia de fase entre la fuerza aplicada y la vibración resultante de estado estable del sistema amortiguado.

El *factor de amplificación* FA fue definido en la sección 22.3 como la razón de la amplitud de la deflexión causada por la vibración forzada a la deflexión causada por una fuerza estática $\mathbf{F}_0$. A partir de la ecuación 22-38, la vibración forzada tiene una amplitud de $C'$; entonces,,

$$\text{MF} = \frac{C'}{F_0/k} = \frac{1}{\sqrt{[1 - (\omega/\omega_n)^2]^2 + [2(c/c_c)(\omega/\omega_n)]^2}} \tag{22–40}$$

El FA está graficado en la figura 22-18 contra la razón de frecuencia $\omega/\omega_n$ para varios valores del factor de amortiguamiento $c/c_c$. En esta gráfica se puede ver que la amplificación de la amplitud aumenta conforme el factor de amortiguamiento disminuye. La resonancia ocurre naturalmente sólo cuando el factor de amortiguamiento es cero y la razón de frecuencia es igual a 1.

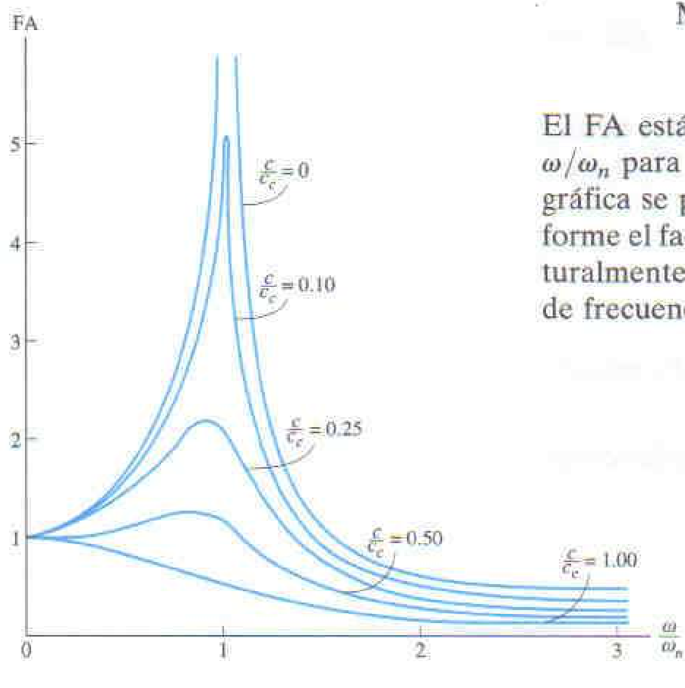



**Fig. 22–18**

**EJEMPLO 22.8**

El motor eléctrico de 30 kg mostrado en la figura 22-19 está soportado mediante *cuatro* resortes y cada resorte tiene rigidez de 200 N/m. Si el rotor $R$ está desbalanceado de manera que su efecto es equivalente a una masa de 4 kg ubicada a 60 mm del eje de rotación, determine la amplitud de vibración cuando el rotor está girando a $\omega = 10$ rad/s. El factor de amortiguamiento es $c/c_c = 0.15$.

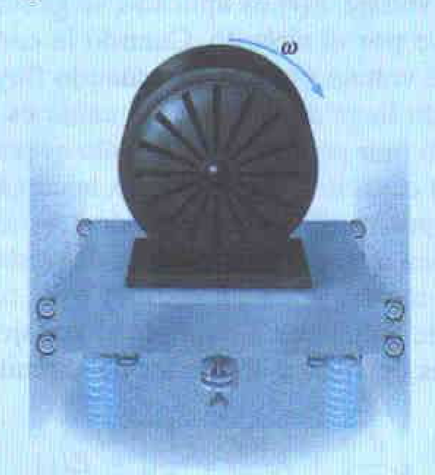



Fig. 22-19

### Solución

La fuerza periódica responsable de que el motor vibre es la fuerza centrífuga debida al rotor desbalanceado. Esta fuerza tiene magnitud constante de

$$F_0 = ma_n = mr\omega^2 = 4\text{ kg}(0.06\text{ m})(10\text{ rad/s})^2 = 24\text{ N}$$

Como $F = F_0$ sen $\omega t$, donde $\omega = 10$ rad/s, entonces

$$F = 24 \text{ sen } 10t$$

La rigidez de todo el sistema de cuatro resortes es $k = 4(200\text{ N/m}) = 800\text{ N/m}$. Por tanto, la frecuencia natural de vibración es

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{800\text{ N/m}}{30\text{ kg}}} = 5.16\text{ rad/s}$$

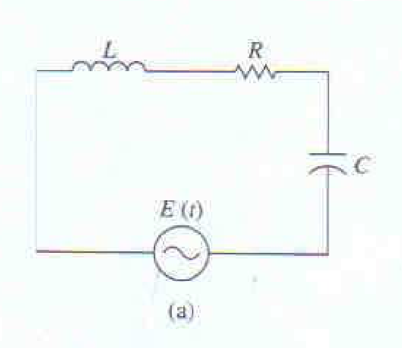
Como el factor de amortiguamiento es conocido, la amplitud de estado estable puede ser determinada con la primera de las ecuaciones 22-39, esto es,

$$C' = \frac{F_0/k}{\sqrt{[1-(\omega/\omega_n)^2]^2 + [2(c/c_c)(\omega/\omega_n)]^2}}$$

$$= \frac{24/800}{\sqrt{[1-(10/5.16)^2]^2 + [2(0.15)(10/5.16)]^2}}$$

$$= 0.0107\text{ m} = 10.7\text{ mm}$$ *Resp.*

## *22.6 Analogías con el circuito eléctrico



(a)

k
c
m
F (t)
(b)

Fig. 22–20

Las características de un sistema mecánico en vibración pueden ser representadas mediante un circuito eléctrico. Considere el circuito mostrado en la figura 22-20*a* que consta de un inductor $L$, un resistor $R$ y un capacitor $C$. Cuando un voltaje $E(t)$ es aplicado, se genera una corriente de magnitud $i$ que fluye por el circuito. Cuando la corriente fluye por el inductor, la caída de voltaje es $L(di/dt)$, cuando fluye por el resistor la caída es $Ri$, y cuando llega al capacitor la caída es $(1/C)\int i\,dt$. Como la corriente no puede fluir por el capacitor, sólo es posible medir la carga $q$ que actúa sobre el capacitor. Sin embargo, la carga puede ser relacionada a la corriente por medio de la ecuación $i = dq/dt$. Así, las caídas de voltaje que ocurren a través del inductor, del resistor y del capacitor, pueden escribirse como $L\,d^2q/dt^2$, $R\,dq/dt$, y $q/C$, respectivamente. De acuerdo con la ley de voltaje de Kirchhoff, el voltaje aplicado equilibra la suma de las caídas de voltaje alrededor del circuito. Por tanto,

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{1}{C}q = E(t) \qquad (22\text{–}41)$$

Considere ahora el modelo de un sistema mecánico de un solo grado de libertad, figura 22-20*b*, que está sometido a una función general forzadora $F(t)$ y amortiguamiento. La ecuación de movimiento para este sistema fue establecida en la sección previa y puede escribirse como

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + c\frac{dx}{dt} + kx = F(t) \qquad (22\text{–}42)$$

Por comparación, se observa que las ecuaciones 22-41 y 22-42 tienen la misma forma, y por tanto, matemáticamente el problema de analizar un circuito eléctrico es el mismo que el de analizar un sistema mecánico en vibración. Las analogías entre las dos ecuaciones se dan en la Tabla 22-1.

Esta analogía tiene importantes aplicaciones en el trabajo experimental ya que es mucho más fácil simular la vibración de un sistema mecánico complejo usando un circuito eléctrico, el cual puede ser construido en una computadora analógica, que construir un modelo mecánico equivalente de resorte y amortiguador.

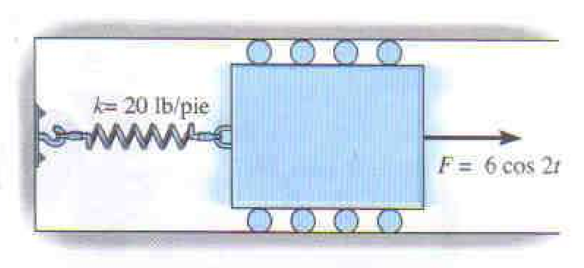
**TABLA 22–1 • Analogías electro-mecánicas**

| Eléctrica | | Mecánica | |
|---|---|---|---|
| Carga eléctrica | $q$ | Desplazamiento | $x$ |
| Corriente eléctrica | $i$ | Velocidad | $dx/dt$ |
| Voltaje | $E(t)$ | Fuerza aplicada | $F(t)$ |
| Inductancia | $L$ | Masa | $m$ |
| Resistencia | $R$ | Coeficiente de amortiguamiento viscoso | $c$ |
| Recíproco de la capacitancia | $1/C$ | Rigidez de resorte | $k$ |

# PROBLEMAS

**22-41.** El bloque mostrado en la figura 22-16 tiene masa de 20 kg y el resorte tiene rigidez $k = 600$ N/m. Cuando el bloque es desplazado y liberado, se miden dos amplitudes sucesivas: $x_1 = 150$ mm y $x_2 = 87$ mm. Determine el coeficiente de amortiguamiento viscoso, $c$.

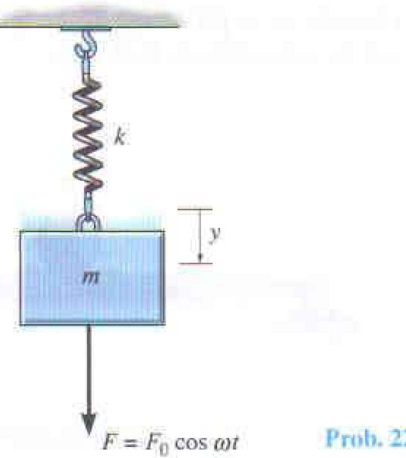
**22-42.** El bloque de 20 lb está unido a un resorte que tiene rigidez de 20 lb/pie. Una fuerza $F = (6 \cos 2t)$, donde $t$ está en segundos, es aplicada al bloque. Determine la rapidez máxima del bloque después que las fuerzas de fricción que causan las vibraciones libres desaparecen.




Prob. 22-42

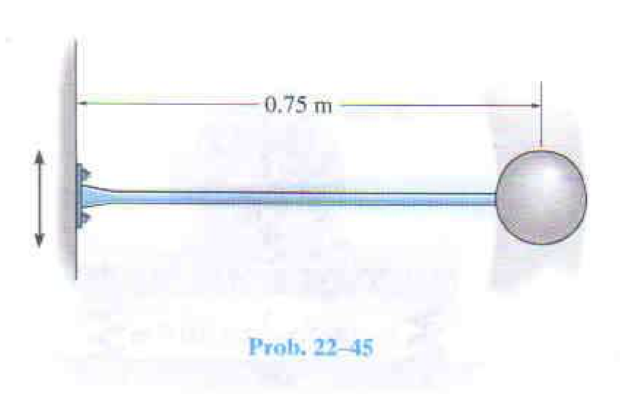
**22-43.** Un bloque de 4 kg está suspendido de un resorte que tiene rigidez $k = 600$ N/m. El bloque es jalado hacia abajo 50 mm desde la posición de equilibrio y liberado del reposo cuando $t = 0$. Si el soporte se mueve con un desplazamiento impreso de $\delta = (10 \operatorname{sen} 4t)$ mm, donde $t$ está en segundos, determine la ecuación que describe el movimiento vertical del bloque. Suponga que los desplazamientos hacia abajo son positivos.

***22-44.** Si el bloque está sometido a la fuerza impresa $F = F_0 \cos \omega t$, demuestre que la ecuación diferencial del movimiento es $\ddot{y} + (k/m)y = (F_0/m) \cos \omega t$, donde $y$ se mide desde la posición de equilibrio del bloque. ¿Cuál es la solución general de esta ecuación?




Prob. 22-44

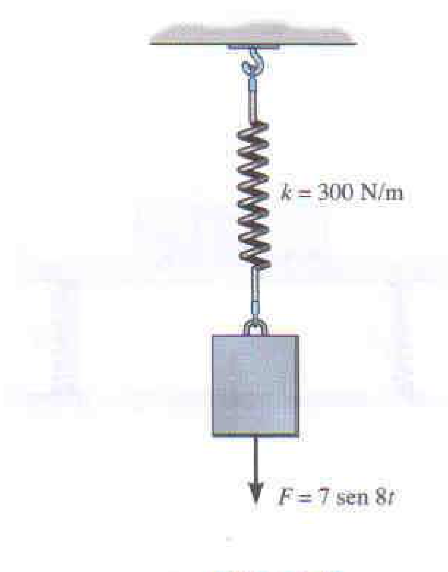
**22-45.** La barra elástica ligera soporta una esfera de 4 kg. Cuando se aplica una fuerza vertical de 18 N a la esfera, la barra se deflexiona 14 mm. Si la pared oscila con frecuencia armónica de 2 Hz y tiene amplitud de 15 mm, determine la amplitud de vibración para la esfera.




Prob. 22-45

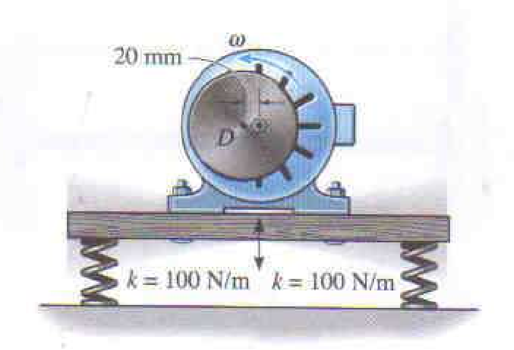
**22-46.** Un bloque tiene masa de 0.8 kg y está suspendido de un resorte con rigidez de 120 N/m. Si un amortiguador proporciona una fuerza de amortiguamiento de 2.5 N cuando la rapidez del bloque es de 0.2 m/s, determine el periodo de vibración libre.

**22-47.** Un bloque de 5 kg está suspendido de un resorte que tiene rigidez de 300 N/m. Si sobre el bloque actúa una fuerza vertical $F = (7 \operatorname{sen} 8t)$ N, donde $t$ está en segundos, determine la ecuación que describe el movimiento del bloque cuando es jalado hacia abajo 100 mm desde su posición de equilibrio y liberado del reposo en $t = 0$. Suponga que los desplazamientos hacia abajo son positivos.



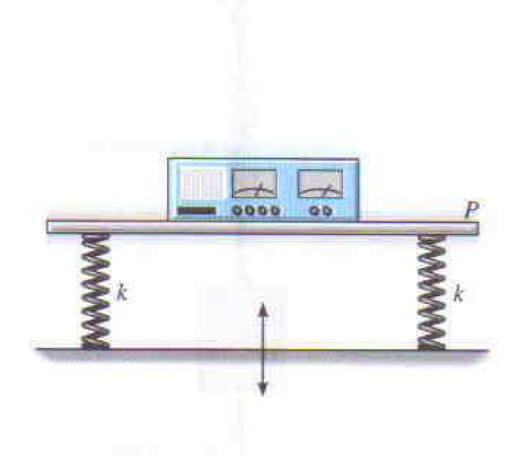

Prob. 22-47

*22-48. El motor eléctrico tiene masa de 50 kg y está soportado mediante *cuatro* resortes, cada uno con rigidez de 100 N/m. Si el motor hace girar un disco $D$ que está montado excéntricamente a 20 mm del centro del disco, determine la rotación angular $\omega$ a la que ocurre la resonancia. Suponga que el motor sólo vibra en la dirección vertical.




Prob. 22–48

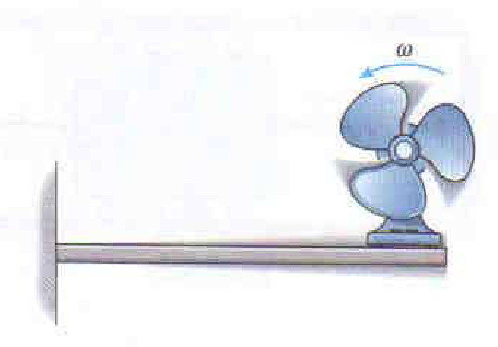
22-49. El instrumento está centrado uniformemente sobre una plataforma $P$ que a su vez se encuentra soportada por *cuatro* resortes, cada resorte tiene rigidez $k = 130$ N/m. Si el piso está sometido a una vibración $\omega = 7$ Hz con amplitud de desplazamiento vertical $\delta_0 = 0.17$ pies, determine la amplitud del desplazamiento vertical de la plataforma y el instrumento. El instrumento y la plataforma tienen un peso total de 18 lb.




Prob. 22–49

22-50. El ventilador tiene masa de 25 kg y está fijo al extremo de una viga horizontal de masa insignificante. Las aspas del ventilador están montadas excéntricamente sobre la flecha de manera que esto es equivalente a una masa desbalanceada de 3.5 kg que se encuentra a 100 mm del eje de rotación. Si la deflexión estática es de 50 mm como resultado del peso del ventilador, determine la amplitud de la vibración de estado estable del ventilador cuando la velocidad angular de éste es de 10 rad/s. *Sugerencia*: Vea la primera parte del ejemplo 22.8.

22-51. ¿Cuál es la amplitud de la vibración de estado estable del ventilador tratado en el problema 22-50 si la velocidad angular del ventilador es de 18 rad/s? *Sugerencia*: Vea la primera parte del ejemplo 22.8.




Probs. 22–50/51

*22-52. El motor eléctrico hace girar un volante excéntrico que es equivalente a un peso desbalanceado de 0.25 lb situado a 10 pulg del eje de rotación. Si la deflexión estática de la viga es de 1 pulg debido al peso del motor, determine la velocidad angular del volante a la que se presentará la resonancia. El motor pesa 150 lb. Desprecie la masa de la viga.

22-53. ¿Cuál será la amplitud de la vibración de estado estable del motor analizado en el problema 22-52 si la velocidad angular del volante es de 20 rad/s?

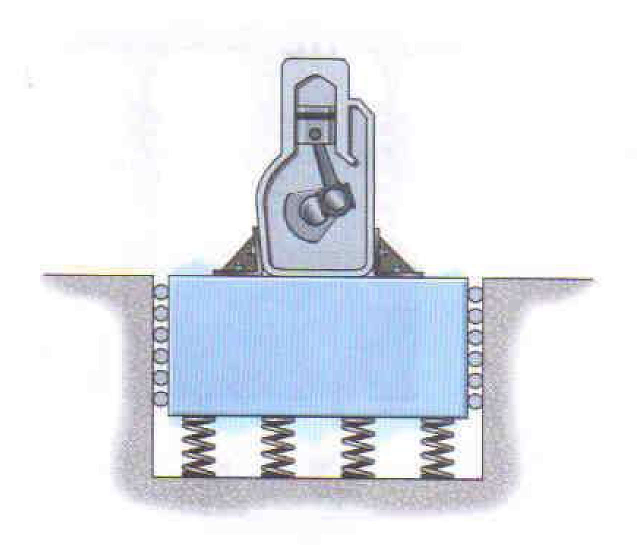
22-54. Determine la velocidad angular del volante mencionado en el problema 22-52 que producirá una amplitud de vibración de 0.25 pulg.




Probs. 22–52/53/54

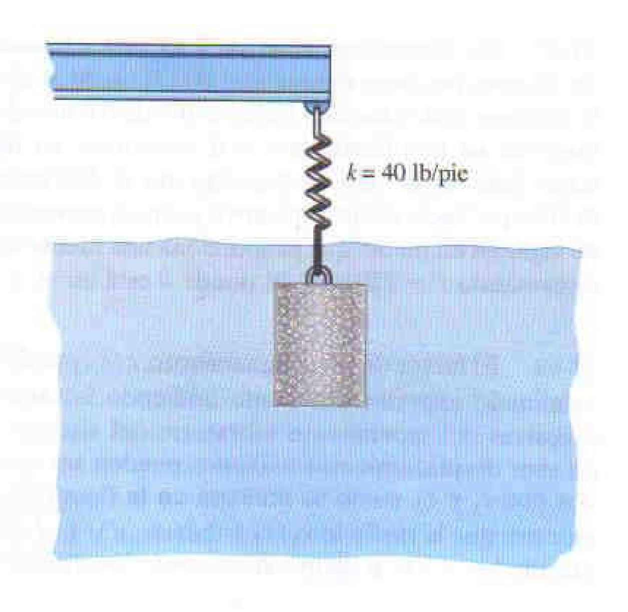
**22-55.** La máquina está montada sobre un bloque de cimentación soportado mediante resortes. Describa la vibración de estado estable del sistema si el bloque y la máquina tienen un peso total de 1500 lb y la máquina, al estar funcionando, crea una fuerza impresa $F = (50 \text{ sen } 2t)$, donde $t$ está en segundos. Suponga que el sistema vibra sólo en la dirección vertical, con el desplazamiento positivo medido hacia abajo, y que la rigidez total de los resortes puede ser representada como $k = 2000$ lb/pie.

***22-56.** Determine la rapidez rotatoria $\omega$ del motor tratado en el problema 22-55 que causará resonancia.



Probs. 22-55/56

**22-57.** El bloque con peso de 1.5 lb está inmerso en un líquido tal que la fuerza de amortiguamiento que actúa sobre el bloque tiene una magnitud de $F = (0.8|v|)$ lb, donde $v$ está en pies/s. Si se tira del bloque hacia abajo 0.8 pies y se le libera del reposo, determine su posición como función del tiempo. El resorte tiene rigidez $k = 40$ lb/pie. Suponga que los desplazamientos hacia abajo son positivos.

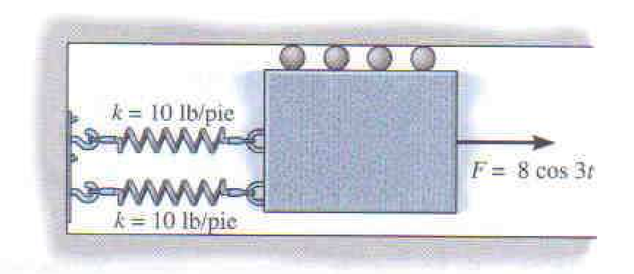



Prob. 22-57

**22-58.** Un bloque de 7 lb está suspendido de un resorte que tiene rigidez $k = 75$ lb/pie. El soporte al cual el resorte está unido recibe un movimiento armónico simple que puede ser expresado como $\delta = (0.15 \text{ sen } 2t)$ pies, donde $t$ está en segundos. Si el factor de amortiguamiento es $c/c_c = 0.8$, determine el ángulo de fase $\phi$ de la vibración forzada.

**22-59.** Determine el factor de amplificación de la combinación bloque, resorte y amortiguador del problema 22-58.

***22-60.** El bloque de 30 lb está unido a dos resortes cada uno con rigidez de 10 lb/pie. Una fuerza $F = (8 \cos 3t)$ lb, donde $t$ está en segundos, es aplicada al bloque. Determine la rapidez máxima del bloque después que las fuerzas de fricción causan que las vibraciones libres desaparezcan.

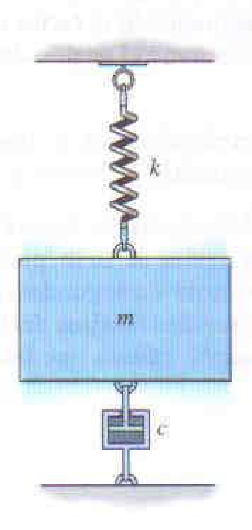



Prob. 22-60

**22-61.** Un bloque con masa de 7 kg está suspendido de un resorte que tiene rigidez $k = 600$ N/m. Si al bloque se le imprime una velocidad hacia arriba de 0.6 m/s desde su posición de equilibrio en $t = 0$, determine su posición como función del tiempo. Suponga que el desplazamiento del bloque hacia abajo es positivo y que el movimiento tiene lugar en un medio que proporciona una fuerza de amortiguamiento $F = (50|v|)$ N, donde $v$ está en m/s.

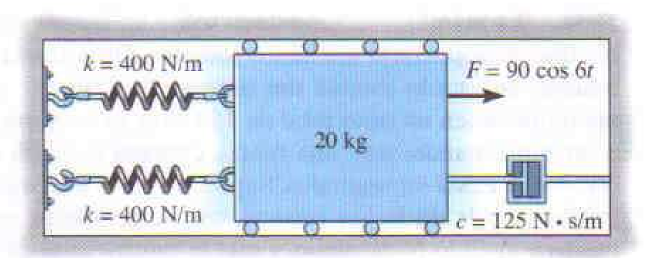
**22-62.** El factor de amortiguamiento, $c/c_c$, puede ser determinado experimentalmente midiendo las amplitudes sucesivas del movimiento vibratorio del sistema. Si dos de esos desplazamientos máximos pueden ser aproximados por $x_1$ y $x_2$, como se muestra en la figura 22-17, demuestre que la razón $\ln x_1/x_2 = 2\pi(c/c_c)/\sqrt{1-(c/c_c)^2}$. La cantidad $\ln x_1/x_2$ se llama *decremento logarítmico*.

**22-63.** Dibuje el circuito eléctrico que es equivalente al sistema mecánico mostrado. Determine la ecuación diferencial que describe la carga $q$ en el circuito.



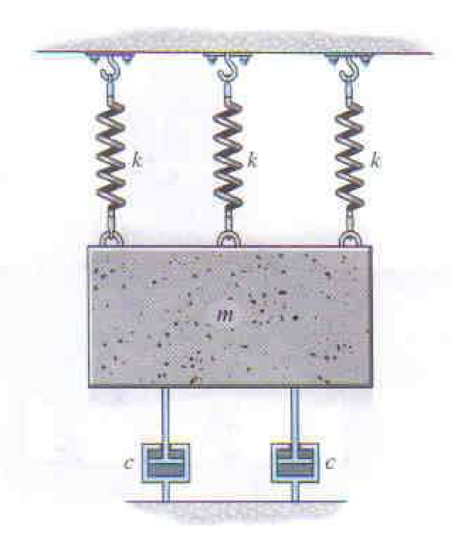

Prob. 22-63

***22-64.** El bloque de 20 kg está sometido a la acción de la fuerza armónica $F = (90 \cos 6t)$ N, donde $t$ está en segundos. Escriba la ecuación que describe el movimiento de estado estable.



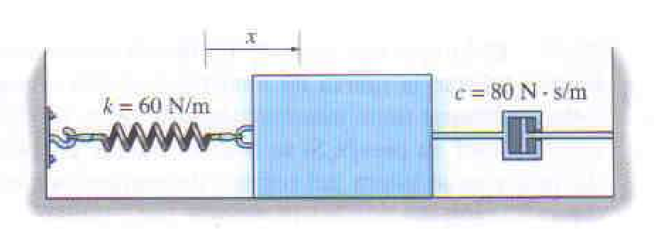

Prob. 22-64

**22-65.** Determine la ecuación diferencial de movimiento para el sistema vibratorio amortiguado que se muestra. ¿Qué tipo de movimiento ocurre? Considere $k = 100$ N/m, $c = 200$ N · s/m, $m = 25$ kg.




Prob. 22-65

**22-66.** El sistema de bloque, resorte y amortiguador, de 10 kg, es amortiguado continuamente. Si el bloque es desplazado a $x = 50$ mm y liberado del reposo, determine el tiempo requerido para que regrese a la posición $x = 2$ mm.




Prob. 22-66

## REPASO DEL CAPÍTULO

- *Vibración libre no amortiguada.* Un cuerpo tiene vibración libre si las fuerzas restauradoras gravitatorias o elásticas son la causa del movimiento. Este movimiento no es amortiguado cuando las fuerzas de fricción son despreciadas. El movimiento periódico de un cuerpo vibrando libremente, sin amortiguamiento, puede ser estudiado desplazando el cuerpo desde la posición de equilibrio y aplicando luego la ecuación de movimiento a lo largo de la trayectoria. Para un sistema con un grado de libertad, la ecuación diferencial resultante puede ser escrita en la forma $\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$. Aquí $\omega_n$ es la frecuencia circular o natural; si es conocida esta frecuencia, el periodo es $\tau = 2\pi/\omega_n$. Además, la frecuencia, o número de ciclos por unidad de tiempo, es

$$f = \omega_n/2\pi$$

- *Métodos de energía.* Si las fuerzas restauradoras que actúan sobre el cuerpo son gravitatorias y elásticas, entonces la conservación de la energía también puede ser usada en determinar su movimiento armónico simple. Para hacer esto, el cuerpo es desplazado una pequeña distancia desde su posición de equilibrio, y se escribe una expresión para su energía cinética y potencial. La derivada con respecto al tiempo de esta ecuación puede ser reordenada en la forma estándar $\ddot{x} + \omega_n^2 x = 0$. Si se conoce $\omega_n$, es posible obtener las otras propiedades del movimiento.

- *Vibración forzada no amortiguada.* Cuando la ecuación de movimiento es aplicada a un cuerpo sometido a una fuerza periódica o a un desplazamiento periódico de soporte con frecuencia $\omega$, entonces el desplazamiento consta de una solución complementaria más una solución particular. La solución complementaria es causada por la vibración libre y puede ser despreciada. La solución particular se debe a la vibración forzada. La resonancia ocurrirá si el periodo natural de vibración, $\omega_n$, es igual a la frecuencia forzada, $\omega$. Esto debe evitarse, ya que el movimiento resulta no acotado.

- *Vibración libre con amortiguamiento viscoso.* Una fuerza de amortiguamiento viscoso es causada por la resistencia de un fluido sobre el sistema cuando éste vibra. Si el movimiento es lento, esta fuerza resistente es entonces proporcional a la velocidad, esto es $F = c\dot{x}$. Aquí $c$ es el coeficiente de amortiguamiento viscoso. Comparando su valor con el coeficiente de amortiguamiento crítico $c_c = 2m\omega_n$, podemos especificar el tipo de vibración que ocurre. Si $c > c_c$, se trata de un sistema sobreamortiguado; si $c = c_c$, tenemos un sistema críticamente amortiguado; si $c < c_c$, el sistema es subamortiguado.

- *Vibración forzada con amortiguamiento viscoso.* El tipo más general de vibración para un sistema de un grado de libertad ocurre cuando el sistema es amortiguado y está sometido a un movimiento periódico forzado. La solución nos proporciona información acerca de cómo el factor de amortiguamiento, $c/c_c$, y la razón de frecuencia, $\omega/\omega_n$, afectan a la vibración. La resonancia se evita si $c/c_c \neq 0$ y $\omega/\omega_n \neq 1$.

- *Analogías con un circuito eléctrico.* El movimiento vibratorio de un sistema complejo puede ser estudiado modelándolo como un circuito eléctrico. Esto es posible ya que las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de cada sistema son las mismas.

APÉNDICE



# Expresiones matemáticas

## Fórmula cuadrática

Si $ax^2 + bx + c = 0$, entonces $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

## Funciones hiperbólicas

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x}$$

## Identidades trigonométricas

$$\operatorname{sen} \theta = \frac{A}{C}, \quad \csc \theta = \frac{C}{A}$$

$$\cos \theta = \frac{B}{C}, \quad \sec \theta = \frac{C}{B}$$

$$\tan \theta = \frac{A}{B}, \quad \cot \theta = \frac{B}{A}$$



$$\operatorname{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$$



$$\operatorname{sen}(\theta \pm \phi) = \operatorname{sen} \theta \cos \phi \pm \cos \theta \operatorname{sen} \phi$$

$$\operatorname{sen} 2\theta = 2 \operatorname{sen} \theta \cos \theta$$

$$\cos(\theta \pm \phi) = \cos \theta \cos \phi \mp \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \phi$$

$$\cos 2\theta = \cos^2 \theta - \operatorname{sen}^2 \theta$$

$$\cos \theta = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos 2\theta}{2}}, \quad \operatorname{sen} \theta = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2\theta}{2}}$$

$$\tan \theta = \frac{\operatorname{sen} \theta}{\cos \theta}$$

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \qquad 1 + \cot^2 \theta = \csc^2 \theta$$

## Desarrollos en series de potencias

$$\operatorname{sen} x = x - \frac{x^3}{3!} + \cdots \qquad \operatorname{senh} x = x + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \cdots \qquad \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \cdots$$

## Derivadas

$$\frac{d}{dx}(u^n) = nu^{n-1}\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(uv) = u\frac{dv}{dx} + v\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\dfrac{du}{dx} - u\dfrac{dv}{dx}}{v^2}$$

$$\frac{d}{dx}(\cot u) = -\csc^2 u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\sec u) = \tan u \sec u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\csc u) = -\csc u \cot u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sen} u) = \cos u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\cos u) = -\operatorname{sen} u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan u) = \sec^2 u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\operatorname{senh} u) = \cosh u\frac{du}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}(\cosh u) = \operatorname{senh} u\frac{du}{dx}$$

## Integrales

$$\int x^n\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\;\; n \neq -1$$

$$\int \frac{dx}{a+bx} = \frac{1}{b}\ln(a+bx) + C$$

$$\int \frac{dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2\sqrt{-ba}}\ln\left[\frac{a+x\sqrt{-ab}}{a-x\sqrt{-ab}}\right] + C,\;\; ab<0$$

$$\int \frac{x\,dx}{a+bx^2} = \frac{1}{2b}\ln(bx^2+a) + C,$$

$$\int \frac{x^2\,dx}{a+bx^2} = \frac{x}{b} - \frac{a}{b\sqrt{ab}}\tan^{-1}\frac{x\sqrt{ab}}{a} + C,\;\; ab>0$$

$$\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left[\frac{a+x}{a-x}\right] + C,\;\; a^2>x^2$$

$$\int \sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2}{3b}\sqrt{(a+bx)^3} + C$$

$$\int x\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{-2(2a-3bx)\sqrt{(a+bx)^3}}{15b^2} + C$$

$$\int x^2\sqrt{a+bx}\,dx = \frac{2(8a^2-12abx+15b^2x^2)\sqrt{(a+bx)^3}}{105b^3} + C$$

$$\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}\right] + C,\; a>0$$

$$\int x\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{1}{3}\sqrt{(a^2-x^2)^3} + C$$

$$\int x^2\sqrt{a^2-x^2}\,dx = -\frac{x}{4}\sqrt{(a^2-x^2)^3} + \frac{a^2}{8}\left(x\sqrt{a^2-x^2} + a^2\operatorname{sen}^{-1}\frac{x}{a}\right) + C,\; a>0$$

$$\int \sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \frac{1}{2}\left[x\sqrt{x^2\pm a^2} \pm a^2\ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right)\right] + C$$

$$\int x\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \frac{1}{3}\sqrt{(x^2\pm a^2)^3} + C$$

$$\int x^2\sqrt{x^2\pm a^2}\,dx = \frac{x}{4}\sqrt{(x^2\pm a^2)^3} \mp \frac{a^2}{8}x\sqrt{x^2\pm a^2} - \frac{a^4}{8}\ln\left(x+\sqrt{x^2\pm a^2}\right) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx}} = \frac{2\sqrt{a+bx}}{b} + C$$

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \sqrt{x^2\pm a^2} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+cx^2}} = \frac{1}{\sqrt{c}}\ln\left[\sqrt{a+bx+cx^2} + x\sqrt{c} + \frac{b}{2\sqrt{c}}\right] + C,\; c>0$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-c}}\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{-2cx-b}{\sqrt{b^2-4ac}}\right) + C,\; c>0$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int x\cos(ax)\,dx = \frac{1}{a^2}\cos(ax) + \frac{x}{a}\operatorname{sen}(ax) + C$$

$$\int x^2\cos(ax)\,dx = \frac{2x}{a^2}\cos(ax) + \frac{a^2x^2-2}{a^3}\operatorname{sen}(ax) + C$$

$$\int e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}e^{ax} + C$$

$$\int xe^{ax}\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2}(ax-1) + C$$

$$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x + C$$

$$\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x + C$$

# APÉNDICE B Análisis numérico y por computadora

Ocasionalmente la aplicación de las leyes de la mecánica conducirá a un sistema de ecuaciones para las cuales una solución en forma cerrada es difícil o imposible de obtener. Confrontados con esta situación, los ingenieros usan a menudo un método numérico que en la mayoría de los casos puede ser programado en una microcomputadora o en una calculadora de bolsillo "programable". Aquí presentaremos brevemente un programa de computadora para resolver un conjunto de ecuaciones lineales algebraicas y tres métodos numéricos que se pueden usar para resolver una ecuación algebraica o trascendental, evaluar una integral definida, y resolver una ecuación diferencial ordinaria. La aplicación de cada método será explicada por medio de un ejemplo, y es proporcionado un programa de computadora asociado escrito en Microsoft BASIC, que está diseñado para correr en la mayoría de las computadoras personales.* Un texto sobre análisis numérico debería ser consultado para una discusión adicional relativa a la revision de la exactitud de cada método y los errores inherentes que se pueden generar en cada método.

## B.1 Ecuaciones algebraicas lineales

La aplicación de las ecuaciones de equilibrio estático o las ecuaciones de movimiento requieren a veces la resolución de un conjunto de ecuaciones algebraicas lineales. El programa de computadora dado en la figura B-1 se puede usar con este fin. Este programa se basa en el método de

*Tipos similares de programas pueden ser escritos o comprados para calculadoras de bolsillo programables.

```
1 PRINT"Linear system of equations":PRINT
2 DIM A(10,11)
3 INPUT"Input number of equations : ",N
4 PRINT
5 PRINT"A  coefficients"
6 FOR I = 1 TO N
7 FOR J = 1 TO N
8 PRINT "A(";I;",";J;
9 INPUT")=",A(I,J)
10 NEXT J
11 NEXT I
12 PRINT
13 PRINT"B  coefficients"
14 FOR I = 1 TO N
15 PRINT "B(";I;
16 INPUT")=",A(I,N+1)
17 NEXT I
18 GOSUB 25
19 PRINT
20 PRINT"Unknowns"
21 FOR I = 1 TO N
22 PRINT "X(";I;")=";A(I,N+1)
23 NEXT I
24 END
25 REM Subroutine Guassian
26 FOR M=1 TO N
27 NP=M
28 BG=ABS(A(M,M))
29 FOR I = M TO N
30 IF ABS(A(I,M))<=BG THEN 33
31 BG=ABS(A(I,M))
32 NP=I
33 NEXT I
34 IF NP=M THEN 40
35 FOR I = M TO N+1
36 TE=A(M,I)
37 A(M,I)=A(NP,I)
38 A(NP,I)=TE
39 NEXT I
40 FOR I = M+1 TO N
41 FC=A(I,M)/A(M,M)
42 FOR J = M+1 TO N+1
43 A(I,J)=A(I,J)-FC*A(M,J)
44 NEXT J
45 NEXT I
46 NEXT M
47 A(N,N+1)=A(N,N+1)/A(N,N)
48 FOR I = N-1 TO 1 STEP -1
49 SM=0
50 FOR J=I+1 TO N
51 SM=SM+A(I,J)*A(J,N+1)
52 NEXT J
53 A(I,N+1)=(A(I,N+1)-SM)/A(I,I)
54 NEXT I
55 RETURN
```

Fig. B–1

eliminación de Gauss y puede resolver un máximo de 10 ecuaciones con 10 incógnitas. Para usarlo, las ecuaciones deben primero escribirse en el siguiente formato general:

$$
\begin{aligned}
A_{11}x_1 + A_{12}x_2 + \cdots + A_{1n}x_n &= B_1 \\
A_{21}x_1 + A_{22}x_2 + \cdots + A_{2n}x_n &= B_2 \\
&\vdots \\
A_{n1}x_1 + A_{n2}x_2 + \cdots + A_{nn}x_n &= B_n
\end{aligned}
$$

Los coeficientes "$A$" y "$B$" son "pedidos" al correr el programa. La salida presenta las incógnitas $x_1, \ldots, x_n$.

**EJEMPLO B.1**

Resuelva las dos ecuaciones

$$
\begin{aligned}
3x_1 + x_2 &= 4 \\
2x_1 - x_2 &= 10
\end{aligned}
$$

**Solución**

Cuando el programa empieza a correr, él pide el número de ecuaciones (2); luego los coeficientes $A$ en la secuencia $A_{11} = 3, A_{12} = 1, A_{21} = 2, A_{22} = -1$, y finalmente los coeficientes $B$, $B_1 = 4$, $B_2 = 10$. La salida aparece como

Incógnitas

$X(1) = 2.8$ *Resp.*

$X(2) = -4.4$ *Resp.*

## B.2 Regla de Simpson

La regla de Simpson es un método numérico que puede usarse para determinar el área bajo una curva dada como una gráfica o como una función explícita $y = f(x)$. También puede usarse para calcular el valor de una integral definida que implica la función $y = f(x)$. Para usarla, el área debe ser subdividida en un *número par* de franjas o intervalos con un ancho $h$. La curva entre tres ordenadas consecutivas es aproximada por una parábola, y el área entera o integral definida es entonces determinada con la fórmula

$$\int_{x_0}^{x_n} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}[y_0 + 4(y_1 + y_3 + \cdots + y_{n-1}) + 2(y_2 + y_4 + \cdots + y_{n-2}) + y_n] \qquad \text{(B–1)}$$

El programa de computadora para esta ecuación está dado en la figura B-2. Para su uso, debemos primero especificar la función (línea 6 del programa). Los límites superior e inferior de la integral y el número de intervalos son pedidos cuando el programa es ejecutado. El valor de la integral es entonces dado como salida.

```
1 PRINT"Simpson's rule":PRINT
2 PRINT" To execute this program :":PRINT
3 PRINT"   1- Modify right-hand side of the equation given below,
4 PRINT"      then press RETURN key"
5 PRINT"   2- Type  RUN 6":PRINT:EDIT 6
6 DEF FNF(X)=LOG(X)
7 PRINT:INPUT" Enter Lower Limit = ",A
8 INPUT" Enter Upper Limit = ",B
9 INPUT" Enter Number (even) of Intervals = ",N%
10 H=(B-A)/N%:AR=FNF(A):X=A+H
11 FOR J%=2 TO N%
12 K=2*(2-J%+2*INT(J%/2))
13 AR=AR+K*FNF(X)
14 X=X+H:NEXT J%
15 AR=H*(AR+FNF(B))/3
16 PRINT" Integral = ",AR
17 END
```

Fig. B–2

**EJEMPLO B.2**

Evalúe la integral definida

$$\int_2^5 \ln x\, dx$$

**Solución**

El intervalo $x_0 = 2$ a $x_6 = 5$ será dividido en seis partes iguales ($n = 6$), cada una con ancho $h = (5 - 2)/6 = 0.5$. Luego calculamos $y = f(x) = \ln x$ en cada punto de la subdivisión.

| $n$ | $x_n$ | $y_n$ |
|---|---|---|
| 0 | 2 | 0.693 |
| 1 | 2.5 | 0.916 |
| 2 | 3 | 1.099 |
| 3 | 3.5 | 1.253 |
| 4 | 4 | 1.386 |
| 5 | 4.5 | 1.504 |
| 6 | 5 | 1.609 |

La ecuación B-1 toma la forma

$$\int_2^5 \ln x\, dx \approx \frac{0.5}{3}[0.693 + 4(0.916 + 1.253 + 1.504)$$

$$+ 2(1.099 + 1.386) + 1.609]$$

$$\approx 3.66 \qquad \textit{Resp.}$$

Esta respuesta es equivalente a la respuesta exacta con tres cifras significativas. Obviamente, una mayor exactitud con un mayor número de cifras significativas puede obtenerse seleccionando un intervalo $h$ menor (o mayor $n$).

Usando el programa de computadora, primero especificamos la función ln $x$, línea 6 en la figura B-2. Durante la ejecución, la entrada del programa requiere los límites superior e inferior 2 y 5 y el número de intervalos $n = 6$. La salida aparece como

$$\text{Integral} = 3.66082 \qquad \textit{Resp.}$$

## B.3 El método de la secante

El método de la secante se usa para encontrar las raíces reales de una ecuación algebraica o trascedental $f(x) = 0$. El método deriva su nombre del hecho de que la fórmula usada es establecida de la pendiente de la línea secante a la gráfica $y = f(x)$. Esta pendiente es $[f(x_n) - f(x_{n-1})]/(x_n - x_{n-1})$, y la fórmula de la secante es

$$x_{n+1} = x_n - f(x_n)\left[\frac{x_n - x_{n-1}}{f(x_n) - f(x_{n-1})}\right] \tag{B–2}$$

Para su aplicación es necesario proporcionar dos conjeturas iniciales $x_0$ y $x_1$ y con ellas evaluar $x_2$ con la ecuación B-2 ($n = 1$). Luego se procede a reaplicar la ecuación B-2 con $x_1$ y el valor calculado de $x_2$ y se obtiene $x_3$ ($n = 2$), etc., hasta el valor $x_{n+1} \approx x_n$. Puede verse que esto ocurrirá si $x_n$ se aproxima a la raíz de la función $f(x) = 0$, ya que el término correctivo a la derecha de la ecuación B-2 tenderá a cero. En particular, entre más grande la pendiente, menor será la corrección a $x_n$ y más rápido se hallará la raíz. Por otra parte, si la pendiente es muy pequeña en la vecindad de la raíz, el método conduce a grandes correcciones para $x_n$ y la convergencia a la raíz es lenta y puede aún fallar en encontrarla. En tales casos deben usarse otros procedimientos numéricos para hallar la solución.

Un programa de computadora basado en la ecuación B-2 está dado en la figura B-3. Primero debemos especificar la función en la línea 7 del programa. Cuando el programa es ejecutado, deben introducirse dos conjeturas iniciales, $x_0$ y $x_1$, para aproximar la solución. La salida da el valor de la raíz. Si éste no puede ser determinado, el programa lo indica.

```
1 PRINT"Secant method":PRINT
2 PRINT" To execute this program :":PRINT
3 PRINT"     1) Modify right hand side of the equation given below,"
4 PRINT"        then press RETURN key."
5 PRINT"     2) Type  RUN 7"
6 PRINT:EDIT 7
7 DEF FNF(X)=.5*SIN(X)-2*COS(X)+1.3
8 INPUT"Enter point #1 =",X
9 INPUT"Enter point #2 =",X1
10 IF X=X1 THEN 14
11 EP=.00001:TL=2E-20
12 FP=(FNF(X1)-FNF(X))/(X1-X)
13 IF ABS(FP)>TL THEN 15
14 PRINT"Root can not be found.":END
15 DX=FNF(X1)/FP
16 IF ABS(DX)>EP THEN 19
17 PRINT "Root = ";X1;"       Function evaluated at this root = ";FNF(X1)
18 END
19 X=X1:X1=X1-DX
20 GOTO 12
```

Fig. B-3

**EJEMPLO B.3**

Determine la raíz de la ecuación

$$f(x) = 0.5 \text{ sen } x - 2 \cos x + 1.30 = 0$$

**Solución**

Las conjeturas para las raíces iniciales serán $x_0 = 45°$ y $x_1 = 30°$. Aplicando la ecuación B-2,

$$x_2 = 30° - (-0.1821)\frac{(30° - 45°)}{(-0.1821 - 0.2393)} = 36.48°$$

Usando este valor en la ecuación B-2, junto con $x_1 = 30°$, tenemos

$$x_3 = 36.48° - (-0.0108)\frac{36.48° - 30°}{(-0.0108 + 0.1821)} = 36.89°$$

Repitiendo el proceso con este valor y $x_2 = 36.48°$, obtenemos

$$x_4 = 36.89° - (0.0005)\left[\frac{36.89° - 36.48°}{(0.0005 + 0.0108)}\right] = 36.87°$$

Así entonces, $x = 36.9°$, con tres cifras significativas.

Si el problema es resuelto usando el programa de computadora, primero especificamos la función, línea 7 en la figura B-3. Durante la ejecución, la primera y segunda conjetura deben introducirse en radianes. Escogiendo éstas como 0.8 rad y 0.5 rad, el resultado aparece como

Raíz = 0.6435022
Función evaluada en esta raíz = 1.66893E-06

Este resultado convertido de radianes a grados es

$$x = 36.9°$$ *Resp.*

## B.4 Método de Runge-Kutta

El método de Runge-Kutta se utiliza para resolver una ecuación diferencial ordinaria. Consiste en la aplicación de una serie de fórmulas que se emplean para encontrar los valores específicos de $y$ para los valores crecientes correspondientes de $h$ en $x$. Las fórmulas proporcionadas de manera general son las siguientes:

**Ecuación de primer orden** Para integrar $\dot{x} = f(t, x)$ paso a paso utilice

$$x_{i+1} = x_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \tag{B-3}$$

en donde

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_i, x_i) \\ k_2 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= hf(t_i + h, x_i + k_3) \end{aligned} \tag{B-4}$$

**Ecuación de segundo orden** Para integrar $\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$, utilice

$$\begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + h\left[\dot{x}_i + \frac{1}{6}(k_1 + k_2 + k_3)\right] \\ \dot{x}_{i+1} &= \dot{x}_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \end{aligned} \tag{B-5}$$

donde

$$\begin{aligned} k_1 &= hf(t_i, x_i, \dot{x}_i) \\ k_2 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}\dot{x}_i, \dot{x}_i + \frac{k_1}{2}\right) \\ k_3 &= hf\left(t_i + \frac{h}{2}, x_i + \frac{h}{2}\dot{x}_i + \frac{h}{4}k_1, \dot{x}_i + \frac{k_2}{2}\right) \\ k_4 &= hf\left(t_i + h, x_i + h\dot{x}_i + \frac{h}{2}k_2, \dot{x}_i + k_3\right) \end{aligned} \tag{B-6}$$

Para aplicar estas ecuaciones, se comienza con los valores iniciales $t_i = t_0$, $x_i = x_0$ y $\dot{x}_i = \dot{x}_0$ (para las ecuaciones de segundo orden). Al seleccionar un incremento de $h$ para *t0*, se calculan las cuatro constantes de $k$, y estos resultados se sustituyen en la ecuación B-3 o B-5 para poder calcular $x_{i+1} = x_1$, $\dot{x}_{i+1} = x_1$, que corresponde a $t_{i+1} = t_1 = t_0 + h$. Cuando se repite este proceso utilizando $t_1$, $x_1$, $\dot{x}_1$ y $h$, se calculan entonces los valores de $x_2$, $\dot{x}_2$ y $t_2 = t_1 + h$, etcétera.

Los programas de cómputo que resuelven las ecuaciones diferenciales de primero y segundo órdenes por este medio se enlistan en las figuras B-4 y B-5 respectivamente. Para poder emplear estos programas, el operador especifica la función $\dot{x} = f(t, x)$ o $\ddot{x} = f(t, x, \dot{x})$ (línea 7), los valores iniciales de $t_0$, $x_0$, $\dot{x}_0$ (para la ecuación de segundo orden), el tiempo final de $t_n$, y el tamaño del paso de $h$. El resultado proporciona los valores de $t$,$x$, y $x$ para cada vez de incremento hasta que se alcanza $t_n$

```
1 PRINT"Runge-Kutta Method for 1-st order Differential Equation":PRINT
2 PRINT" To execute this program :":PRINT
3 PRINT"   1) Modify right hand side of the equation given below,"
4 PRINT"      then Press RETURN key"
5 PRINT"   2) Type  RUN 7"
6 PRINT:EDIT 7
7 DEF FNF(T,X)=5*T+X
8 CLS:PRINT" Initial Conditions":PRINT
9 INPUT"Input  t    = ",T
10 INPUT"        x    = ",X
11 INPUT"Final  t    = ",T1
12 INPUT"step size   = ",H:PRINT
13 PRINT"         t              x"
14 IF T>=T1+H THEN 23
15 PRINT USING"######.#####";T;X
16 K1=H*FNF(T,X)
17 K2=H*FNF(T+.5*H,X+.5*K1)
18 K3=H*FNF(T+.5*H,X+.5*K2)
19 K4=H*FNF(T+H,X+K3)
20 T=T+H
21 X=X+(K1+K2+K2+K3+K3+K4)/6
22 GOTO 14
23 END
```

Fig. B-4

```
1 PRINT"Runge-Kutta Method for 2-nd order Differential Equation":PRINT
2 PRINT" To execute this program :":PRINT
3 PRINT"   1) Modify right hand side of the equation given below,"
4 PRINT"      then Press RETURN key"
5 PRINT"   2) Type  RUN 7"
6 PRINT:EDIT 7
7 DEF FNF(T,X,XD)=
8 INPUT"Input  t    = ",T
9 INPUT"        x    = ",X
10 INPUT"     dx/dt = ",XD
11 INPUT"Final  t    = ",T1
12 INPUT"step size   = ",H:PRINT
13 PRINT"         t              x          dx/dt"
14 IF T>=T1+H THEN 24
15 PRINT USING"######.#####";T;X;XD
16 K1=H*FNF(T,X,XD)
17 K2=H*FNF(T+.5*H,X+.5*H*XD,XD+.5*K1)
18 K3=H*FNF(T+.5*H,X+(.5*H)*(XD+.5*K1),XD+.5*K2)
19 K4=H*FNF(T+H,X+H*XD+.5*H*K2,XD+K3)
20 T=T+H
21 X=X+H*XD+H*(K1+K2+K3)/6
22 XD=XD+(K1+K2+K2+K3+K3+K4)/6
23 GOTO 14
24 END
```

Fig. B-5

**EJEMPLO B.4**

Resuelva las ecuaciones diferenciales $\dot{x} = 5t + x$. Obtenga los resultados para dos pasos utilizando los incrementos de $h = 0.02$s. en $t_0 = 0$, $x_0 = 0$.

**Solución**

Ésta es una ecuación de primer orden de manera que aplican las ecuaciones B-3 y B-4. Por lo tanto, para $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $h = 0.02$, tenemos

$$k_1 = 0.02(0 + 0) = 0$$
$$k_2 = 0.02[5(0.01) + 0] = 0.001$$
$$k_3 = 0.02[5(0.01) + 0.0005] = 0.00101$$
$$k_4 = 0.02[5(0.02) + 0.00101] = 0.00202$$
$$x_1 = 0 + \tfrac{1}{6}[0 + 2(0.001) + 2(0.00101) + 0.00202] = 0.00101$$

Por medio de los valores $t_1 = 0 + 0.02 = 0.02$ y $x_1 = 0.00101$ con $h = 0.02$ el valor de $x_2$ se calcula a partir de las ecuaciones B-3 y B-4.

$$k_1 = 0.02[5(0.02) + 0.00101] = 0.00202$$
$$k_2 = 0.02[5(0.03) + 0.00202] = 0.00304$$
$$k_3 = 0.02[5(0.03) + 0.00253] = 0.00305$$
$$k_4 = 0.02[5(0.04) + 0.00406] = 0.00408$$
$$x_2 = 0.00101 + \tfrac{1}{6}[0.00202 + 2(0.00304) + 2(0.00305) + 0.00408] = 0.00405$$

*Resp.*

Para resolver este problema utilizando el programa de cómputo que se muestra en la figura B-4, la función debe introducirse antes en la línea 7, después se especifican los datos de $t_0 = 0$, $x_0 = 0$, $t_n = 004$ y $h = 0.02$. Los resultados aparecen como

| $t$ | $x$ |
|---|---|
| 0.00000 | 0.00000 |
| 0.02000 | 0.00101 |
| 0.04000 | 0.00405 |

*Resp.*



# APÉNDICE C Análisis de vectores

La siguiente presentación ofrece una breve revisión del análisis de vectores, lo que se trata con mayor detalle en el libro de Mecánica para Ingenieros: Estática.

**Vector** Un vector **A** es una cantidad que tiene magnitud y dirección y que se añade en conformidad con la ley del paralelogramo. Como se muestra en la figura C-1, **A** = **B** + **C**, en donde **A** es el *vector resultante* y **B** y **C** son *vectores componentes*.

**Vector de unidad** Un vector de unidad o unitario $\mathbf{u}_A$, tiene la magnitud de una unidad "sin dimensión" y actúa en la misma dirección que **A**. Se determina al dividir **A** entre su magnitud $A$, por ejemplo,

$$\mathbf{u}_A = \frac{\mathbf{A}}{A} \tag{C-1}$$

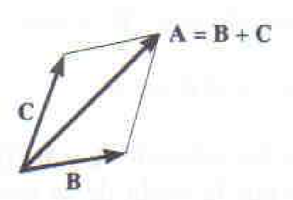



Fig. C-1

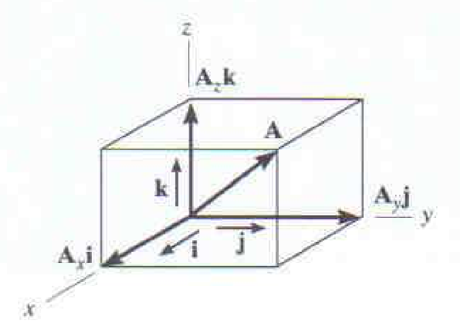



Fig. C–2

**Notación del vector cartesiano.** Las direcciones de los ejes positivos *x, y, z se* definen por los vectores unitarios cartesianos **i, j, k** , respectivamente.

Como se muestra en la figura C-2, el vector **A** se formula a partir de la adición de sus componentes *x, y, z* como

$$\mathbf{A} = A_x\mathbf{i} + A_y\mathbf{j} + A_z\mathbf{k} \qquad \text{(C–2)}$$

La magnitud de **A** se determina de

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \qquad \text{(C–3)}$$

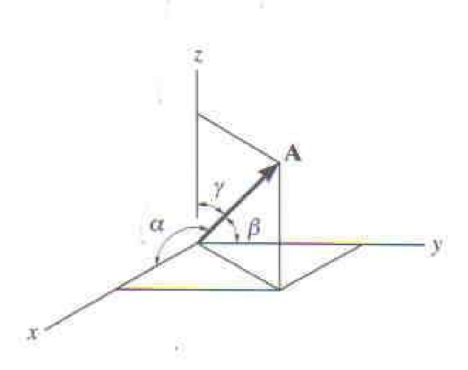



Fig. C–3

La dirección de **A** se define en términos de los ángulos de dirección coordinada, de $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, medidos a partir de la *cola* de **A** hacia los ejes *x, y, z positivos*, como se muestra en la figura C-3. Estos ángulos se determinan a partir de los cosenos de dirección que representan los componentes **i, j, k** del vector unitario $\mathbf{u}_A$ que se encuentran en las ecuaciones C-1 y C-2.

$$\mathbf{u}_A = \frac{A_x}{A}\mathbf{i} + \frac{A_y}{A}\mathbf{j} + \frac{A_z}{A}\mathbf{k} \qquad \text{(C–4)}$$

de manera que los cosenos son

$$\cos\alpha = \frac{A_x}{A} \qquad \cos\beta = \frac{A_y}{A} \qquad \cos\gamma = \frac{A_z}{A} \qquad \text{(C–5)}$$

Por lo tanto, $\mathbf{u}_A = \cos\alpha\mathbf{i} + \cos\beta\mathbf{j} + \cos\gamma\mathbf{k}$, y utilizando la ecuación C-3 se observa que

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad \text{(C–6)}$$

**Producto Cruzado.** El producto cruzado de dos vectores **A** y **B**, que resulta en un vector **C** se escribe de la siguiente manera

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} \qquad \text{(C–7)}$$

Y se lee **C** es igual a **A** "cruzado con" **B**: la *magnitud* de **C** es

$$C = AB \operatorname{sen}\theta \qquad \text{(C–8)}$$

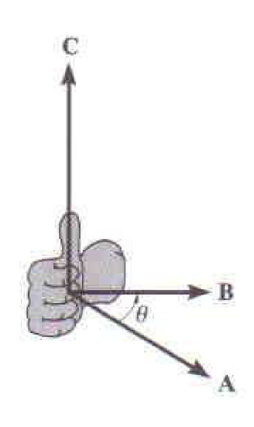



Fig. C–4

en donde $\theta$ es el ángulo de las colas de **A** y **B** ($0° \leq \theta \leq 180°$). La dirección de **C** se determina por la regla de la mano derecha, en donde los dedos de la mano derecha van de **A** a **B** y el pulgar apunta hacia la dirección de **C**, como se muestra en la figura C-4. Este vector es perpendicular al plano que contiene los vectores **A** y **B**.

El producto del vector cruzado *no* es conmutativo, por ejemplo $\mathbf{A} \times \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \times \mathbf{A}$ en lugar de,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \qquad \text{(C–9)}$$

Es válida la ley distributiva, por ejemplo

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{D} \qquad \text{(C–10)}$$

Y el producto cruzado se puede multiplicar por $m$ escalar en cualquier forma, por ejemplo

$$m(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (m\mathbf{A}) \times \mathbf{B} = \mathbf{A} \times (m\mathbf{B}) = (\mathbf{A} \times \mathbf{B})m \qquad \text{(C–11)}$$

La ecuación C-7 puede emplearse para encontrar el producto cruzado en cualquier par de vectores unitarios cartesianos. Por ejemplo para encontrar $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$, la magnitud es $(i)(j)$ sen $90° = (1)(1)(1) = 1$, y su dirección $+\mathbf{k}$ se determina con la regla de la mano derecha aplicada a $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$, como se muestra en la figura C-2. Se muestra un esquema sencillo en la figura C-5 y puede ser de utilidad para obtener éste y otros resultados cuando es necesario hacerlo. Si se construye el círculo de la manera como se ilustra , y después se *cruzan* ambos vectores en el sentido *contrario* a las manecillas del reloj se obtiene un tercer vector positivo, por ejemplo $\mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$. Al mover *en el sentido de las manecillas del reloj*, se obtiene un vector *negativo*, por ejemplo $\mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}$.




Fig. C–5

Si **A** y **B** se expresan en forma de componentes cartesianos, entonces el producto cruzado, ecuación C-7, puede evaluarse al expandir la determinante

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \qquad \text{(C–12)}$$

que resulta en

$$\mathbf{C} = (A_yB_z - A_zB_y)\mathbf{i} - (A_xB_z - A_zB_x)\mathbf{j} + (A_xB_y - A_yB_x)\mathbf{k}$$

Recuerde que el producto cruzado se utiliza en estática para definir el momentum de una fuerza **F** acerca del punto $O$, en cuyo caso

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \qquad \text{(C–13)}$$

donde **r** es un vector de posición dirigido desde el punto O a *cualquier punto* en la línea de acción de **F**

**Producto Punto** El producto punto de dos vectores **A** y **B**, que resulta en escalar se define por

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos\theta \qquad \text{(C–14)}$$

y se lee **A** "punto" **B**. El ángulo $\theta$ se forma a partir de las *colas* de **A** y **B** $(0° \leq \theta \leq 180°)$.

El producto punto es conmutativo, por ejemplo

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} \qquad \text{(C–15)}$$

Aplica la ley distributiva

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{D}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{D} \qquad \text{(C–16)}$$

Se lleva a cabo de cualquier manera una multiplicación escalar

$$m(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (m\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot(m\mathbf{B}) = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})m \tag{C–17}$$

Por medio de la ecuación C-14, el producto punto entre ambos vectores cartesianos puede determinarse. Por ejemplo $\mathbf{i}\cdot\mathbf{i} = (1)(1)\cos 0° = 1$ y $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j} = (1)(1)\cos 90° = 0$.

Si **A** y **B** se expresan en forma componente, el producto punto, ecuación C-14, puede determinarse a partir de

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \tag{C–18}$$

El producto punto puede emplearse para determinar el *ángulo θ que se forma entre los dos vectores*. De la ecuación C-14

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{AB}\right) \tag{C–19}$$

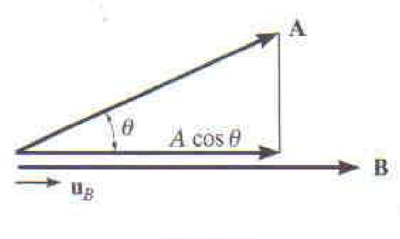
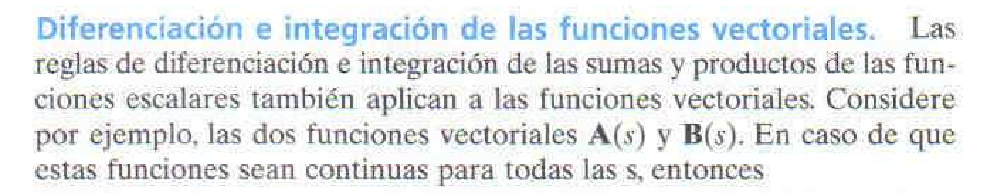



Fig. C–6

También es posible encontrar el *componente del vector en cualquier dirección* por medio del producto punto. Por ejemplo, la magnitud de un componente (o proyección) del vector **A** en dirección de $B$, como se muestra en la figura C-6, se define por $A \cos \theta$. De la ecuación C-14, esta magnitud es

$$A\cos\theta = \mathbf{A}\cdot\frac{\mathbf{B}}{B} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{u}_B \tag{C–20}$$

$\mathbf{u}_B$ representa un vector unitario que actúa en la dirección de **B**, como se ilustra en la figura C-6.



**Diferenciación e integración de las funciones vectoriales.** Las reglas de diferenciación e integración de las sumas y productos de las funciones escalares también aplican a las funciones vectoriales. Considere por ejemplo, las dos funciones vectoriales $\mathbf{A}(s)$ y $\mathbf{B}(s)$. En caso de que estas funciones sean continuas para todas las s, entonces

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{ds} + \frac{d\mathbf{B}}{ds} \tag{C–21}$$

$$\int(\mathbf{A}+\mathbf{B})\,ds = \int\mathbf{A}\,ds + \int\mathbf{B}\,ds \tag{C–22}$$

Para el producto cruzado,

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) = \left(\frac{d\mathbf{A}}{ds}\times\mathbf{B}\right) + \left(\mathbf{A}\times\frac{d\mathbf{B}}{ds}\right) \tag{C–23}$$

De manera semejante para el producto punto,

$$\frac{d}{ds}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{ds}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\frac{d\mathbf{B}}{ds} \tag{C–24}$$